FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1916

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. XX.

pro Anno MDCCLXXV.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXVI.

116.70283 April 28

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XX.

MATHEMATICA.

I.

Aduerſaria analytica miſcellanea de fractionibus continuis.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 3.

Fractionum continuarum theoria, quae ſuperiori iam ſeculo, ſummorum Geometrarum, Brounckeri, Walliſii, Hugenii aliorumque commentationibus inclaruit, nouam, etiam hiſce temporibus, praeclaris Illuſtrium virorum *Euleri*, *Bernoulli*, *La Grangii*, in ea vberius excolenda ſtudiis celebritatem adipiſcitur. In praeſenti diſſertatione Ill. Auctor id potiſſimum operam dat, vt caſus examinet, quibus expreſſiones fractionales infinitae formula finita definiri queant ſiue algebraica ſiue tranſcendentali. Expreſſionis in hoc genere ſimpliciſſimae $\frac{1}{m + \frac{1}{m + \text{etc.}}}$ valorem acuto ratiocinio ex ipſa *conuergentiae* mole deducit; ſi enim ſupponamus, iſtam expreſſionem

continuo magis magisque ad certum et determinatum aliquem valorem, qui ſit $= S$, conuergere; poſt numerum infinitum concatenatarum eiusmodi fractionum, valor expreſſionis non variabitur, etiamſi a fronte ſuperaddatur noua fractio $\frac{1}{m}$; ita, vt iam tota ſeries ſit $\frac{1}{m+S}$; quamobrem ex praemiſſo ratiocinio erit $\frac{1}{m+S} = S$; adeoque quaeſitus expreſſionis valor $S = \frac{-m \mp \sqrt{(4+m^2)}}{2}$, deſignante m numerum quemcunque; ad quem valorem termini fractionis continuae eo conuergunt citius, quo maior valor numeri m fuerit aſſumtus. Veritatem huius formulae bina exempla pro m numero poſitiuo tam rationali, quam irrationali euoluta, abunde probant; aſſumto ſcilicet ſigno poſitiuo membri radicalis, vt ſit $S = \frac{-m + \sqrt{(4+m^2)}}{2}$. Si vero pro m numerum negatiuum $= -n$ aſſumere placeat; tum, ſtatuto membri radicalis altero ſigno, formula adhibenda erit $S = \frac{-m - \sqrt{(4+m^2)}}{2}$; adeoque $S = \frac{n - \sqrt{(4+n^2)}}{2}$. Adplicatio huius formulae ad caſum ſimpliciſſimum, $m = 0$, qui medium quaſi inter duos praecedentes tenet, binos pro S valores ſuppeditat, ſcilicet $S = 1$; et $S = -1$. Paradoxi huius euolutionem tradit Ill. Auctor, ex principiis ſuis in diſſertatione de ſeriebus ſinuum vel coſinuum angulorum arithmetice progredientium praecedentibus noſtris Commentariis inſerta explicatis. Praemiſſa ſolutio, quamuis et plana et elegans, hypotheſi tamen cuidam innititur; iſtas ſcilicet expreſſiones ad certum et determinatum aliquem valorem magis magisque conuergere; neque igitur in-

concuſſa ſtaret eius praeciſio, ſi forte iſtae expreſſiones ad terminos data lege pereodice recurrentes vtcunque inter ſe inaequales, conuergerent. Alia igitur et a priori plane diuerſa methodo idem argumentum pertractat Ill. Vir; ſcilicet fractiones continuas ſucceſſiue, a fractione vni-membri progrediendo ad bimembrem, trimembrem atque ita porro, in aequiualentes conuertit fractiones ſimplices, quarum tum iſtam detegit proprietatem, vt numeratores ſeriem recurrentem ſecundi ordinis conſtituere; denominatores vero lege plana et obuia progredi euincat; quo id eſt adeptus, vt pro qualicunque termino N fractionum iſtarum ſimplicium, qui fractionis continuae membrorum numerum N continentis valorem exprimit, formulam generalem aſſignare valeat, quae quidem ita deprehenditur expreſſa: Valor fractionis continuae ſupra memoratae N membra complexae

$$= \frac{2(m + \sqrt{[4 + m^2]})^N - 2(m - \sqrt{[4 + m^2]})^N}{(m + \sqrt{[4 + m^2]})^{N+1} - (m - \sqrt{[4 + m^2]})^{N+1}}.$$

Iam vero cum de fractionibus continuis in infinitum progredientibus quaeſtio ſit; id potiſſimum quaeritur, quisnam ſit huius expreſſionis valor, ſi fuerit $N = \infty$. Facile autem patet, fore tum,

1) *pro* m *numero poſitiuo*

$$S = \frac{2}{m + \sqrt{(4 + m^2)}} = \frac{-m + \sqrt{(4 + m^2)}}{2}$$

prorſus, vti priori methodo fuit inuentum.

2) Pro m *numero negatiuo*

$$S = \frac{2}{m - \sqrt{(4 + m^2)}} = \frac{-m - \sqrt{(4 + m^2)}}{2}$$

adeoque

adeoque ſi $m = -n$; habebitur $S = \frac{n - \sqrt{(4+n^2)}}{2}$ quae formula iterum cum ea, quam altera methodus ſuppeditauit, perfecte congruit.

At ſimpliciſſimum fuit fractionum continuarum genus, quod Ill. Auctor hic eſt contemplatus, in quo ſcilicet eadem prorſus fractio in quolibet termino recurrit; ſuccedit ſecunda harum fractionum ſpecies, vbi binae fractiones alterno ordine perpetuo recurrunt; veluti

$$\cfrac{n}{m + \cfrac{q}{p + \cfrac{n}{m + \text{etc.}}}}$$

cuius valor ita exprimitur

$$S = \frac{n - mp - q + \sqrt{(4mnp + [n - mp - q]^2)}}{2m}$$

quas vocat Ill. Auctor fractiones continuas ſecundi ordinis. Eadem methodus et pro altioribus ordinibus ſuccedit; et quotuscunque fuerit ordo fractionum continuarum; valor quaeſitus ſemper aequatione quadratica exprimi poterit; vnde iſta methodus pro fractionibus *periodicis* egregii vtique vſus eſt. Adplicuit eandem Ill. Auctor ad progreſſionem poſt periodicas ſimpliciſſimam, ponendo in ſingulis fractionibus vnitatem pro numeratore et numeros naturales pro denominatoribus ſe inuicem ſubſequentibus, veluti

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

huius-

huiusque ſeriei notabiles detexit proprietates, quarum ope valor quaeſitus commoda et celeri adproximatione poteſt definiri; attamen ad eum geometrica praeciſione determinandum, conceſſis praeſertim quadraturis vel ſignis ſummatoriis, noua requiri videntur calculi artificia.

II.

Diſquiſitiones vlteriores de indole fractionum continuarum.

Auct. Dan. Bernoulli pag. 24.

Qui ea, quae in praecedente Ill. Auctoris diſſertatione de eodem hoc argumento ſunt prolata, debite perpenderit, facile perſpiciet, fractionum continuarum theoriae ibi propoſitae inſigne allatum iri incrementum, ſi methodus in promtu foret, cuius ope fractiones ſimplices, fractionis continuae dato terminorum numero conſtantis valorem exprimentes, ſine operoſa earundem conuerſione analytico aliquo artificio aſſignari poſſent. Tradit igitur Ill. Auctor initio huius diſſertationis peropportunum compendium, quo omnis in continuandis fractionibus ſimplicibus labor inſigniter ſubleuatur, ita, vt currente veluti calamo noua quaeuis fractio ſimplex formari atque conſcribi poſſit, idque quacunque tandem lege, regulari ſiue pro arbitrio variata,

fractio continua progrediatur. Qua occaſione data, Ill. Auctor de famoſa fractione continua Brouncheriana, quae in infinitum producta exceſſum quadrati ſupra circulum ei inſcriptum, vnitate expreſſum, indicat, nouas adfert obſeruationes; et notae *correctioni Walliſianae* aliam ſubſtituit multo efficaciorem, qua ſcilicet efficitur, vt valores perſpicuis paſſibus ad veritatem accedant. Regula, quam Ill. Auctor proponit pro continuandis fractionibus iſtis, quas diximus, ſimplicibus generalis eſt pro omnibus qualibuscunque fractionibus continuis, ad indices arbitrarios conſtructis, iisque ſiue abruptis ſiue in infinitum continuatis. Caſus autem, vbi indices vel periodico recurrunt ordine, vel conſtanter iidem permanent, ſoli videntur, qui fractionem continuam infinitam reddant mutabilem in expreſſionem finitam; a quibus ſi diſceſſeris, non niſi adpropinquationes ad verum valorem obtinent; tumque de eo potiſſimum quaeſtio eſt, vbinam abrumpere operationem ſit conſultius et quaenam, ſi accuratiorem deſideres determinationem, adhibenda ſit correctio minori labore determinanda.

Sequentes Ill. Auctoris obſeruationes ad theoriam de fractionibus continuis ſub forma generaliſſima ſpectatam pertinent; et quanta in iis tractandis adhibenda ſit circumſpectio, notabilioribus exemplis comprobant; ita, v. c. ſingulares caſus ſunt, ſi inter membra fractionis continuae occurrat aliquod, cuius vel numerator vel denominator ſit $= 0$; vel

ſi

ſi membrum intermedium ſit negatiuum, veluti $-\frac{f}{g}$ vbi quidem ſollicite diſpiciendum, num iſta fractio ſit $\frac{-f}{+g}$ vel $\frac{+f}{-g}$; qui bini caſus, per ſe iidem, differunt tamen ob diuerſitatem, quam ſequentibus membris inducunt, ſi talis fractio negatiua ſit *intermedia*; quae ipſa quoque ratio eſt, cur indices $\frac{+a}{+b}$ et $\frac{-a}{-b}$ inter ſe differre ſint cenſendi, vnde vix ſatis praedicari poteſt neceſſitas, vt, qui proponit fractionem quandam continuam, non ſolum valorem indicum, ſed et formam eorum tam ratione terminorum, quam ſignorum, diſtincte exprimat, ex quo et id perſpicitur; eos, qui formas fractionales ſemper tales conſtituunt, vt ſinguli numeratores vnitate exprimantur, minimam huius argumenti particulam exhaurire; et facile in errores prolabi poſſe; quod Ill. Auctor exemplo comprobat.

Sub finem diſſertationis theoria hic propoſita comparatur cum Euleriana Tomo XI. horum Comment. tradita; et vſus fractionum continuarum in *euolutione radicum quadratarum* oſtenditur, vbi id imprimis peculiare habet Ill. Auctor, vt radices quadratas, v. c. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{61}$; etc. fractionibus continuis *inferiorum* ordinum veluti primi ordinis, vbi conſtanter indices permanent iidem, exprimere doceat.

III.

Solutio quorundam problematum Diophantaeorum.

Auctore L. Eulero pag. 48.

Analyſis ſublimior quantum methodo diophanteae, quantaque haec Ill. *Eulero* incrementa debeat, eos haud latent, qui hoc ſpeculationum genus non aduerſantur. Tria potiſſimum in praeſenti diſſertatione ſoluta traduntur problemata Diophantaea, quae ita denunciari poſſunt: Inuenire duo quadratorum paria xx, yy et tt, uu,

$$\text{vt fiat} \left\{ \begin{array}{ll} 1) & (xx+yy)(ttxx+uuyy) \\ & (xx+yy)(uuxx+ttyy) \\ 2) & (ttxx+uuyy)(uuxx+ttyy) \\ 3) & ttxx+uuyy \text{ et} \\ & uuxx+ttyy \end{array} \right\} \text{quadratum}$$

Quod ad prius horum problematum attinet, id ita reſtringitur, vt tam x et y quam t et u ſint numeri primi inter ſe; quoniam, quicunque bini numeri pro iis fuerint inuenti, eorum aeque multipla, veluti αx, αy et βt, βu quaeſito, vti ſtatim patet, aeque ſatisfaciunt.

Quod ſi iam formula prior

$$(xx+yy)(ttxx+uuyy)$$

quadrato

$$(xx+yy)^2 xxyy(pp+qq)^2$$

aeque-

aequetur, inde ſtatim binae litterae t et u ſequenti modo expreſſae prodeunt:

$$t = xy(pp - qq) + 2pqyy \text{ et}$$
$$u = xy(pp - qq) - 2pqxx$$

ex quibus pro altera formula fit

$$ty = xyy(pp - qq) + 2pqy^3 \text{ et}$$
$$ux = xxy(pp - qq) - 2pqx^3.$$

Cum igitur productum

$$(xx + yy)(ttyy + uuxx)$$

quadratum fieri debeat, omnibus debite in vſum vocatis ſequens prodit expreſſio ad quadratum reducenda:

$$4ppqqx^4 - 4pq(pp-qq)x^3y + (p^4 - 6ppqq + q^4)xxyy + 4pq(pp-qq)xy^3 + 4ppqqy^4;$$

vbi quidem Ill. Auctor caſum ſe quaſi ſponte offerentem $x = y$ excludendum iudicauit, quia formula quadratum efficienda hoc caſu foret $2(tt + uu)$, quod nulla plane difficultate laboraret. At ſi formula illa huic quadrato:

$$(2pqxx - (pp - qq)xy + 2pqyy)^2$$

aequetur, inde ſequens colligitur ſolutio problematis (vbi ſcilicet numeri t et u ad minimos terminos ſunt reducti)

$$x = 2(pp - qq);\quad t = 3(p^4 + ppqq + q^4)$$
$$y = 3pq;\quad u = (pp - qq^2).$$

 Huic

Huic vero ſolutioni Vir Ill. alias adhuc pariter infinite patentes adiecit; veluti

$$x = p(p+2q);\ t = p(q+2p)(pp+2pq+3qq)$$
$$y = q(q+2p);\ u = q(p+2q)(qq+2pq+3pp)$$

et

$$x = p(p-2q);\ t = p(2p-q)(pp-2pq+3qq)$$
$$y = q(2p-q);\ u = q(p-2q)(qq-2pq+3pp)$$

quae vero ſolutio, cum a praecedente non diſcrepet, Ill. Auctor ex duabus prioribus ſolutiones particulares, quomodo facili negotio deducendae ſint, breviter oſtendit, pluresque ſimpliciores ſubiungit.

En ergo ſpecimen methodi, qua Ill. *Eulerus* vſus eſt, ad ſolutionem problematum ſupra denunciatorum perueniendi; eandem enim ſolutionem ſortiuntur problemata ſequentia, ita vt non opus ſit recenſioni huius diſſertationis diutius immorari. Tantum enim circa problema ſecundum obſeruandum erit, quod infinitas ſolutiones admittere videatur, quae praecedenti non conueniant; quia formula

$$(ttxx+uuyy)(uuxx+ttyy)$$

quadratum fiere poteſt, etiamſi neutra praecedentium fuerit quadratum, ad cuius rei confirmationem Cel. Auctor hoc adfert exemplum:

$$x = 973;\ y = 263;\ t = 973;\ u = 1841.$$

Solutio autem huius problematis latius patens ita ſe habet:

$$x = 3n^4 + 6mmnn - m^4;\ t = mx$$
$$y = 3m^4 + 6mmnn - n^4;\ u = ny.$$

IV.

IV.

Speculationes Analyticae.

Auctore L. Eulero pag. 59.

Speculationes analyticae ab Ill. *Eulero* hic traditae ſuper formula integrali $\int \frac{x^\alpha - x^\beta}{l\,x}\,d\,x$ verſantur. Cum enim eius valorem, ſi a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendatur, inueniſſet $= l\frac{\alpha+1}{\beta+1}$, haec integratio, quippe cuius veritatem per methodos conſuetas oſtendere hactenus non licuerat, haud parum attentionis mereri ipſi videbatur; quamobrem conſiderationes, quae ſuper hac formula Viro Ill. ſe ſe obtulerunt, hic exponuntur, variaque inde elegantiſſima deducuntur Theoremata, quorum praecipua hic ante oculos ponemus, lectorem vberioris inueſtigationis curioſum ad ipſam diſſertationem ablegentes.

Si formula $\int \frac{d\,x\,ſin.\,n\,l\,x}{l\,x}$ a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extendatur, eius valor integralis aequetur arcui circuli cuius tangens eſt n, cuius theorematis veritas ex conſideratione tam exponentium imaginariorum quam ſequentis ſeriei eſt petenda. Cum enim ſit

$$ſin.\,n\,l\,x = \frac{n\,l\,x}{1} - \frac{n^3(l\,x)^3}{1.\,2.\,3} + \frac{n^5(l\,x)^5}{1 \ldots 5} - \frac{n^7(l\,x)^7}{1 \ldots 7} + \text{etc.}$$

inde

inde ſtatim elicitur

$$\int \frac{dx \sin. n l x}{l x} = n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7} + \frac{n^9}{9} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma manifeſto eſt A tang. n, ita vt poſito $n = 1$ fiat $\int \frac{dx \sin. l x}{l x} = \frac{\pi}{4}$ denotante π ſemi-peripheriam circuli, cuius radius $= 1$.

Si formula $\int \frac{dx \sin. p l x \sin. q l x}{l x}$ a termino $x = 0$ ad terminum $x = 1$ extendatur, eius valor integralis deprehenditur eſſe $= \frac{1}{4} l \frac{1 + (p - q)^2}{1 + (p + q)^2}$, in quo igitur nullus arcus circularis occurrit, etiamſi in hoc theoremate praecedens contineri videatur. Manifeſtum autem eſt, ſin. $q l x$ ad vnitatem reduci non poſſe, niſi quantitas q variabilis accipiatur. Ex formula autem generali, quomodo huius Theorematis integrale deducendum ſit, inueſtigandum iudicauit Vir Ill. quem in finem hanc conſiderat formam:

$\int \frac{dx (x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma - x^\delta)}{l x}$, quam in has duas reſoluit

$\int \frac{dx (x^{\alpha+\gamma} - x^{\beta+\gamma})}{l x} - \int \frac{dx (x^{\alpha+\delta} - x^{\beta+\delta})}{l x}$, quarum vtraque cum formula generali initio memorata manifeſto conuenit; hinc autem labore haud operoſo ad formulas in theoremate expreſſas peruenitur.

Si formula $\int \frac{x^m dx \sin. n l x}{l x}$ a termino $x = 0$ ad terminum $x = 1$ extendatur, ea ſemper huic valori: A tang. $\frac{n}{m+1}$ aequetur. Hic obſeruandum eſt, hoc theorema ad primum reduci, poſito $m = 1$; tum

tum vero quoties $\frac{n}{m+1}$ eundem induit valorem, totius etiam formae integrales inter ſe aequales euadent.

Formula $\int \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x^n} \cdot \frac{dx}{x\,l\,x} \left[\begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{array} \right]$ ſemper aequetur huic formulae:

$$l\,\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta + n}{\alpha + n} \cdot \frac{\alpha + 2n}{\beta + 2n} \cdot \frac{\beta + 3n}{\alpha + 3n} \text{ etc.}$$

cuius producti valor per ea quae Vir Ill. in Miſcelleneor. Berolin. Tomo VII. pag. 114 circa huiusmodi productum

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c+b}{c+a} \cdot \frac{a+k}{b+k} \cdot \frac{c+b+k}{c+a+k} \cdot \frac{a+2k}{b+2k} \cdot \frac{c+b+2k}{c+a+2k} \text{ etc.}$$

docuerat, deprehenditur

$$= \frac{\int z^{n-1}\,dz\,(1 - z^{2n})^{\frac{\beta - 2n}{2n}}}{\int z^{n-1}\,dz\,(1 - z^{2n})^{\frac{\alpha - 2n}{2n}}}.$$

Denotante i numerum infinitum formula

$\int \frac{z^{\alpha i} - z^{\beta i}}{z - 1} \cdot \frac{dz}{z} \left[\begin{array}{l} \text{a } z = 0 \\ \text{ad } z = 1 \end{array} \right]$ ſemper eſt $= l\,\frac{\alpha}{\beta}$.

Denotantibus litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. huiusmodi productis

$$\mathfrak{A} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon) \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon) \text{ etc.}$$

etc.

 littera

littera vero N ſit $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots (n-2)$, ſemper erit

$$\int \frac{dx}{x(lx)^{n-1}} \left(\frac{x^\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{x^\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{x^\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{x^\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} \right) \left[\begin{matrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{matrix} \right] =$$

$$\frac{\alpha^{n-2}\, l\alpha}{N\,\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-2}\, l\beta}{N\,\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^{n-2}\, l\gamma}{N\,\mathfrak{C}} + \frac{\delta^{n-2}\, l\delta}{N\,\mathfrak{D}} + \text{etc.}$$

V.

De Reſolutione Polygonorum rectilineorum, Diſſertatio ſecunda.

Auctore A. I. Lexell pag. 80.

Cum in priori de hoc argumento Diſſertatione, Clar. Auctor modum expoſuiſſet, quo ad aequationes peruenire licet quibus reſolutio vniuscunque figurae rectilineae abſoluitur, quatenus nimirum ratio tantum habetur laterum et angulorum ipſius ambitum conſtituentium; nunc id ipſi propoſitum eſt, vt quibusdam ſpeciminibus doceat, quomodo iſtiusmodi aequationes tractari debeant, vt aptas et commodas ſuppeditent ſolutiones. Hunc in finem quatuordecim Problemata, quae pro reſolutione quadrilaterorum locum habent, ex aequationibus ſuppeditatis reſoluenda ſibi propoſuit. Etiamſi vero ſolutiones nonnullorum ex his Problematibus tam faciles ſint, vt vnicuique pateſcant; tamen aliae earum quasdam aequationum transformationes requirunt, vt in Praxi faciles et commodae euadant. Sic ſi

ſi propoſita fuerit iſta quaeſtio, vt ex datis tribus quadrilateri lateribus et duobus angulis, qui bina horum laterum interiacent, quaeratur reliquum latus; tum facile quidem inuenitur aequatio valorem huius lateris, per data latera et angulos datos exprimens, verum quum illa expreſſio ex nimis maguo terminorum numero ſit compoſita, in eo elaborandum fuit, vt noua quadam quantitate introducta, ſolutio ad concinniorem formam reduceretur.

Notum eſt in reſolutione triangulorum, ſolutiones nonnunquam inde fieri elegantiores, quod plures partes incognitae trianguli ſimul quaerantur; ſic pro quadrilateribus quoque nonnunquam praeſtat ex iisdem datis, plures partes quadrilateri incognitas ſimul quaerere, quam vnamquamque ſeorſim inueſtigare; ita ſi data fuerint tria latera quadrilateri, cum angulis inter bina interiacentibus, bini reliqui anguli eadem opera inueſtigari poſſunt, quaerendo expreſſionem pro eorum differentia, quippe quum eorum ſumma iam per datos angulus determinetur. Operae igitur pretium quoque eſſe duxit Cl. Auctor Problemata ex hoc genere oriunda euoluere et explicare.

Tum vero vt ea illuſtrarentur quae in priori Diſſertatione docuerat de reſolutione Polygonorum, quatenus reſpectus quoque habetur ad diagonales vel angulos laterum cum diagonalibus, pro quadrilatero tradendam cenſuit enumerationem earum ſolutionum, quae locum habent, dum diagonalis quaedam quadrilateri, vel anguli diagonalis cum lateri-

bus conſiderantur. At tamen fatendum eſt hanc enumerationem exigui eſſe vſus, quum ad completam cognitionem ſolutionum, quae pro quadrilatero locum habere poſſunt requiratur, vt ſine diſcrimine reſpectus habeatur, ad omnes rectas, quibus quatuor puncta in eodem plano ſita inter ſe iungi poſſunt et angulos has rectas interiacentes. Si autem quis huiusmodi enumerationem inire velit, neceſſum eſt, vt quinque omnino ſolutionum claſſes conſtituat, prouti nimirum, eas ſolutiones ſex, quinque, quatuor, tres vel duo ingrediuntur lineae.

Denique vt adhuc eo clarius pateſceret, qua ratione aequationes pro reſolutione Polygonorum ad vſum accommodari poſſint, ſub finem huius Diſſertationis Auctor noſter difficiliora problemata pro reſolutione Polygoni quinque laterum ſibi ſoluenda propoſuit; quorum indole probe perſpecta, facillimum erit pro reſolutione Polygonorum altiorum ordinum, ſimiles transformationes inuenire.

VI.

Obſeruationes circa nouum et ſingulare ſerierum genus.

Auctore L. Eulero pag. 123.

Inter res, quae prima fronte attentione noſtra haud dignae videantur, obſeruari ſaepe numero quaedam, quae attentius perpenſae ad profundas ſpeculationes

tiones perducant, nullus eorum, qui ſubmilioribus praecipue Analyſeos ſtudiis incumbunt, inficiabitur, cum plurimis exemplis et adeo hac diſſertatione confirmari poſſit. Contemplatio enim illius notiſſimae quaeſtionis, qua quindecim Chriſtiani totidemque Iudaei ita ordine ſunt collocandi, vt ſi, numerandi initio in loco quocunque conſtituto, nonusquisque in mare ſit eiiciendus, hoc ſupplicium in ſolos Iudaeos ſit caſurum, Ill. *Eulero* anſam praebuit, hoc ſingulare progreſſionum genus inueſtigandi. Etiamſi enim haec quaeſtio in ſe ſpectata haud difficulter reſoluatur: tamen, ſi in genere de hominum numero indeterminato, ex quibus ſecundum quemlibet ordinem et numerum quotusquisque ſit eiiciendus, ſuſcipiatur, mox intelligetur, quaeſtionem inter difficilimas eſſe referendam, cum non detur methodus hoc in genere praeſtandi. Quin etiam eiusdem generis quaeſtionem, ſi ex plurium ſontium numero, is ſolus poenam ſit ſubiturus, qui, poſtquam nonus vel alius quotus quisque ex ordine fuerit eiectus, tandem ſolus ſit remanſurus, attentione maxime dignam cenſet Vir Ill. vbi ſcilicet locum noſſe opportet, in quo numeratio terminatur. Ad omnia haec vberius explicanda, conſideratur caſus, quo ex ſerie 30 notarum nonaquaeque deletur; at numeratione actu inſtituta indicibusque eiectorum ordine diſpoſitis prodit ſeries, quam hic cum indicibus notarum ſubſcriptis aſpectui exponemus

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23, 11, 29, 17, 10, 2, 28, 25, 1, 4, 15, 13, 14, 3, 20, 21

in qua igitur poſtrema ſerie, quae hic *ſeries eiectionis* vocatur , nullus plane ordo pateſcit.

Cum autem haec ſeries duabus rebus determinetur, quarum altera a numero notarum, altera vero a numeratore pendeat, tota quaeſtio in genere eo reducitur, vt propoſito notarum numero vna cum numeratore ipſa ſeries eiectionis inueniatur; cuius autem ſolutio, cum in genere expectari nequeat, Ill. diſſertationis Auctori plures caſus particulares percurrere viſum eſt, ſpe freto, fore, vt inde lex quaepiam detegatur, cuius ope negotium confici poſſit; quem in finem ſeries eiectionis pro diuerſis numeratoribus in talibus ſchematibus expoſuit, quale hic pro numeratore 3 perſpicuitatis gratia apponemus

Numerus notarum	Series eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5. 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
etc.	etc.

vbi

vbi quidem ſecundum lineas verticales et horizontales ordo valde eſt abſtruſus; verum in vltimis terminis progreſſio arithmetica ternario creſcens occurrit, cuius termini numerum notarum ſuperantes infra eum ſunt depreſſi, eademque lege progrediuntur penultimi, ante penultimi, etc. Simili etiam modo pro numeratore 2 rectae obliquae, ei quae per terminos vltimos tranſit parallelae, per progreſſiones arithmeticas binario creſcentes; pro numeratore 4, per progreſſiones quaternario creſcentes, et ita porro, progrediuntur, ita vt ope huius legis variis a Viro Ill. exemplis confirmatae pro quouis numeratore et notarum numero nota vltimo eiicienda facili negotio aſſignari poſſit. Et quidem in genere ſi ſtatuatur numerator $=n$, pro notarum vero numero ν ſit vltima eiicienda $=z$, tum pro numero notarum $\nu+1$ vltima eiicienda erit $z+n$, dum modo non ſit $z+n>\nu+1$; ſi enim hoc eueniret, vltima foret vel $z+n-(\nu+1)$, vel $z+n-2(\nu+1)$, vel in genere, diuidendo $z+n$ per $\nu+1$, reſiduum ex diuiſione natum praebebit indicem notae vltimo eiiciendae. Quae regula maxime notatu digna merito ab Ill. Auctore tanquam inſigne Theorema ſpectatur, cuius demonſtrationem etiam hic elegantiſſime adumbrat.

Quaecunque autem ſit ſimplicitas huius legis pro notis vltimo eiiciendis, Viro Ill. tamen non licuit earum ſeriem in genere exhibere, cuius rei ratio manifeſto in eo eſt ſita, quod terminorum reductio

ductio pro quouis numeratore perpetuo ad alios numeros ſit inſtituenda, neque vllus terminus ex praecedente abſolute determinari poſſit, etiamſi pro caſibus ſpecialibus ad terminos valde remotos per ſaltus progredi liceat, ita vt non opus ſit intermedios euolviſſe; cuius rei hic exemplum pro numeratore 9 traditur, in quo ſeries vltra ter mille terminos continuata eſt.

VII.

Meditationes circa ſingulare ſerierum genus.

Auctore L. Eulero pag. 140.

Refert hic Vir Ill. ſe in commercio litterario, quod olim cum Celeb. *Goldbachio* coluerat circa ſeries in forma hac generali:

$$1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\text{etc.}$$

contentas verſatum fuiſſe, cuiusmodi ſeries, etiamſi raro occurrere ſoleant, parumque vtilitatis polliceantur, ideo Ill. diſſertationis Auctori omnem attentionem mereri videntur, quod methodi earum ſummas inueſtigandi aliquando Analyſi inſignem vſum afferre poſſunt. Tres autem potiſſimum dantur methodi diuerſae ad huiusmodi ſeries perueniendi, quarum quaeque hic ſeorſim a Viro Ill. explicatur. Hac

Hac autem methodi, vtut meris conſiderationibus artificiisque analyticis inſiſtentes, vberiorem in hac epitome explicationem non admittunt; vnde lectores rei analyticae periti ad ipſam diſſertationem, vbi latiſſimus campus et fons ad modum foecundus aperitur, peculiare ſerierum genus complectens, ſunt ablegandi.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Formulae generales, pro translatione quacunque corporum rigidorum.

Auctore L. Eulero pag. 189.

Cum Ill. *Eulerus* in praeclaro ſuo opere, Theoria motuum corporum rigidorum, duplicem huius argumenti inueſtigationem, geometricam ſcilicet et mechanicam, ſimul aggreſſus eſſet, quo tota tractatio valde intricata reddebatur; hoc loco ſolam partem geometricam, vbi ſola translatio corporum, ſine vllo reſpectu ad motus principia, per meras formulas analyticas repraeſentatur, ſibi pertractandam propoſuit; quia hoc modo ipſa motus determinatio ex principiis mechanicis multo facilius expediri poteſt, quam ſi vtraque inueſtigatio coniunctim ſuſcipiatur. Primo igitur ſitus corporis rigidi initialis definitur, quem in finem Ill. Auctor poſitionem ſingulorum punctorum per ternas coordinatas inter ſe normales repraeſentat, ideoque tres axes fixos ſe inuicem normaliter ſecantes conſtituit, quorum bini in eodem plano ſunt ſiti, quo tertius normaliter inſiſtit; tum igitur, conſiderato puncto corporis quocunque, ſi ex eo ad planum demittatur perpendiculum et ad axes ex puncto in plano normales

males, manifeſtum eſt poſitionem ſingulorum corporis punctorum commodiſſime per ternas coordinatas determinari. Totam autem iſtam repraeſentationem ad inueſtigationem mechanicam magis adaptari obſeruat Vir Ill. ſi punctum illud, in quo axes fixi initio conſtituti ſe inuicem normaliter interſecant, in ipſo corporis rigidi centro grauitatis accipiantur; tum vero ſi terni illi axes in ipſis axibus corporis principalibus conſtituantur. Quibus in limine notatis Ill. Auctor ipſam inueſtigationem argumenti propoſiti aggreditur; factaque iam translatione corporis quacunque locum conſiderat, in quem punctum illud interſectionis fuerit translatum, vocatisque pro eo coordinatis f, g, h, ſi pro alio puncto quocunque coordinatae in ſtatu initiali fuerint p, q, r in ſitu translato vero x, y, z, quia diſtantia horum duorum punctorum eadem eſſe debet tam ante quam poſt translationem, ad iſtam peruenitur aequationem:

$$pp + qq + rr = (x - f)^2 + (x - g)^2 + (x - h)^2,$$

tum vero quia diſtantia inter bina corporis puncta quaecunque in ſitu translato eadem eſſe debet, quae fuerat in ſtatu initiali, ex his conditionibus deducuntur valores coordinatarum x, y, z, quos induunt caſibus, vbi trium quantitatum p, q, r duae euaneſcentes ſtatuuntur; ita vt hinc pateat, quomodo eae a ſingulis his quantitatibus pendeant. Quibus expeditis omnes hae litterae ſimul in computum ducuntur, tandemque omnes translationes, quibus ſitus

corporis rigidi mutari poteſt, per ſex elementa determinantur.

Deinde cum notum ſit, in translatione infinite parua ſemper dari quandam lineam rectam, cuius ſitus parallelus ſit ei, quem eadem recta in ſtatu initiali habuit, Ill. Auctor explorat, vtrum in translatione finita etiam detur talis recta, quae in vtroque ſtatu eandem directionem ſeruet, quaeque euidenter axem, circa quem corpus gyratur repraeſentat. Cum autem haec inueſtigatio, ad aequationem perducat, de qua non pateat, quomodo ad nihilum ſit reducenda, deſerit eam Vir Ill. aliam viam ingrediens, cuius ope facile demonſtratur, quomodocunque corpus rigidum ex vno ſitu in alium transferatur, ſemper dari eiusmodi rectam, cuius directio nullam mutationem patiatur; etiamſi haec veritas ratione formularum analyticarum pro maxime abſcondita ſit habenda. Concepta igitur Sphaera corpori rigido circumſcripta, cum ipſo connexa ſimulque mobili, Ill. Auctor ſequens theorema demonſtrat: Quomodocunque Sphaera circa centrum ſuum conuertatur, ſemper aſſignari poteſt diameter, cuius directio in ſitu translato conveniat cum ſitu initiali.

II.

II.

Noua methodus motum corporum rigidorum determinandi.

Auctore L. Eulero pag. 208.

Cohaeret praeſentis diſſertationis argumentum cum eo, quod in priori pertractauerat Vir Ill. totaque eius inueſtigatio demonſtrationi theorematis in fine annexi accepta eſt referenda. In Theoria quidem motuum corporum rigidorum Celeb. Auctor omnia huc pertinentia feliciſſimo ſucceſſu pertractaverat; interim tamen ſolutiones ibi traditas nimis intricatas et applicationes moleſtiſſimas eſſe ingenue fatetur. Determinato enim motu centri grauitatis, ad quoduis tempus tam poſitionem axis gyrationis et axium principalium quam celeritatem determinari oportebat; ad quod introductio plurium quantitatum variabilium poſtulabatur. Haec autem incommoda euitantur, ſi inſignis illa proprietas axis gyrationis in vtroque ſtatu inuariati in ſubſidium vocatur; quo facto omnia, quae ad determinationem motus huiusmodi corporum pertinent, ſine tot quantitatibus variabilibus facili negotio abſoluuntur. Determinato enim motu centri grauitatis in ſtatu initiali, ille quaeritur axis, qui in ſtatu translato eandem habet directionem; tum vero definito angulo, quo corpus circa hunc axem fuerit conuerſum, ad quoduis tempus ſitus corporis accurate innoteſcit.

Conſiderat igitur Vir Ill. corpus in ſtatu initiali, in eoque pro lubitu accipit punctum quodcunque, per quod tres axes fixi inter ſe normales ducuntur, quorum reſpectu ſitus ſingulorum corporis punctorum per ternas coordinatas definitur; tum vero ex eodem puncto tanquam centro ſphaeram concipit circumſcriptam, ipſo cum corpore cohaerentem ſimulque mobilem, quo omnes inueſtigationes ad doctrinam ſphaericam, in ſubſidium calculi hoc modo facilius reddendi, reuocari queant. Etiamſi autem tam in priori diſſertatione quam in ipſo tractatu de motu corporum rigidorum tam punctum illud in centro grauitatis quam terni axes fixi in ipſis axibus corporis principalibus conſtituti fuiſſent: tamen hic nihil referre obſeruatur, ſi omnia in alio loco quocunque pro arbitrio accipiantur. His praemiſſis ex trigonometria ſphaerica ſtatus corporis initialis definitur; tum vero ex conſideratione eiusmodi radii, cuius directio in vtroque ſtatu eadem eſt, determinatur ſtatus corporis, in quo elapſo tempore t reperitur, vnde diuerſae prodeunt expreſſiones, ex quibus deinceps formulae generales pro translatione quacunque formantur. Quibus expoſitis Ill. Auctor nonnullos ſitus principales puncti cuiusdam conſiderat, ex qua conſideratione nouem oriuntur expreſſiones ſpeciales translationem huius puncti determinantes; quae ideo omni attentione ſunt dignae, quod ex iis formulae generales pro translatione quacunque nitidiſſime componuntur; quae inſignis proprietas in theoremate peculiari generaliſſimo

mo complectitur, cuius veritas ex ipſis calculis antecedentibus pateſcit. Hoc theorema ſubſequitur applicatio formularum pro translatione inuentarum ad coordinatas orthogonales, quae ſi pro ſtatu initiali puncti cuiuspiam fuerint X, Y, Z, pro ſtatu vero mutato eiusdem puncti ſtatuantur x, y, z, exiſtentibus coordinatis pro puncto illo in centro corporis conſtituti f, g, h, adhibitisque formulis traditis nanciſcuntur pro x, y, z valores, qui, quia nimis ſunt intricati ita abbreuiantur, vt ſit

$$x = f + F X + F' Y + F'' Z$$
$$y = g + G X + G' Y + G'' Z$$
$$z = h + H X + H' Y + H'' Z$$

vbi coefficientes F, G, H etc. ab angulo conuerſionis aliisque arcubus per ſphaerica ingreſſis pendent, et ita comparati ſunt, vt ſit

$$F F + G G + H H = 1 \qquad F F' + G G' + H H' = 0$$
$$F' F' + G' G' + H' H' = 1 \quad \text{et} \quad F' F'' + G' G'' + H' H'' = 0$$
$$F'' F'' + G'' G'' + H'' H'' = 1 \qquad F F'' + G G'' + H H'' = 0$$

Quo autem formulae generales pro motu corporum rigidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum tradantur, Vir Ill. corpus quodcunque rigidum conſiderat, cuius ſingulorum elementorum loca pro ſtatu initiali per ternas coordinatas X, Y, Z determinentur; et denotante M maſſam totius corporis, eius elementum quodcunque charactere dM deſignatur, cuius elementi locus deinceps facta translatione poſt temporis interuallum t per ternas coordinatas

dinatas x, y, z definitur, quas igitur vt functiones temporis ſpectari oportet, dum priores X, Y, Z tantum ad ſtatum initialem referuntur. Quo igitur ex priorum huius duplicis generis quantitatum variabilitate tam motus elementi dM, quam eius acceleratio determinari queat, Ill. Auctor motum ſecundum ternas directiones fixas ſe inuicem normaliter decuſſentes reſoluit, vnde tam ternae elementi celeritates quam accelerationes ſecundum easdem directiones definiuntur. Porro omnes vires, quibus corpus hoc tempore ſollicitatur etiam ſecundum ternas illas directiones reſoluendo, ſi ex omnibus coniunctis vires oriantur P, Q, R, quia iſtae vires ſummis omnium virium acceleratricium aequari debent, inde tres naſcuntur aequationes integrales, in quibus tempus t vt conſtans ſpectatur, etiamſi in formulis differentialibus pro celeritatibus et accelerationibus id ſolum pro variabili ſit habitum. Deinde cum omnia virium acceleratricium momenta reſpectu ternorum axium ſimul ſumta aequalia reddi debeant momentis ex viribus ſollicitantibus reſpectu axium deductis, inde iterum tres aequationes oriuntur, in quibus ſolae quantitates X, Y, Z ſunt variabiles. Formulae autem integrales in hiſce ſex aequationibus occurrentes, quae tantum ad ſtatum corporis initialem referuntur per totam corporis maſſam ſunt extendendae, vnde certae conſtantes a figura et indole corporis pendentes in calculum ingrediuntur, quibus introductis nullae aliae variabiles adſunt, niſi quae a tempore t pendeant. Cum autem facta ſubſtitutione

ſtitutione formulae admodum prolixae prodierint, eas concinniores reddere Ill. Auctori viſum eſt, quod fit, ternis axibus in ipſis axibus corporis principalibus conſtituendo, punctoque illo pro lubitu aſſumto in ipſo centro inertiae collocando; quo facto quidem formulae minus perplexae oriuntur, ex quibus tamen in genere pro viribus ſollicitantibus plus concludere non licet.

Accedit denique applicatio formularum ad caſum, quo corpus nullis plane viribus ſollicitatur, vbi ſolutio ad tres aequationes differentiales primi gradus reducitur. Verum cum in iis quatuor variabiles nimis inter ſe ſint permixtae, quam vt quidquam generaliter inde concludi poſſit, caſus ſpecialior conſideratur, quo corpus circa axem fixum gyratur, quo motu corpus gyrari poteſt, ſi axis gyrationis in aliquem axem principalem incidat; quo ergo caſu angulus conuerſionis tempori fit proportionalis, vti per ſe eſt manifeſtum. Verum etiam in hoc caſu ſimpliciſſimo plures difficultates moram faceſſunt, ita vt in genere euolutionem multo minus tentare liceat, etiamſi nullum ſit dubium, quin etiam in genere ſuccedere debeat. Hoc igitur argumentum, attentione Geometrarum digniſſimum, quod forſan certis artificiis analyticis adhuc latentibus aliquando feliciter abſoluere licet, aliis Ill. *Eulerus* relinquit maximeque commendat.

III.

Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum.

Auctore A. I. Lexell pag. 239.

Cum Illuſtr. *Eulerus* in binis Diſſertationibus modo commemoratis doctrinam de translatione corporum rigidorum expoſuiſſet, inter alia hanc inſignem detexit proprietatem, quod pro quacunque translatione corporis rigidi, ſit linea quaedam recta, quae ſitum teneat parallelum ei, quem ab initio motus habuit; ſimulque animaduertit, vt hoc locum habeat expreſſionem quandam Analyticam nihilo aequari debere. Quamuis igitur nullum ſupereſſet dubium, quin iſta expreſſio reuera nihilo ſit aequalis, quippe quum facillima demonſtratione euinci poſſit, in omni motu corporis gyratorio, dari rectam, quae prorſus eundem ſitum teneat, ac in ſtatu initiali; tamen id adhuc deſiderabatur, vt indepedenter ab hac proprietate demonſtrari poſſet, iſtam expreſſionem Analyticam euaneſcere; quum igitur Auctor huius Diſſertationis eiusmodi demonſtrationem detexiſſet, eam heic exponendam cenſuit, adiectis tamen aliis de translatione corporum meditationibus, quae inſeruire poterunt ad ea, quae Illuſtr. *Eulerus* docuerat, confirmanda. Praemiſſo igitur primum Theoremate generali, quo ex datis translationibus, trium

trium punctorum ſphaerae quadrantibus inter ſe diſtantium, translatio alius cuiuscunque puncti in eadem ſuperficie, exprimi poſſit; oſtendit Auctor huius Diſſertationis quod ſi haec translatio euaneſcat, ſeu punctum iſtud eundem locum obtineat ac in ſtatu initiali, iſtam expreſſionem Analyticam Illuſtr. *Euleri* prodire, quae in omni translatione corporis, nihilo aequari debet. Ante quam vero Auctor noſter id demonſtrare ſuſcipiat, quod haec formula Analytica ſemper euaneſcere debeat, vtcunque corpus ſupponatur motum, primum oſtendendum ſibi propoſuit, quomodo formulae Theorematis iſtius generalis adplicandae ſint, ad quamcunque translationem puncti alicuius in corpore rigido exprimendam. Totum autem hoc negotium eo reducitur, vt duplex motus quo haec translatio abſoluitur, conſideretur; motus nimirum progreſſiuus quo ſingulae corporis particulae ſecundum directiones inuicem parallelas feruntur et motus gyratorius, quo corpus circa punctum quoddam fixum gyrari ſupponitur. Cognito igitur motu progreſſiuo, qui omnibus corporis particulis communis eſt, motus gyratorius per formulas ex Theoremate ſupra commemorato deducendas, facile exprimetur. His abſolutis Auctor huius Diſſertationis inſignem iſtam proprietatem ſibi demonſtrandam propoſuit, quod in omni conuerſione ſphaerae circa centrum, detur punctum in eius ſuperficie, quod poſt conuerſionem in eodem ſit ſitu, ac in ſtatu initiali erat. Tum vero oſtendit, quomodo inueniatur iſtud punctum ex datis translationibus

trium punctorum, quadrantibus inter ſe diſtantium. Praemiſſis itaque his meditationibus, Theorema iſtud cui praecipue heic intentus eſt, adgreditur; cuius quidem duplicem heic adfert demonſtrationem, priorem Geometricam, alteram Analyticam magis, quae tamen poſterior non prorſus rite ſibi conſtare poteſt, niſi ex contemplatione figurae nonnulla, quae in ipſa deſiderari poſſent, ſuppleantur. His vero demonſtrationibus nonnullas egregias proprietates, quae punctum iſtud ad ſitum initialem rediens reſpiciunt, explicandas cenſuit; tumque demum oſtendit quo modo ex data diſtantia huius puncti a tribus punctis Sphaerae, quadrantibus inter ſe diſtantibus, et angulo quo conuerſio ſphaerae facta eſt, per formulas ſatis concinnas exprimatur translatio cuiuscunque puncti in ſuperficie ſphaerae, quarum formularum ad translationem quamcunque corporum rigidorum facilis eſt applicatio.

IV.

Regula facilis, pro diiudicanda firmitate pontis aliusue corporis ſimilis, ex cognita firmitate moduli.

Auctore L. Eulero pag. 271.

In hac diſſertatione Ill. *Eulero* propoſitum eſt inveſtigare, quonam firmitatis gradu modulus pontis aliusue corporis ſimilis praeditus eſſe debeat, vt ipſe

ipſe pons ad ſimilitudinem moduli confectus ſatis roboris ſit habiturus, quam inueſtigationem hactenus, ni fallor, intactam maximi momenti eſſe minus aegre fateberis, cum plerique in conficiendis talibus machinis opinione ducti fuerint, pontem ad ſimilitudinem moduli exſtructum ſatis roboris eſſe habiturum, ſi modo modulus ſimile onus geſtare valeat, quale ipſe pons ſuſtinere debet, cui autem opinioni Ill. diſſertationis Auctor ſtatim in limine obſeruationem opponit, quod talis pons certe non ad quantumuis magnam diſtantiam extendi queat, quantumvis etiam roboris modulo conciliaueris, quocirca palam eſt, firmitatem pontis neutiquam a firmitate moduli ſecundum principium ſimilitudinis definiri poſſe.

Duplex autem virium genus, alterum fractionis alterum diuulſionis, hic accurate perpendendum eſſe iudicat Vir Ill. quorum prius potiſſimum locum habet, ſi trabes adhibeantur, quae fractioni reſiſtere debeant; poſterius vero genus locum habet, ſi funes adhibeantur, quorum tenacitate tota machina innitatur. Iam cum vis, quam funis ſuſtinere valet, a tenacitate filorum, ex quibus contortus eſt, pendeat, ſi ea in variis funibus eadem ſit, patet, firmitatem craſſitiei proportionalem eſſe debere. Dabitur ergo certa longitudo, quae in craſſitiem ducta pro menſura eius vis, quam funis ſuſtinere valet, haberi poteſt; quae longitudo ea erit, quam funis habere debet, vt, ſi verticaliter ſuſpendatur, a proprio ſuo pondere diſrumpatur. His obſeruatis

Ill. Auctor breuiter in cauſſam cohaeſionis corporum inquirit, quam in vi elaſtica Aetheris potius quam in preſſione Atmoſpherae quaerendam eſſe declarat, quia, ſi a ſolo pondere Atmoſphaerae penderet, de quo notum eſt, duo marmora vel alia corpora polita, inter quae nullus aer locum inueniat, ad ſe inuicem apprimi vi altitudini Barometri reſpondente, pro craſſitie $c\,c$ pondus columnae Mercurii cuius baſis $= c\,c$ et altitudo $= k$ cohaeſionem ſuperaret. Vnde ſi $n:1$ exprimat rationem grauitatis mercurii et materiae funis, foret Longitudo illa maxima $= n\,k = 28$ dig. cum tamen ſine dubio omnes fere funes maius pondus ſuſtinere valeant.

His autem circa iſtam longitudinem, de qua notionem abſolutam habuiſſe pro praeſenti inſtituto ſuperfluum foret, praemiſſis, Ill. Auctor ipſum argumentum propoſitum aggreditur; at conſideratis duobus funibus ex eadem materia confectis ſimilique modo tenſis, maior ad diſtantiam A, minor vero ad diſtantiam a, ſi V et v denotent vires, quas maior minorque funis ſuſtinere valeat, quin rumpatur, hae vires duabus partibus conſtare ſunt cenſendae, quarum altera continet pondus funis, altera vero onus, quod geſtare valet. Vnde ſi p fuerit pondus minoris funis et P pondus maioris; tum vero q et Q ſint onera, quae ſine ruptione geſtare valeant, erit $V = P + Q$ et $v = p + q$. Quod ſi igitur per experimenta fuerit exploratum, quantum onus q minor funis geſtare valeat quin rumpatur, inde

inde ſtatim onus a maiore ſuſtentatum Q definiri poterit, pro quo autem, ne in negatiuum abeat, requiritur vt ſit $q > \frac{A-a}{a} p$. Ex qua limitatione ſtatim patet, machinam ad ſimilitudinem moduli non ad quamuis magnitudinem augeri poſſe, quia maximam longitudinem $A = \frac{p+q}{p} a$ transgrediendo maior funis non ſolum nullum onus ſuſtentare valeret, ſed adeo proprio ſuo pondere diuelleretur.

Hoc caſu expedito Ill. Auctor in reſiſtentiam inquirit, quam trabes aliaue corpora rigida ruptioni opponunt, quo ſummo cum acumine peracto, ſi ſtabiliatur longitudo pontis $= A$, moduli $= a$, pondus moduli $= p$, pontis $= P$, q et Q vero deſignent onera a modulo et ponte ipſo ſuſtentanda, per principia iis ſimilia, quibus antea pro funibus vſus eſt, ad hanc perducitur aequationem valorem oneris Q exprimentem: $Q = nn(p + q - np)$, vbi $n : 1$ rationem dimenſionum pontis et moduli exprimit. Ex hac autem aequatione conſequitur conditio $q > (n - 1)p$, quem limitem onus a modulo geſtatum eo magis ſuperet neceſſe eſt, quo maiora ſunt onera, quibus ipſe pons ſuſtentandis par eſſe debet. Ceterum Ill. Auctor obſeruat, ſi pons ad perfectam ſimilitudinem exſtructus non ſatis roboris eſſet habiturus, huic defectui remedium afferri poſſe, dum craſſities trabium vltra rationem $1:n$ augeatur, quem in finem tabulam annectendam cenſuit, ex qua pateat, quoties haec ratio augeri debeat, vt ponti ſatis roboris concilietur.

Deni-

Denique quo pons impetuoſitati ventorum reſiſtere queat, tantum opus eſt, vt modulus ei reſiſtat, quandoquidem impulſio venti ſuperficiei in quam agit eſt proportionalis; quam rationem etiam firmitas ſequitur, qua machina vento reſiſtit. Si autem modulus vento non ſatis reſiſtat, huic defectui facile occurritur, dum latitudo trabium augetur.

V.

De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et vtriusque egregio conſenſu.

Auctore L. Eulero pag. 286.

Methodi diuerſae, quibus vtuntur Geometrae in reſoluendis praecipue quaeſtionibus mechanicis, ſaepenumero controuerſiis anſam praebuere, quae deinceps, rebus debita attentione perpenſis, ceſſante diuerſitate ceſſarunt. Hac eadem forſan ſorte obnoxia fuiſſet Theoria aequilibrii et motus corporum flexibilium, niſi diuerſae methodi, de quibus hic ſermo eſt, vni eodemque Auctori deberentur. Methodum ſcilicet vniuerſalem figuram inueniendi, quam filum ſiue perfecte flexile ſiue vtcunque elaſticum induere debet, vt in aequilibrio maneat,

neat, iam pridem tradiderat Ill. huius diſſertationis Auctor in Comment. prior. Tomo III, quae autem methodus doctrina momentorum innitebatur. Cum igitur deinceps in Comment. nouor. Tomo XV. idem argumentum alia methodo ex principio longiſſime diuerſo tenſionum, qua ſingula fili elementa afficiuntur, petita, pertractaſſet, ſolutio a priori tantopere diuerſa prodiit, vt prima fronte vel nullum vel leuem ſaltem conſenſum inter eas perſpicere licuerit. Ne igitur haec diuerſitas, quod ipſi Ill. Auctori accidit, lectori ſcrupulum moueat, in hac diſſertatione egregium conſenſum inter binas illas ſolutiones ab ipſo olim traditas ex diuerſiſſimis licet principiis petitas demonſtrare ſecum conſtituit.

Propoſita igitur figura fili cuiuscunque in ſtatu aequilibrii, ſi more ſolito ad axem fixum referatur, eiusque elemento duae vires applicatae concipiantur, verticalis ſcilicet et horizontalis; tum vero iis adiungantur vires finitae, quibus filum vel in altero vel in vtroque termino ſollicitatur, ſtatus quaeſtionis eo reducitur, vt figura determinetur, ad quam filum ſe componat, dum in aequilibrio conquieſcet; vbi perſpicuitatis gratia omnia in eodem plano ſita concipiuntur. Praemiſſo autem hoc quaeſtionis ſtatu Ill. Auctor vtramque ſolutionem tradit, quarum prior in eo conſiſtit, vt omnium virium elementarium, quae per totum arcum ſunt applicatae momenta inueniantur, quae in vnam ſummam collecta et elaſticitati aequata aequationem praebent figuram fili

ſili ſeu laminae elaſticae exhibentem. Altera vero ſolutio ex hac conſideratione eſt petita, quod, quia lamina elaſtica ob vires ipſi applicatas in ſtatu quodam violento tenetur, ſi portio eius quaedam reſecetur, altera portio ſubito aliam figuram ſit receptura. Inquirit enim Vir Ill. in eas vires, quae puncto illo reſectionis applicatae laminam reſectione facta in eodem ſtatu retinere valeant, ad quod neceſſario duas vires requiri declarat, alteram ſecundum tangentem trahens, alteram vero normalem cum vi elaſtica in aequilibrio verſantem. Quibus adhibitis quatuor nanciſcuntur aequationes iis quae in Tomo XV. Comment. extant ſimiles, a priore autem ſolutione prorſus diuerſae.

Quo igitur pulcherrimus binorum ſolutionum tantopere a ſe inuicem diuerſorum conſenſus nulli dubio relinquatur, Ill. Auctor eius demonſtrationem hic ſiſtit completam, ex qua luculenter pateſcit, priorem methodum cum poſteriore prorſus conuenire. Vbi autem probe obſeruandum eſt, ex priore methodo neque tenſionem neque vires normales ad curvaturam cuiusque elementi producendam requiſitas cognoſci, dum e contrario in poſteriore ſolutione non ſolum figura laminae exhibeatur, ſed etiam ſtatus violentus ſingulorum laminae elementorum declaretur. Hanc demonſtrationem ſubſequuntur quatuor elegantiſſima theoremata circa egregiam relationem inter vires elementares et tangentiales, quam poſterior methodus ſuppeditauerat; quibus adiecta eſt

denique

denique applicatio ad laminas elaſticas in ſtatu naturali iam incuruatas, ad quas Vir Ill. ea quae de ſtatu aequilibrii violento determinauerat transferenda iudicauit.

VI.

De preſſione funium tenſorum in corpora ſubiecta eorumque motu a frictione impedito; vbi praeſertim methodus traditur, motum corporum tam perfecte flexibilium, quam vtcunque elaſticorum non in eodem plano ſitorum determinandi.

Auctore L. Eulero pag. 304.

Per ea quae in praecedente diſſertatione circa Theoriam aequilibrii et motus corporum flexibilium ex principiis tam Staticae quam Mechanicae docuerat Vir Ill. lata nobis via aperta eſt ad ſolutiones omnium quaeſtionum, quae tam ſuper preſſione quam motu funium cylindro circumplicatorum proponi poſſunt, perueniendi. Paſſim quidem hoc argumentum iam a Geometris fuit pertractatum, verum ob methodos eorum minus directas ſimulque nimis reſtrictas et ſpeciales, ſolutionem directam magis latiusque patentem iure deſideras. Talem igitur hic ſiſtit Vir Ill.

Ill. ex theoria generali aequilibrii et motus corporum ſiue perfecte flexibilum ſiue vtcunque elaſticorum petitam; quam theoriam in praecedente Comment. Tomo pag. 350 Ill. Auctor, de motu turbinatorio chordarum muſicarum agens, expoſuerat, hic autem, ne opus ſit principia aliunde conquirere in limine breuiter repetit, deinde vires inueſtigat, quibus funis cylindro circumductus ſuperficiem ſubiectam in ſingulis punctis premit. Determinatis autem omnibus, quae locum habent, quando funis omni elaſticitate et grauitate eſt deſtitutus, Vir Ill. in motum funis ſuper cylindro fixo inquirit, quatenus ille a frictione impeditur, cuius effectus in eo conſiſtit, vt motus funis impediatur, etiamſi a viribus vtrinque inaequaliter tendentibus ſollicitetur. Cum autem hae inueſtigationes eius ſint naturae, vt ſine figuris calculisque analyticis recenſeri nequeant, Mathematum cultores, quorum animi ad hoc maximi momenti argumentum propendent, ad ipſum Auctorem ablegamus.

VII.

VII.

De preſſione funium tenſorum in corpora ſubiecta eorumque motu a frictione impedito. Diſſertatio altera.

Auctore L. Eulero pag. 327.

Hic Ill. *Eulerus* methodum tradit ſimpliciorem magisque directam hoc inſigne problema tractandi. Cum enim ſolutio in praecedente diſſertatione expoſita ex theoria vniuerſaliſſima motus corporum tam perfecte flexibilium quam vtcunque elaſticorum deducta ad formulas valde intricatas perduxiſſet, quae autem deinceps elegantiſſimam reductionem paſſae erant, ſtatim Viro Ill. viſum eſt, aliam dari viam magis naturalem magisque directam, cuius ope ſine tantis ambagibus ſcopum optatum attingere liceat. Quem in finem theoriam illam prius ad hanc quaeſtionem propius accommodandam quam ſolutionem inde deducendam eſſe iudicat. Conſtituto autem inde theoremate haud late patente, eoque ex ipſis aequilibrii principiis demonſtrato, quae antea demum poſt plures anfractus obtinebantur concluſiones, hic labore haud operoſo nanciſcuntur. Quin etiam hinc motus, quo funis ſuper cylindro protrahitur, ſi diſcrimen inter binas vires ei applicatas maior fuerit, quam vt aequilibrium conſiſtere poſſit, accuratius determinare licet, quam ante factum fuerat, dum

ſrictionem durante motu eandem manere aſſumebatur, quae pro aequilibrio erat inuenta. Conſultum enim ibi non videbatur ſolutionem directam ex principio generali deducere, quandoquidem iſta inueſtigatio in calculos maxime intricatos illexiſſet, dum hic theoremate illo ſtabilito ſolutio directa quaſi ſine labore elicitur, quae adeo facili negotio ad caſum transfertur, quo funis vnam pluresue integras reuolutiones circa cylindrum compleuerit. Ex omnibus his fit, vt praeſens methodus preſſionem funium determinandi concinnitate et elegantia ſua attentione Geometrarum maxime digna ſit cenſenda.

VIII.

De Viribus Remorum nouae ſpeciei, eorumque comparatione cum remis ordinariis.

Auctore W. L. Krafft pag. 343.

Remorum vſitatorum theoria, neutiquam ſane obuia, dudum Celeberrimorum Geometrarum *Bougeri* et *Euleri* profunda indagine eſt exculta. Inprimis autem vtiliſſimo huic argumento inſigne acceſſit incrementum, cum regia Acad. Scient. Pariſina ei, qui nauigia, praeſertim maiora, nullo ventorum auxilio, propellendi modum detegeret maxime commodum, publicum ad annum 1753 propoſuiſſet praemium. Palmam certaminis, grauiſſimo Academiae

miae iudicio, Ill. *Dan. Bernoulli* retulit, noua remorum ſpecie in medium prolata, quae remis vſitatis haud ſimplici titulo praeferenda videtur. Neque tamen inde ab illo tempore, egregium hoc inventum, plena optati ſucceſſus fiducia ab Illuſtri inuentore commendatum, ad examen aut vſum practicum conſtat eſſe reuocatum.

Motus igitur rei vtilitate, theoriam nouorum horum remorum plene euoluere effectusque inde ſperandos ex primis mechanicae et analyſeos principiis deducere conſtituit huius, quam tradimus, diſſertationis Auctor. Praemiſſa remorum horum diſtincta deſcriptione, vires inueſtigantur, quibus ab actione horum remorum nauis in curſu ſuo directo reuera propulſabitur; vnde principia mechanica duas ſuppeditant aequationes differentiales, ex quarum reſolutione, datis remigum numero et viribus vna cum celeritate manubrii, ſuperficie palmularum et reſiſtentia nauis abſoluta, ipſa nauis celeritas definitur.

Adplicat Auctor inuentas formulas ad caſum ab Ill. *Bernoullio* examinatum. Nauis ſcilicet primae claſſis commode quinquaginta eiusmodi remis inſtrui poteſt, quorum ſingulis decem remiges ſint adplicati et palmula annexa, cuius ſuperficies duodecim pedum quadratorum, quibus poſitis colligitur nauis celeritas $=$ 4, 83. ped. rhen. tempore vnius minuti ſecundi; prorſus, vti Ill. *Bernoulli* ex principiis plane diuerſis concluſit. Subiungit Auctor tabulam generalem, quae pro qualibet reſiſtentia nauis abſoluta et remigum numero velocitatem nauis

ope

ope nouorum horum remorum propulſae indicet, adiuncta velocitate ope remorum ordinariorum ipſi imprimenda. Ita v. c. ſi duae ſint naues primae claſſis, 600 remis vna Bernoullianis, altera ordinariis inſtructae, ſique his duabus nauibus propoſitum ſit ſpatium percurrendum vnius milliaris, prior hanc viam tempore $1^h. 20'$, altera autem tempore $2^h. 8'$ abſoluet.

Diſſertatione hac iam typis impreſſa, Auctor effectus horum remorum ipſis experimentis explorare eſt anniſus, cymba ordinaria duobus eiusmodi remis a ſe inſtructa inſtitutis, de quorum ſucceſſu alio tempore plura ſumus expoſituri.

PHYSICA.

PHYSICA.

I.

De Foramine ouali, eiusque vſu in dirigendo motu ſanguinis. Obſervationes nouae.

Auctore C. F. Wolff pag. 357.

Poſtquam, ſyſtematis vaſorum ſanguineorum et, quas modo detexerat *Fabricius ab* AQVAPENDENTE, valuularum in venis cognitione inſtructus, HARVAEVS circulationem ſanguinis ſtabiliuerat; in foetu, cui circulatio diuerſa eſt, magnus ille Vir cum GALENO ſtatuit, ſanguinem, a corporis extremis in venas cauas reditum, ex his porro colligi omnem in ſinu dextro cordis. Inde partem eius alteram in dextrum ventriculum, alteram vero eius partem per foramen ouale, quod inſculptum eſſet ſepto ſinuum, tranſire in ſinum ſiniſtrum; vnde in ventriculum ſiniſtrum et aortam vlterius pergeret, et per totum corpus, vnde venerat, denuo diſtribueretur, intactis pulmonibus.

Hanc ſententiam, vti vniuerſam in adulto circulationem, omnes, nemine excepto, facile adoptarunt; donec tandem *Celeberrimus* MERY, *Regiae Academiae Scientiarum Pariſinae Membrum*, Vir

ingenioſiſſimus, et qui multa pulcherrima ſcripſit, ſanguini in foetu iter praeſcriberet, Haruaeiano itineri e diametro oppoſitum; cum ſanguinem, non ex dextro in ſiniſtrum, ſed contra ex hoc in illum ſinum per foramen ouale tranſire doceret. Plurimum contra hanc opinionem, multum pro eadem a *Celeberrimis* Viris, eiusdem *Regiae Academiae* Membris, DVVERNEIO, ROVHAVTO, ipſoque *Venerabili* in anatomia WINSLOWO et aliis ſcriptum fuit. DVVERNEIVS, ſtrenuus anatomicus, contra MERYVM, ROVHAVTVS in cauſa principali pro eodem pugnauit. WINSLOWVS propriam ſententiam, qua aduerſarios conciliaret, propoſuit; docendo, ſanguinem ire promiſcue ex ſinu vtroque in ſinum vtrumque et commiſceri proprie tantummodo. Hae lites diu continuauerunt, et ſuo iam, quo ſcribebat, tempore *Illuſtris* WINSLOWVS, annos fere viginti illas protractas fuiſſe, quaerebatur. *Regia Academia* ipſa, iudicium ferendo, partes MERYI fouit. Denique omnes ſenſim anatomici et phyſiologi in antiquam GALENI et HARVAEI ſententiam redierunt, qua, etiam ad noſtrum tempus vsque, ſanguis ex ſinu dextro in ſiniſtrum tranſire creditur. (*)

Iam vero hoc, quod GALENVS deſcripſit, quod HARVAEVS adoptauit, verum iter ſanguinis eſſe

(*) Conferatur *Summi* in anatomia *Viri*, *Perilluſtris Liberi Baronis de* HALLER, Elementor. Phyſiol. Tomus VIII.

eſſe non poſſe, vti non magis illud, quod Meryvs, et illud, quod Winslowvs propoſuit, et ſanguinem omnino neque ex dextro in ſiniſtrum, neque ex ſiniſtro in dextrum ſinum per foramen ouale ire poſſe, id vel ſola cognoſcas demonſtratione §phi 37 huius diſſertationis, quam, cum breuis aeque ac plana ſit, non dubitamus hic repetere. " Motus ſinuum cordis ſynchronus eſt, et, dum vnus ſyſtolen agit, etiam alter eandem exercet, dumque vnus in diaſtole eſt, etiam alter in eadem verſatur. Quo ergo tempore vis, ſanguinem ex vno in alterum ſinum tranſire? An ſyſtoles? Tum ſinus vterque aeque ſe contrahit, et proprium, quo repletus eſt, ſanguinem exprimit. Non poteſt ergo ſimul ſanguinem alienum recipere. An diaſtoles? Hoc tempore vterque ſinus dilatatur, et ſanguinem, vndecunque aduenerit, alienum, recipit. Non poteſt ergo eodem hoc tempore ſuum, quem continet, in alterum exprimere. Ergo nullo tempore ſanguis ex vno in alterum ſinum traduci poteſt. „ Sed plura huius rei argumenta, ſi plus quam euictus eſſe cupis, legas §. §. 35. 36. 37. 38. 39.

Noſtro ergo *Auctori* haec quidem particula circulationis ſanguinis in foetu reſeruata fuit. Hic enim, de veritate ſententiae Haruaeianae minime dubitans, et alias ob cauſas inquirendo cor infantis recens nati, ſtructuram, inuenit, organi huius circulationis longe aliam eſſe, quam vt vulgo animo concipitur (§. 3.). Detecta hac ſtructura, nihil

g 2 facilius

facilius fuit, quam verum iter indicare, quod ſanguis in foetu faceret. *Organum ergo primum, deinde et motum explicuit ſanguinis.*

Vt autem, quo coepimus, ordine pergamus enarrare, qua ratione ad illam rem peruenerit; diſſecto eo, quo par eſt, modo, at quo communiter ſecari non ſolet, corde infantis modo nati; non parum mirabatur continuo, foramen omnino aliud eſſe, quod in dextro, et aliud, quod in ſiniſtro ſinu patet. Illud ab arcu, quem iſthmum VIEVSSENII vocant, et valuula EVSTACHII; hoc ab arcu eodem et valuula foraminis oualis formari (§. 4.). Videbat facile, niſi valuulae inter ſe cohaererent, quod tamen contra omnem veriſimilitudinem erat, nunquam fieri poſſe, vt ſinus inter ſe communicent (§. 5.). Examinatis rebus gnauiter, diſſecta denique valuula foraminis oualis, vt, quid, ſi quid forte, intereſſet, oculis pateat, manifeſto apparuit: Sinus inter ſe minime communicare, ſed vtrique ſinui interpoſitam eſſe venam cauam inferiorem. Foramen, quod in dextro ſinu apparet, orificium eſſe huius venae cauae inferioris, quo in hunc ſinum inferitur; illud, quod in ſiniſtro patet, quod proprie foramen ouale vocatur, ſimiliter aliud eiusdem venae cauae orificium eſſe, quo in hunc ſinum ſiniſtrum aperitur; adeoque ſinum vtrumque cum vena caua quidem inferiori, at minime inter ſe communicare (§. 6.).

Detracto

Detracto hoc velamine, quo vera harum partium fabrica tecta fuerat; et oculis nunc quaſi novis rem intuendo, videbat quoque, venam cauam inferiorem, dum externe modo conſideraretur, adſcendendo minime ſoli dextro, ſed vtrique, ſinui, et magis potius ſiniſtro, quam dextro, reſpondere; vt maiori ſui parte omnino in ſiniſtrum, minori in dextrum, ſe inſerat. (§. 7. 8.) Vitulorum deinde, et aliorum animalium recens natorum corda conferendo eadem vbique inuenit. Vbique reperit, foramen ouale nihil aliud eſſe, quam orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris, quo ſe in ſiniſtrum ſinum aperiebat, vti dextro in dextrum. Et in vitulo quidem, quae ſimplicia tantum in foetu humano orificia erant, veros, licet breues, ramos eſſe, in quos vena ſe diuideret, et quorum dextro in dextrum, ſiniſtro, qui foramen ouale dictus fuerat, in ſiniſtrum ſinum insereretur. (§. 23.) Atque haec ergo vera foraminis oualis natura eſt, quam tamdiu diſſimulauerat. Quod ſingulari iſto nomine *foraminis oualis* ſalutatum fuit, nihil aliud eſt, quam *orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris*; quemadmodum innumera alia venarum aeque ac arteriarum in corpore humano orificia dantur.

Nunc, quo itinere ſanguis progrediatur, quis eſt, qui non videt? (Nam facilis negotii rem eſſe putamus, hoc iter definire, quando viae notae ſunt; vt contra nihil, quam illud latentibus viis tentare, difficilius et inanius eſſe, magnum HARVAEI et

Meryi exemplum docuit.) Vena caua inferior duobus orificiis, altero in dextrum, altero in ſiniſtrum ſinum aperitur. Ergo ſanguis ex vena caua inferiori partim in dextrum ſinum, per orificium eius dextrum, partim in ſiniſtrum, per eius orificium ſiniſtrum, progreditur. Quae portio ſanguinis in dextrum ſinum venit, ea, coniuncta cum ſanguine venae cauae ſuperioris, recta inde tranſit in ventriculum cordis dextrum. Nec guttula quidem huius ſanguinis, qui ſemel ſinum dextrum intrauit, inde rurſum in ſiniſtrum redire poteſt. (§§. cit. 35. etc.) Quae vero portio ſanguinis ex vena caua inferiori per eius orificium ſiniſtrum in ſinum ſiniſtrum peruenit, ea haec eſt, qua pulmones liberantur, quae a ſinu dextro, a ventriculo dextro, et conſequenter etiam a pulmonibus, auertitur; qui, reſpiratione carentes, eam transmittere non potuiſſent. Ergo haec portio, in ſinu ſiniſtro coniuncta cum ſanguine venarum pulmonalium, recta ventriculum ſiniſtrum, et porro aortam, adit; quo denuo per totum corpus diſtribuatur, intactis pulmonibus. (§. 34. 40. 41. 42. 43. 44.).

Neque vero, vt facile vnusquisque videt, hoc noſtrum *orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris* illa obiectio tangit, quae, vt ſupra demonſtrauimus, *foramen ouale* euertit. Venae cauae enim, tam ſuperior, quam inferior, cum ſinubus cordis motum, vt conſtat, non ſynchronum, ſed alternatiuum, habent; vt vaſa neceſſario ſe erga ſe inuicem habere oportet,

oportet, quorum altera in altera ſuum ſanguinem excutere velis. Dum vena caua inferior ergo ſyſtolen exercet; ſinus in diaſtole ſunt, et ſanguinem recipiunt, quem illa exprimit. Dum vena vero in diaſtole eſt, nouumque ſibi ſanguinem ex ramis ſuis colligit; ſinus interim ſyſtolen ſuam agunt, receptumque ſanguinem in ventriculos cordis excutiunt.

Haec ſunt primaria huius diſſertationis momenta. Sed multa praeterea alia in eadem continentur, quorum tamen cognitio ſolis illis anatomicis ad palatum eſſe poterit, qui ſingula quaeuis, quae ad noſtrum attinent corpus, quam minutiſſime ſcire cupiunt. Ea nunc breuibus verbis ordine recenſebimus. Poſtquam idea generalis de vera ſic dicti foraminis oualis ſtructura eo, quo ſupra enarrauimus, modo expoſita eſt; venae cauae inferioris, cuius nonniſi hiſtoriam tota haec diſſertatio proprie refert, completa deſcriptio traditur; imprimis qua ratione duo ſua orificia ope valuularum EVSTACHII et *ſinus ſiniſtri*, (nam ita valuulam foraminis oualis Auctor merito appellat,) et ope arcus, illis interpoſiti, producat. (§. 9. 10. 11. 12.) Deinde et corda adultorum hominum, et embryonis trimeſtris corculum, quae ſingula ſequentibus poſtea annis diligenter conſulere non neglectum fuit, conferuntur; quo mutationes appareant, quae variis ſub vitae periodis, (nam perpetuo hae partes mutantur,) duobus orificiis venae cauae inferioris contingunt. (§. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.)

Adiun-

Adiungiturque ſingularis annotatio de valuula Evstachii. (§. 21.). Poſtea deſcriptio venae cauae inferioris orificiorumque eius in corde vitulino traditur, qua multa, quae obſcuriora in homine ſunt, illuſtrantur et explicantur. (§. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28.) Eam ſequitur diſſertatiuncula de valvula ſinus ſiniſtri, quae, haud ſatis cognita, pro ſemilunari valuula vulgo habetur, et quam ad anthelarium potius vel tubuloſarum genus pertinere, accuratioribus obſeruationibus oſtenditur. (§. 29. 30. 31.). Denique, quibus cauſis factum ſit, vt error de foramine ouali ſe tamdiu ſuſtinuerit, exploratur et methodo iſtuc adſcribitur ſectionis haud conuenienti. (§. 32.) Meliorque ſecandi ratio docetur (§. 33.). His abſoluitur pars prior diſſertationis, anatomica. Poſterioris, qua de motu ſanguinis in foetu agitur, principalia capita diximus.

II.

Lychni-Cucubalus noua Planta hybrida;

Auctore I. T. Koelreuter pag. 431.

Votis Academiae reſponſurus Cel. *Koelreuterus*, aliqua ſuorum, circa productionem plantarum hybridarum, tentaminum Commentariis noſtris inſerenda obtulit; in quibus vt ea, quam hucusque exteruit, diligentia atque aſſiduitate pergere velit, etiam

etiam atque etiam optabunt omnes, quibus Naturalis Scientiae incrementum cordi eſt. — Nondum Plantam dioïcam cum hermaphrodita, diſtincti praeſertim generis, connubio iungere tentauerat Noſter; quod vtique experimentum nouae lucis, in generationis theoria, haud parum promittere videbatur. Lychnidem itaque dioïcam cum variis aliis ex eodem Ordine naturali plantis combinans, tandem ſucceſſit et foecundum fuit adulterium foeminae huius, cum Cucubalo viſcoſo maritatae. Hybrida proles ex illo connubio prognata, quam ſub Lychni-Cucubali compoſito nomine deſcribit Auctor, praeter intermedium habitum, figuras et proportiones, eo praeſertim notabilis fuit, quod flores generationis organis, maxime ſtaminibus imperfectis et latentibus, impotentes protulerit; vnde vulgo celebrata generationis hybridae regula, ſecundum quam virtus *patris* in corticalem ſubſtantiam eidemque adnumeratas vulgo partes, *matris* in organa medullae tribui ſolita, praedicari ſolebat, infirmatur maxime. Neque enim Piſtillum perfecte et conſtanti numero matris, neque Corollam (adinſtar patris) corona deſtitutam, ſtaminaue perfecta et foecunda exhibuit Lychni-Cucubalus. Imo virtutem maſculae eſſentiae in ſeminis etiam mole et colore mutandis, cuius tamen primordium et ſubſtantia certiſſime tota matri propria eſt, adeoque in matris organa actionem, aeque luculenter comprobarunt hybrida in laudato experimento producta ſemina; quemadmodum talem effe-

 ctum

ctum Gallinae a Phaſiano foecundatae oua, teſtae colore mutato, indicare quoque ſolent.

Longum Cel. Auctor addidit experimentorum Catalogum, quae, licet coniunctione plantarum aeque affinium inſtituta, fruſtranea tamen fuerunt. Vnde cautius hypotheſes ſtruere diſcent Ii, quibus hybridorum geneſis adeo facilis videtur, vt non ſolum intermedias, alienisque ſpeciebus ſimilitudine quadam affines plantas naturali diſſimilium ſpecierum connubio audacter tribuant, ſed etiam genera tantum ſumma initio rerum condita, eorumque adeo diſcordantibus adulteriis ſucceſſiue copioſas, quibus hodie obruimur, ſpecies prognatas fuiſſe fingunt. Diſcant hi experimentis *Koelreuteri* noſtri, quorum iam illuſtrem numerum et egregias ſeries in libellis ſuis germanicis edidit, etiam arte, ſaepe difficillima eſſe maxime affinium plantarum adulteria, quae Iſti ſolo naturae ſub caſto regimine inter diſſimillima genera adeo facilia quondam fuiſſe imaginantur. Diſcant etiam hybridas plantas in conſtantes ſpecies vix vnuqam euehi poſſe, ineptitudine partim ad generandum, partim degradatione vel degeneratione per ſuccedentes generationes, ad praeponderantem alterytrius parentis habitum perpetuas easdem denegantibus. Vt etiam hic ſapientiorem Naturam fuiſſe videamus, quam eam ſibi finxerunt Obſeruatores.

III.

Schacalae Hiſtoria;

Auctore A. I. Güldenſtaedt pag. 449.

Schacalae Turcarum Gallorumque, ſeu Lupi aurei Kaempferi, quadrupedis per Turciam et Perſiam frequentiſſimi atque per peregrinatores famigeratiſſimi, attamen Zoologis hucusque minime rite noti deſcriptioni praemittitur diſſertatio, de animalibus domeſticis antiquiſſimis atque de prototypis eorum feris.

Ex vitae genere hominum primaeuorum probabile redditur, Ouem, Capram atque Canem antiquiſſime et primo omnium in numerum animalium domeſticorum homines recepiſſe et cicurare tentaſſe. Idem ex varietate numeroſa, qua hodie haec animalia veniunt, probatur, additis inſuper cauſſis, quare Canis figura et habitus hodie magis variet, quam Caprae et Ouis.

Prototypa varietatum Caprae, Ouis et Canis quaerenda eſſe in montoſis Aſiae minoris, ceu regionibus primo omnium in globo noſtro terraqueo per homines primaeuos occupatis, ſtatuitur.

Hinc quod Muſmon Veterum ſeu Muflon Buffonii et Capra Ammon Linnei pater varietatum Ouis ſit confirmatur.

Dein de Rupicapra et Ibice negatur, quod ex illis Caprae varietates ortae ſint; ſed declaratur illas ex Paſena ſeu Capricerua Kaempferi, quae Capra bezoartica Linnei deriuandas eſſe.

Tandem Canis varietates nec ex Hyaena, nec ex Lupo, nec ex Vulpe, ſed ex Schacala prouenisſe, ex ſtructura et proportione inteſtinorum, ex dentium et digitorum numero, ex corporum magnitudine, ex pilorum qualitate, ex roſtri figura, ex inſtinctu venereo, ex moribus, atque ex patria ac ex ſtatione horum animalium, remotis pariter difficultatibus ex Canis latratu atque ex cauda eiusdem plerumque recuruata oriundis, demonſtratur.

Adduntur critica circa nomina et ſynonyma Schacalae.

Sequitur Schacalae ſecundum partes externas, ſecundum viſcera atque ſecundum oſſa deſcriptio, additis faciei, trunci atque extremitatum, viſcerum atque oſſium dimenſionibus, indicatisque affinitatibus inter Schacalam, Canem villaticum, Lupum et Vulpem obſeruandis, quae omnia iconibus ſtaturam Schacalae naturali quadruplo minorem (vid. Tab. XI.), atque figuram inteſtini illius caeci (vid. Tab. X.), nec non eiusdem (vid. Tab. XII.) et Vulpis (vid. Tab. XIII.) cranii magnitudine naturali delineatam ſiſtentibus illuſtrantur.

IV.

IV.

Chaus, animal Feli affine deſcriptum; Auctore A. I. Güldenſtaedt p. 483.

Proponitur animal Zoologis hucusque ignotum, ad felinum genus pertinens, Caracali Buffonii ſummopere affine, in campis depreſſis arundine et arboribus obſitis circa mare caſpium indigenum; ibidemque obſeruatum, Chaus appellatum. Inſtinctu atque moribus expoſitis, traditur deſcriptio Chai ſecundum omnes partes externas; additur earundem menſura; ſequitur anatomica viſcerum expoſitio; tandemque et oſſium praeſertim cranii determinatio et dimenſio. Coronidis loco adduntur ſpecifica nomina animalium quatuor proxima affinitate, auriculis barbatis ſpectabili, coniunctorum ſc. Lyncis Auctorum, Felis ruffae Pennanti, Caracalis Buffonii et Chai noſtri. Iconibus duabus repraeſentatur Chai ſtatura, naturali quadruplo minor (vid. Tab. XIV.) et cranii eiusdem figura, magnitudine naturali (vid. Tab. XV.).

ASTRONOMICA.

I.

De traiectu citiſſimo ſtellae per duos circulos Almicantarath datos pro qualibet eleuatione poli.

Auctore L. Eulero pag. 503.

Problema non adeo ſolutile in praeſenti diſſertatione pertractandum ſuſcipit Vir Illuſtr. quo ſcilicet, conſtituto meridiano loci ambobusque Almicantarath, eiusmodi ſtella quaeritur, quae motu ſuo diurno parallelum quempiam percurrens ambos Almicantarath ita ſecet, vt angulus menſuram temporis, quo ſtella ſpatium inter hos circulos contentum traiiciat, exhibens, fiat omnium minimus. Adhibita igitur reſtrictione debita, excluſisque omnibus ſtellis polo nimis vicinis vel ab eo nimis remotis, quam vt motu diurno per ambos Almicatarath tranſire poſſint, quia angulus menſuram temporis traiectus exhibens minimus eſſe debet, Ill. Auctor ſecundum methodum maximorum et minimorum aliam ſtellam quaeſitae proximam concipit, quae alios duos Almicantarath in aliis punctis traiiciat. Et cum anguli menſuram temporis vtriusque traiectus exhibentes aequales inter ſe eſſe debeant, ex hac minimi conditione aequatio elicitur, pro qua adimplenda diſtantia ſtellae a polo ita

ita definiri debet, vt parallelus inde deſcriptus ad ambos Almicatarath aequaliter inclinetur; atque ex ipſa hac proprietate ſolutio problematis propoſiti elegantiſſima deducitur, cui Vir Ill. aliam mere geometricam in fine ſubiungit. Vbi probe notandum eſt, hoc problemate ſoluto famoſiſſimum illud problema olim agitatum de minimo crepuſculo etiam facillime reſolui.

II.

De circulo maximo fixo in coelo conſtituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur.

Auctore L. Eulero pag. 509.

In tabulis Aſtronomicis recentioribus ſollicite indicari ſolet progreſſio annua nodorum cuiusque planetae; quantum autem adhuc diſtemus a perfecta de hoc argumento cognitione exinde pateſcit, quod Aſtronomi circa quantitatem huius motus tantopere inter ſe diſſentiant, vt v. gr. Caſſinus promotionem ſecularem lineae nodorum pro Saturno exiſtimet eſſe $= 1^{\circ}. 35'. 11''$, dum a Halleio tantum $0^{\circ}. 30'. 0''$ pro ea aſſignetur. Cuius enormis diſſenſus in eo euidenter quaerenda eſt ratio, quod error aliquot graduum in loco nodi patratus quaſi nullum in latitudine planetae diſcrimen pariat, ita vt ex recentioribus obſeruationibus aliquot adeo ſeculis a ſe inuicem diſtan-

diſtantibus ſimulque exquiſitiſſimis vix aliam niſi mancam de vero loco nodi cognitionem impetrare liceat, quia inclinationes orbitarum planetarum ad orbitam terreſtrem ſiue eclipticam nimis ſunt paruae, quam vt effectus ex tali errore oriundus diſtincte determinari queat. Maxima autem huius incertitudinis ſcatebra in inclinatione orbitarum planetarum, pro antiquioribus temporibus non minus latente, mox detegetur.

Minus quidem circa hanc orbitarum inclinationem ad eclipticam inter ſe diſſentiunt Aſtronomi. Perperam autem ex hoc conſenſu iudicares, eandem inclinationem, vti tacite ſupponunt, pro antiquioribus temporibus locum habuiſſe, quia non ſolum nullis obſeruationibus confirmari poteſt, ſed etiam theoriae maxime aduerſatur; ita vt inde quidem concludi poſſit, recentioribus his temporibus inclinationes orbitarum tales fuiſſe, quales hic aſſignantur; verum hanc concluſionem ad ſecula anteriora, de quibus in grauiſſimis tenebris verſamur, extendere non licet. Haec autem incertitudo etiam in motum nodorum redundat, quoniam ea ſubſiſtente nequidem ex occultationibus fixarum, quippe quae ſolae idoneas illius temporis obſeruationes pro motu nodorum determinando, ſuppeditant, aliquid certi concludi poteſt.

Haec tanta incommoda iam nonnulli inſignes Geometrae hoc argumentum aggredientes animadverterunt, ſimulque agnouerunt, nihil certi neque

ex

ex obſeruationibus neque ex theoria circa motum nodorum et inclinationem orbitarum planetarum cognoſci poſſe, niſi haec elementa ad circulum minus variabilem in coelo quam ecliptica referantur, quem in finem aequatorem Solarem propoſuerunt; verum ob plura incommoda, quibus reductio horum elementorum ad circulum tantopere adhuc incertum, ab ecliptica ſimul nimis diuerſum, laboraret, eum aeque repudiandum eſſe Ill. de qua agimus diſſertationis Auctor autumat; praeſertim cum in aliam ideam incidiſſet, hoc negotium conficiendi. Si enim pro circulo illo fixo ipſe eclipticae ſitus, quem certo quodam tempore obtinuit, accipiatur, manifeſtum eſt, loca planetarum, quae tempore quocunque fuerint obſeruata, commodiſſime ad illam eclipticam determinatam reuocari poſſe. Proponit igitur Vir Ill. pro hoc ſcopo poſitionem, quam ecliptica initio huius ſeculi habuit, quippe quae merito tanquam circulus in coelo reuera fixus ſpectari poteſt, quandoquidem ſemper per easdem ſtellas fixas tranſire eſt cenſendus, ita vt tam loca planetarum et cometarum quam eorum orbitae commodiſſime ad eum referantur.

Conſtituto igitur circulo, maximo, immoto, poſitionem eclipticae initio huius ſeculi exhibente, Ill. Auctor in puncto aequinoctii verni (a quo ſimul longitudines ſtellarum erunt computandae) ſtellam fingit fixam, notabilem, quae perpetuo in eodem loco haereat: tum vero concipit aliam ſtellam a priore qua-

quadrante remotam, ita vt his duabus ſtellis fixis poſitio circuli maximi fixi determinetur. His autem conſtitutis Vir Ill. in ſitum eclipticae pro alio tempore quocunque tam ante quam poſt epocham illam receptam inquirit, quandoquidem hinc omnia loca in coelo reſpectu orbitae terreſtris hactenus determinata ad circulum illum fixum transferri poterunt. Hunc in finem regula olim in actis Berolinenſ. ab ipſo Viro Ill. de variationibus latitudinis fixarum agente, tradita in ſubſidium vocatur. Cum enim ope eius regulae ex data tam longitudine quam latitudine cuiuspiam ſtellae fixae pro initio huius ſeculi eius locus pro quouis alio tempore aſſignari liceat, inde facile loca definiuntur, vbi ambae ſtellae, poſitionem circuli maximi fixi determinantes, ſeculo vno elapſo reſpectu eclipticae reperiuntur. Manente igitur circulo immoto ſeu poſitione eclipticae pro Anno 1700 Ill. *Eulerus* alium conſiderat circulum, eclipticam pro Anno 1800 exhibentem; et determinatis mutationibus inde oriundis, quas quidem quam minimas eſſe deprehenditur, praecipuum negotium in quaerendo illo puncto, vbi ambo eclipticae ſitus modo conſiderati ſe mutuo interſecant, verſatur. Situ autem huius puncti pro diuerſis epochis determinato, nullum plane diſcrimen in eo reperitur, ita vt in noſtro circulo immoto tanquam punctum fixum et ideo omni attentione dignum ſit cenſendum, quod per id et per ſui oppoſitum ecliptica ſemper tranſeat et circum ea motu angu-

angulari conuertetur ita vt haec duo puncta tanquam cardines orbitae terreſtris ſpectari queant. Ipſa autem haec cardinum idea Ill. Auctori modum maxime idoneum ſuppeditat, veram poſitionem orbitae cuiusque planetae ad quoduis tempus ex cognitis cardinibus et promotione ſeculari determinandi; hac ſola reſtrictione adhibita, quod numerus ſeculorum non nimis magnus ſtatuatur, quia alioquin in motu ſeculari et loco cardinum a nodis reliquorum planetarum pendente quaedam alteratio oriri poſſet. De vſu igitur huius feliciſſimae cardinum ideae maxime adductus Vir Ill. in cardines reliquorum planetarum inquirit; verum cum inde tantus inter tabulas Hallejanas et Caſſinianas diſſenſus pateſcat, vt v. gr. loca cardinum pro Ioue vltra 160° diſcrepent, et motus ſeculares adeo in plagas contrarias vertantur, iſtam diſquiſitionem non proſequitur, ſed potius in ſubſidium emendationis erroris ex fallaci Aſtronomorum ſuppoſitione circa inuariabilitatem inclinationis orbitarum ad eclipticam orto, in qua incertitudo cardinum eſt quaerenda, hoc problema ſubiungit: Datis cardinibus duorum planetarum cum vtriusque promotione ſeculari, ad quoduis tempus tam interſectionem quam inclinationem vtriusque orbitae determinare, ſiquidem haec elementa pro epocha 1700 fuerint cognita. Accedit denique ſupplementum, vbi formulae traduntur, quarum ope omnia faciliori negotio abſoluuntur, ita vt inde etiam inueſtigationem cardinum et motus ſecularis reliquorum planetarum inſtituere liceat,

ceat, quibus abſolutis adhuc ſequens problema ſoluitur: Si tempore quocunque locus planetae in coelo more ſolito fuerit obſeruatus, eius ſitum ad circulum noſtrum fixum in coelo reducere.

III.

Obſeruationes Aſtronomicas pro determinando ſitu Geographico variorum per Imperium Ruſſicum locorum a Nob. Chriſtophoro Eulero, Annis 1769 et 1770 factas, recenſet A. I. Lexell pag. 541.

Cum in noſtris Commentariis obſeruationes Aſtronomicae pro determinanda Latitudine et Longitudine plurimorum in Ruſſia locorum a Cel. *Krafft*, et Clar. *Iſlenieff* atque *Inochodzow* factae, iam habeantur expoſitae, Auctor huius Diſſertationis obſeruationes quoque Aſtronomicas a Nob. *Eulero* hunc in finem inſtitutas, ſuccincte heic exponendas ſtatuit, quo ſcilicet melius diiudicari poſſit, quam fidem mercantur determinationes ex iſtis obſeruationibus eliciendae. Iſtae autem determinationes ſe habent, vti ſequens Tabula ob oculos ponit.

Vralſkoi

	Latitudo.	Longitudo Geographica a Meridiano Pariſino in Temp.	in Gradibus.
Vralſkoi Gorodok alias Iaik	51°. 11'. 0"	3h. 17'. 0"	49°. 15'
Tſcherkaſk - - -	47. 13. 34	2. 30. 0	37. 30
St. Dmitrii - - -	47. 13. 6	- -	- -
Taganrock - - -	47. 12. 40	2. 25. 15	36. 19
Krementſchuck - -	49. 3. 28	2. 4. 35	31. 9
St. Eliſabeth - - -	48. 30. 10	2. 0. 30	30. 7½
Saporogſkaja Sietſcha	47. 31. 35	2. 8. 10	32. 2½
Samara - - - -	48. 29. 35	2. 12. 0	33. 0
Perewolotſchna - -	48. 51. 40	- -	- -
Gluchow - - -	51. 40. 30	2. 8. 0	32. 0

De his vero determinationibus tenendum eſt, quod eae quibus Latitudines exprimuntur, pro adeo exactis ſint reputandae, vt vix maius quam decem ſcrupulorum ſecundorum dubium locum habere queat; niſi forſan pro Caſtello St. Eliſabeth incertitudo aliquanto maior locum inueniat, quae tamen ſemiſſen minuti primi minime ſuperabit. Quod autem Longitudines heic recenſitas attinet, illae quidem in genere cum aliqua latitudine decem, vel adeo viginti ſcrupulorum ſecundorum in tempore, immo pro nonnullis locis forſan vnius minuti primi, accipi debent. Determinationes ſcilicet Longitudinum pro ſequentibus locis: Tſcherkaſk, Taganrock, Krementſchuck, St. Eliſabeth, Gluchow, certiores habendae ſunt, quam illae pro Vralſk, Saporogſkaja Sietſcha et Samara, quarum poſteriores obſeruationibus aliquantum dubiis innituntur. Pro Caſtello

 St. Deme-

St. Demetrii nullae quidem exſtant pro Longitudine determinanda obſeruationes; verum quum diſtantia huius loci a Tſcherkaſk et Taganrock per menſuras Geodaeticas conſtet, in procliui eſt inde Longitudinem huius loci elicere. Compertum ſcilicet eſt, diſtantiam inter Tſcherkaſk et St. Dmitrii eſſe 27 Verſtarum, vnde ſi gradus ſub aequatore aeſtimetur eſſe 57260 Perticarum Gallicarum (Toiſes), conficietur differentia Longitudinis inter Tſcherkaſk et St. Demetrii circiter 23′. Simili ratione quum diſtantia inter St. Demetrii et Taganrock inuenta ſit 70 Verſtarum, elicietur inde differentia meridianorum inter haec loca 59½′ circiter, ex quibus menſuris demum fit differentia Longitudinis inter Tſcherkaſk et Taganrock 1°. 12′ circiter, quae vltra quam ſperare fas erat, cum illa conſentit, quam ex obſeruationibus Aſtronomicis deduximus. Si igitur Longitudo pro Tſcherkaſk a Meridiano Pariſino aeſtimetur eſſe 37°. 30′, erit illa pro Caſtello St. Demetrii 37°. 7′.

IV.

De obſeruatione Eclipſeos Solis, Petropoli die $\frac{15}{26}$ Auguſti, Anno 1775 inſtituta.

Auctore A. I. Lexell pag. 577.

Breuem expoſitionem obſeruationum circa Eclipſin Solis die 15 Auguſti 1775 Petropoli factarum, in

in hac Diſſertatione tradit Clar. Auctor, cuius praecipua momenta habentur ſequentia: Praeter finem Eclipſeos, quem ſatis exacte obſeruauit Temp. vero Petropolitano die 25 Aug. $18^h. 41'. 22''$, varias quoque inſtituit obſeruationes circa partes lucidas diſci Solis et diſtantias cornuum Lunae, ex quibus obſeruationibus collegit tempus coniunctionis verae inter Solem et Lunam incidiſſe Temp. Petropolitano vero $19^h. 8'. 37''$, ſiue tempore medio Pariſino $17^h. 18'. 18''$, exiſtente pro eo momento Longitudine Solis et Lunae $5^s. 2^\circ. 42'. 17''$, vnde deducitur correctio Tabularum Lunarium Cel. *Mayeri* $-45''$ in Longitudinem, Latitudinis correctio autem non niſi $-7''$ abſoluetur. Comparata deinde obſeruatione Petropolitana pro fine Eclipſis, cum obſeruationibus circa hunc finem in nonnullis aliis locis inſtitutis, inuenit differentias Longitudinum inter Meridianum obſeruatorii Pariſini et haec loca, vt ſequitur:

Lundae a Meridiano Pariſino differentia	$43'. 44''$
Warſowiae - - - - -	$1^h. 14. 38$
Regiomontis - - - -	1. 12. 30
Suecopolis - - - - -	1. 30. 40

Quod autem primam harum determinationum attinet, illa in exceſſu aliquantum peccare videtur, nam ex obſeruationibus pro fine Eclipſium Solis Annis 1764 et 1769 Lundae inſtitutis, Longitudo Lundae multo minor colligitur. Medio autem ſumto omnium trium determinationum Longitudo huius loci a meridiano Pariſino fiet $43'. 30''$ circiter. Longitudo pro Warſowia heic inuenta ſaltem intra decem ſcrupula

pula ſecunda exacta videtur, prouti obſeruationes circa Eclipſin Solis A. 1764 Warſowiae factae confirmare videntur. De Longitudine Regiomontis per obſeruationes Aſtronomicas hucusque nihil conſtitit, veriſimile autem eſt, heic allatam determinationem proxime ſaltem ad veritatem accedere. Longitudo pro Suecopoli loco Sueciae munito, qui haud procul ab vrbe Helſingforſia ſitus eſt, eatenus locum habet, quatenus Eleuatio Poli huius loci ſit 60°. 5′, quam Auctor in ſuo calculo ſuppoſuit; caeterum ſi Latitudo 5′ diminui vel augeri debeat, Longitudo illius loci duobus ſcrupulis ſecundis augeri, vel minui debet.

V.

Obſeruationes Aſtronomicae in vrbe Dmitriewſk inſtitutae, vna cum determinatione latitudinis et longitudinis huius loci.

Auctore Petro Inochodzow pag. 593.

Referuntur hic eae potiſſimum obſeruationes, quae ad poſitionem Geographicam vrbis Dmitriewſk eruendam inſeruiunt: idcirco exponitur imprimis rectificatio Quadrantis bipedalis, (Londini a Siſſono fabrefacti), ex qua prodit error ab altitudinibus obſeruatis auſſerendus 1′. 2″. Quod ad latitudinem attinet, deducitur ea ex 22 altitudinibus Solis meridianis

dianis 50°. 5'. 3'', ex altitudinibus vero 24 fixarum 50°. 5'. 10''; vnde media 50°. 5'. 6'', vt certa aſſumi poteſt. Pro definienda longitudine obſeruatae ſunt immerſiones et emerſiones Satellitum Iouis, quae cum calculis et cum obſeruationibus correſpondentibus comparatae praebent differentiam meridianorum inter Pariſios et Dmitriewſk $2^h. 52'. 27''$. At eadem e duabus Solis eclypſibus concluſa eſt $2^h. 52'. 11''$; poſteriorem determinationem duplo probabiliorem aeſtimando, longitudinem deſideratam ſine ſenſibili errore $2^h. 52'. 16''$, ſeu in gradibus 43°. 4' et a meridiano primo 63°. 4' ſtatuere licet. Declinatio acus magneticae ibidem anno 1771 inuenta eſt 6° a ſeptentrione verſus occidentem.

VI.

Quatuor deliquia Lunae in Dmitriewſk obſeruata exponit Petrus Inochodzow pag. 611.

Ad obſeruanda haec phoenomena vſus eſt Auctor tubo Dollondiano trium pedum, et obſeruationibus ſuis ſubiunxit momenta a Cel. *Lowitz* per tubum Quadrantis $2\frac{1}{2}$ pedum notata.

Primum horum diliquiorum erat die $\frac{17}{28}$ Apri. 1771, cuius initium obſeruauit I. $16^h. 4'. 26''$. t. v.

Alterum die $\frac{12}{23}$ Octobr. eiusdem anni; initium huius eclypſis notauit I. $6^h. 38'. 21''$, idem ſignauit L. $6^h. 38'. 53''$; finem obſeruauit I. $8^h. 54'. 44''$.

Tertium die $\frac{6}{17}$ April. 1772; eius finis notatus ab I. $8^h. 53'. 25''$.

Quartum denique eodem anno die $\frac{30}{11}$ $\frac{\text{Sept.}}{\text{Octobr.}}$, cuius potiora momenta haec ſunt:

	ex obſeru. L.	ex obſeru. I.
Initium	$6^h. 32'. 6''$	$6^h. 31'. 31''$
Immerſio	7. 37. 43	7. 38. 31
Emerſio	9. 21. 8	9. 20. 13
finis	10. 27. 0	10. 27. 13

E collatione trium poſteriorum eclypſium cum obſeruationibus correſpondentibus prodit longitudo Dmitriewſki a Pariſiis

ex 2. $2^h. 51'. 50''$
ex 3. 2. 52. 30
ex 4. 2. 52. 22

Medium 2. 52. 17.

VII.

VII.

Obſeruationes Aſtronomicae in vrbe Saratow habitae a G. M. Lowitz anno 1773. pag. 621.

Obſeruationes has Vir Celeb. pro determinandis latitudine et longitudine vrbis Saratow inſtituit; quarum prior prodit ex altitudinibus fixarum meridianis ad Auſtrum et Boream captis $51^{\circ}.\ 31'.\ 33''$, eadem vero colligitur ex altitudinibus Solis $51^{\circ}.31'\ 23''$: hinc ſumto medio ſtatui illa poteſt $51^{\circ}.\ 31'.\ 28''$. Quod ad longitudinem attinet, eam non niſi ex vnica immerſione 1^{mi} Satellitis Iouis collata cum calculo pro Pariſiis deducere licet $2^{h}.\ 54'.\ 42''$, vel rotunde $2^{h}.\ 54\frac{2}{3}'$, adeoque in partibus circuli $43^{\circ}.\ 40'$ et a meridiano primo $63^{\circ}.\ 40$. Declinatio acus magneticae pro hoc loco reperta eſt $3^{\circ}.\ 28'$ verſus occaſum.

VIII.

Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1775. Cal. corr. inſtitutarum.

Auctore I. A. Euler pag. 626.

Primo loco obſeruationes exponuntur *barometricae*. Altitudo barometri maxima = 29. 11 poll. duodecimal ped. regii pariſini menſe Ianuarii; mi-

nima = 27 12 menſe Martii; media inter omnes obſeruatas = 28. 12. Plures aſcenſus vel deſcenſus Mercurii notabiliores vel ſubitaneos Cel. Auctor ſeparatim exponit. Ex obſeruationibus thermometricis colligitur altitudo maxima = 105. grad. Delisl. menſe Auguſti; minima = 191. menſe Ianuarii adeoque maxima per totum annum thermometri variatio = 86. grad. Hiems huius anni tam reſpectu durationis, quam vehementiae, multo fuit mitior annis praecedentibus; aeſtas autem quoad durationem longe calidior anno praecedente; et medium frigus hoc anno ſtatui poteſt = 147. grad. calor autem medius = 139. grad.; id eſt, per dimidium anni altitudo thermometri minor fuit 147. grad. et iterum per idem temporis interuallum maior gradu 139. Hoc anno maxime regnauit ventus ex occidente vel *Zephyrus* et 95. numerabantur dies ſereni. Sub finem recenſentur reliqua phaenomena, tonitrua, aurorae boreales, atque alia, a Cel. Auctore hoc anno obſeruata.

INDEX

INDEX DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Dan. Bernoulli, Aduerſaria analytica miſcellanea de fractionibus continuis pag. 3.

Eiusdem, Diſquiſitiones vlteriores de indole fractionum continuarum pag. 24.

L. Euler, Solutio quorundam problematum Diophantaeorum pag. 48.

Eiusdem, Speculationes Analyticae pag. 59.

A. I. Lexell, De Reſolutione Polygonorum rectilineorum, Diſſertatio ſecunda pag. 80.

L. Euler, Obſeruationes circa nouum et ſingulare ſerierum genus pag. 123.

Phyſico-Mathematica.

L. Euler, Formulae generales, pro translatione quacunque corporum rigidorum pag. 188.

Eiusdem, Noua methodus motum corporum rigidorum determinandi pag. 208.

A. I. Lexell, Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum pag. 239.

L. Euler, Regula facilis, pro diiudicanda firmitate pontis aliusue corporis ſimilis, ex cognita firmitate moduli pag. 271.

Eiusdem, De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et vtriusque egregio conſenſu p. 286.

Eiusdem, De preſſione funium tenſorum in corpora ſubiecta eorumque motu a frictione impedito; vbi praeſertim methodus traditur, motum corporum tam perfecte flexibilium, quam vtcunque elaſticorum non in eodem plano ſitorum determinandi pag. 304.

Eiusdem, De preſſione funium tenſorum in corpora ſubiecta eorumque motu frictione impedito. Diſſertatio altera pag. 327.

W. L. Krafft, De Viribus Remorum nouae ſpeciei, eorumque comparatione cum remis ordinariis pag. 343.

Phyſica.

C. F. Wolff, De Foramine ouali, eiusque vſu in dirigendo motu ſanguinis. Obſeruationes nouae pag. 357.

I. T.

I. T. Koelreuter, Lychni - Cucubalus noua Planta hybrida pag. 431.

A. I. Güldenſtaedt, Schacalae Hiſtoria pag. 449.
Eiusdem, Chaus, animal Feli affine deſcriptum pag. 483.

Aſtronomica.

L. Euler, De traiectu citiſſimo ſtellae per duos cirlos Almicantharath datos pro qualibet elevatione poli pag. 503.

Eiusdem, De circulo maximo fixo in coelo conſtituendo, ad quem orbitae planetarum et cometarum referantur pag. 509.

Obſeruationes Aſtronomicas pro determinando ſitu Geographico variorum per Imperium Ruſſicum locorum a Nob. *Chriſtophoro Eulero*, Annis 1769 et 1770 factas recenſet *A. I. Lexell* pag. 541.

A. I. Lexell, De obſeruatione Eclipſeos Solis, Petropoli die $\frac{15}{26}$ Auguſti, Anno 1775 inſtituta pag. 577.

P. *Inochodzow*, Obſeruationes Aſtronomicae in vrbe Dmitriewſk inſtitutae, vna cum determinatione latitudinis et longitudinis huius loci pag. 593.

Eiuſdem, Quatuor deliquia Lunae in Dmitriewſk obſeruata pag. 611.

Obſeruationes Aſtronomicae in vrbe Saratow habitae a *G. M. Lowitz* anno 1773. pag. 621.

I. A. Euler, Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1775. Cal. corr. inſtitutarum pag. 626.

MATHEMATICA.

ADVERSARIA
ANALYTICA MISCELLANEA
DE
FRACTIONIBVS
CONTINVIS.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Haud dedignati ſunt viri Illuſtres ſummique Geometrae ſuperioris ſaeculi Milord Brouncher, Wallis, Huyguens aliique theoriam fractionum continuarum commentari atque in vſus ſuos conuertere, quin etiam hiſce proximis temporibus Geometrae ſagaciſſimi *Eulerus* et *de la Grange*, tot ſublimibus Inuentis clari, argumentum iſtud atithmeticum haud parum promouerunt atqne ab obliuione vindicarunt: liceat egregiis obſeruationibus leuiuſculas quasdam ſuperadiicere, plerasque excerptas ex aduerſariis olim a me congeſtis. Nec mihi propoſitum eſt rem ſyſtematice proſequi nec peculiarem vſum inhiare. Fractiones continuae abruptae, aliud non ſunt, quam ſimplices fractiones

 ſub

ſub forma plurium fractionum, inter ſe a diuiſione continua concatenatarum, quas magnus adhibuit Hugenius ad proportiones, pro admiſſa aliqua aberratione, ſimpliciſſimis numeris exprimendas. Examinabo potiſſimum fractiones continuas data lege in infinitum progredientes, cuiusmodi celebre nobis dedit exemplum Illuſtris *Brounckerus*, argumenti huius Auctor, pro determinanda ratione inter quadratum et circulum ei inſcriptum, quam Walliſius ex profundiſſimis abditis eruerat modoque valde diuerſo expreſſerat. Animus erat inquirendi, quibusnam in caſibus expreſſiones noſtrae in infinitum continuatae valorem obtineant communi analyſi determinabilem. Miratus ſum pauciſſimos eſſe hoſce caſus eosque ſimpliciſſimos; praeter hos reliqui omnes ad formulas tranſcendentales conducere videntur: nec tamen, quantum ego quidem ſcio, vllum adhuc a Geometris prolatum fuit exemplum ea de re aliud quam Brounckerianum.

§. 2. Initium faciam ab expreſſione fractionum continuarum nullibi abruptarum inter omnes ſimpliciſſima maximeque obuia. Proponatur ſcilicet inveſtigandus valor ſequentis expreſſionis

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}}}$$

vbi

vbi m indicat numerum qualemcunque ſiue affirmatiuum ſiue negatiuum, integrum aut fractum, rationalem aut irrationalem: Si ponatur, hanc expreſſionem continue magis magisque conuergere ad certum et determinatum aliquem valorem, neceſſe erit, vt poſt numerum infinitum concatenatarum fractionum, valor expreſſionis haud porro varietur, ſi noua ſuperueniat fractio. Sit itaque pro fractionibus infinities repetitis valor expreſſionis $= S$ atque puta nouum praefigi terminum, ita vt qui fuit primus nunc fiat ſecundus; erit tunc valor expreſſionis $= \frac{1}{m+S}$; atque ſic habebimus (per hypotheſin) $S = \frac{1}{m+S}$, ſiue $S^2 + mS = 1$ vel $S = \frac{-m + \sqrt{4 + mm}}{2}$, quae ſolutio vnicuique obuia eſt.

§. 3. Verus vtique valor eſt, quem modo dedimus, atque ſi ad exempla pure numerica deſcendere lubeat, luculenter apparebit, quam cito plerumque a quauis noua adiecta fractione expreſſio ad valorem iſtum approperet. Sit, verbi gratia, $m = \frac{8}{3}$, dabit formula noſtra, pro expreſſione infiniti-membri, $S = \frac{1}{3}$. At ſi ſumatur valor expreſſionis ſucceſſiue pro fractione prima ſimplici, dein pro fractione bimembri, trimembri et quadrimembri, obtinebuntur valores ſpecifici $\frac{3}{8}$; $\frac{24}{73}$; $\frac{219}{656}$ et $\frac{1968}{5905}$, in quibus, ſi numeratores retineantur, denominatores ſola vnitate aberrant, alternis vicibus in defectu ſiue in exceſſu, vnde apparet, quam cito fractiones abruptae conuergant ad propoſitam fractionem infinitimembrem eiusque valorem S; etiamſi pro m numerus

 fractus

ſractus fuerit aſſumtus. Praeſati autem termini numerici pro fractionibus abruptis ſucceſſiue determinandis facillime continuantur, quia quiuis numerator noui termini eſt triplum denominatoris vltimi termini, denominator autem in nouo termino eſt triplum eiusdem numeratoris modo inuenti vnitate auctum vel diminutum, prouti index noui termini fuerit par vel impar.

§. 4. Vnicum pariter ſufficiet exemplum, quo appareat nihil obſtare, quin pro m quantitas aſſumatur irrationalis. Ponatur, exempli cauſa, $m = \sqrt{5}$: ſic dabit formula in fine paragraphi ſecundi expoſita valorem fractionis infiniti-membris $S = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Si vero in expreſſione propoſita ſumantur ſucceſſiue valores pro fractione vni-membri, bimembri, trimembri etc. obtinebuntur termini

$$\tfrac{1}{5}\sqrt{5};\ \tfrac{1}{6}\sqrt{5};\ \tfrac{6}{35}\sqrt{5};\ \tfrac{7}{41}\sqrt{5};\ \tfrac{41}{240}\sqrt{5};\ \text{etc.}$$

Vtamur termino quinto $\frac{41}{240}\sqrt{5}$ vt videamus quantum diſtet ab termino infiniteſimo $S = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Eſt vero $\sqrt{5} = 2,236068$; ergo $\frac{41}{240}\sqrt{5} = 0,381995$ et $S = 0,381966$, qui ambo numeri in quinta demum figura in diuerſa abire incipiunt. In genere apparet quod termini a fractionibus continuis abruptis prouenientes tanto citius ad valorem S conuergant, quanto maior aſſumtus fuerit valor numeri m et viciſſim tanto tardius quanto minor eſt numerus m.

§. 5. Denique etiam quaeritur, quid futurum ſit quando pro m ſumitur numerus negatiuus; dico autem tunc quantitatem radicalem in formula paragraphi

graphi ſecundi negatiue eſſe accipiendam atque ſic fore $S = \frac{-m - \sqrt{4 + mm}}{2}$, vbi ſi ſumatur numerus m negatiue oritur $S = \frac{m - \sqrt{4 + mm}}{2}$, qui valor negatiue idem eſt, qui fuit in paragrapho ſecundo. Notabile mihi videtur, quod pro caſu ſpecialiſſimo $m = 0$ fiat perinde $S = 1$ et $S = -1$: Video hic iterum, quod paſſim monui in praecedentibus diſſertationibus occaſſione ſerierum, quas formant ſinus vel coſinus arcuum circularium arithmetice progredientium, nempe diſtinguendum eſſe inter nihilum abſolutum et inter infinite paruum; In priori enim caſu fit $S = \frac{1}{\infty \times 0}$; in poſteriori $S = \pm 1$ atque ſi hanc rem proſequamur per ſingula expreſſionis membra, prouti fecimus paragrapho tertio, obtinebimus ſucceſſiue pro valoribus expreſſionis abruptae $\infty . \frac{1}{\infty} . \infty \frac{1}{\infty}$ etc. Sic tota quaeſtio in ambiguo poſita manet. At in altero caſu termini numero impares, vtcunque magni ab initio, continue decreſcunt creſcuntque termini pares, donec omnes ad eandem magnitudinem tandem reducantur, quae erit proxime ± 1, prouti minima quantitas aſſumpta m fuerit vel poſitiua vel negatiua.

§. 6. Erunt fortaſſe, quibus ſolutio paragrapho ſecundo expoſita minus videatur apodictica, nec eos prorſus improbarem, ideo quod non ſemper ſatis liqueat, expreſſionem deſinere in valorem conſtantem et determinatum, etiamſi certum ſit eum eſſe finitum; etenim poſſet tandem expreſſio conuergere ad termi-

terminos periodice atque data lege recurrentes, vtcunque inter ſe inaequales, prouti notum eſt ſeriem formatam ex ſinibus vel coſinibus Arcuum circularium arithmetice progredientium formare huiusmodi perpetuos recurſus: hac ratione inductus argumentum noſtrum alio proſequar modo a priori plane diuerſo.

Conuertatur ſucceſſiue expreſſio fractionum continuarum in aequiualentes fractiones ſimplices, incipiendo ab expreſſione vni-membri et pergendo ad expreſſionem bimembrem, trimembrem, quadrimembrem etc. Sic ſucceſſiue orientur valores

$$\frac{1}{m}.\ \frac{m}{mm+1}.\ \frac{mm+1}{m^3+2m}.\ \frac{m^3+2m}{m^4+3mm+1}.\ \frac{m^4+3mm+1}{m^5+4m^3+3m}.\ \frac{m^5+4m^3+3m}{m^6+5m^4+6mm+1}.\ \frac{m^6+5m^4+6mm+1}{m^7+6m^5+10m^3+4m}.\ \text{etc.}$$

Duo ſunt in hac progreſſione fractionum ſimplicium notanda; primum eſt, quod quiuis numerator idem ſit quod denominator praecedentis termini, ita vt ſeries numeratorum eadem ſit cum ſerie denominatorum, hoc ſaltem diſcrimine, quod ſecundus numerator idem ſit cum primo denominatore, tertius numerator cum ſecundo denominatore et ſic porro: igitur ſufficiet conſideraſſe ſeriem numeratorum. Secunda obſeruatio, quae hic potiſſimum notanda venit, in hoc conſiſtit, quod praeſata numeratorum ſeries pertineat ad claſſem ſerierum recurrentium et quidem ad ordinem ſecundum, quando quidem vnusquisque terminus conflatur ex duobus terminis, qui illum praecedunt; ſint nempe tres termini contigui qualescunque A, B et C; dico fore $C = mB + A$, quae eſt proprietas ſerierum recurrentium ſecundi ordinis,

ordinis, theoriam autem generaliſſimam harum ſerierum earumque vſum inſignem pro radicibus omnium aequationum algebraicarum facillimo negotio determinandis docui in variis ſchediasmatis, veteribus Commentariis inſertis.

§ 7. Ad normam praememoratae theoriae conſtruatur pro incognita y aequatio ſecundi ordinis $yy = my + 1$, cuius ambae radices ſunt

$$y = \frac{m + \sqrt{(4 + mm)}}{2} \text{ et } y = \frac{m - \sqrt{(4 + mm)}}{2}.$$

Hae ambae radices nos eo conducent, vt non ſolum valorem termini infiniteſimi ſeriei noſtrae ſed et cuiuscunque termini, cuius index deſignatus ſit numero N, indicare poſſimus absque interuentu terminorum praecedentium; erit enim terminus generalis ſeriei

$$= \alpha \left(\frac{m + \sqrt{4 + mm}}{2}\right)^N + \beta \left(\frac{m - \sqrt{4 + mm}}{2}\right)^N:$$

coefficientes autem α et β determinantur ex duobus primis ſeriei terminis, qui hic ſunt 1 et m et qui prouenire debent pro caſibus $N = 1$ et $N = 2$; ſic reperitur

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{4 + mm}} \text{ et } \beta = \frac{-1}{\sqrt{4 + mm}},$$

quibus ſubſtitutis fit tandem terminus generalis ſeriei noſtrae

$$= \frac{(m + \sqrt{4 + mm})^N - (m - \sqrt{4 + mm})^N}{2^N \sqrt{4 + mm}}.$$

 Confir-

Confirmabitur iſte terminus generalis, quoties pro N numerus aſſumitur integer, quamuis calculus fiat ſatis taedioſus pro numeris maiuſculis. Sit $N = 3$, fit

$$(m + \sqrt{4 + mm})^3 = m^3 + 3mm\sqrt{4 + mm} + 3m(4 + mm) + (4 + m^2)\sqrt{(4 + m^2)},$$

atque pariter

$$(m - \sqrt{4 + mm})^3 = m^3 - 3mm\sqrt{4 + mm} + 3m(4 + mm) - (4 + mm)\sqrt{4 + mm};$$

haec poſterior quantitas ſi a priori ſubtrahatur, prodit

$$6mm\sqrt{4 + mm} + (8 + 2mm)\sqrt{4 + mm},$$

quae quantitas diuidenda eſt per

$$2^N\sqrt{4 + mm} \text{ ſiue per } 8\sqrt{4 + mm},$$

quo facto prodit ſimpliciter, pro tertio termino, $mm + 1$ qualis eſt in praecedente paragrapho, ſi ad ſolos ſpectes numeratores.

§. 8. Quod nunc attinet ad denominatores, hos pro quouis termino habebis, ſi inter numeratores ſumas ſequentem terminum, id eſt, ſi loco N ponas $N + 1$. Sic itaque quiuis denominator conveniens indici N erit

$$= \frac{(m + \sqrt{4 + mm})^{N+1} - (m - \sqrt{4 + mm})^{N+1}}{2^{N+1}\sqrt{4 + mm}}.$$

Denique ſi numeratorem N teſimum diuidas per denominatorem N teſimum; habebis valorem fractionis continuae N membris =

$$\frac{2(m + \sqrt{4 + mm})^N - 2(m - \sqrt{4 + mm})^N}{(m + \sqrt{4 + mm})^{N+1} - (m - \sqrt{4 + mm})^{N+1}}.$$

atque

Atque ſic habemus terminum generalem pro qualicunque termino fractionum ſimplicium paragrapho ſexto expoſitarum, quae aequiualent fractioni continuae toties repetitae quoties vnitas continetur in exponente N, quam fractionem voco N membrem. Igitur haec ſolutio, ex theoria ſerierum recurrentium petita, infinities generalior eſt ſolutione ſuperius paragrapho ſecundo expoſita ſimulque vno intuitu totius argumenti imaginem repraeſentat. Verum ad cauſam propero principalem.

§. 9. Quaeritur nunc tandem, quisnam verus ſit valor expreſſionis noſtrae, ſi fractiones continuae in infinitum progrediantur, id eſt, ſi pro N numerus aſſumatur infinitus. Dico autem duos hic eſſe caſus a ſe inuicem diſtinguendos, prouti m fuerit numerus poſitiuus vel negatiuus. In priori caſu ſit terminus primus tam in numeratore quam in denominatore infinities maior quam terminus ſecundus; in altero contrarium obtinet, igitur ſi fuerit m numerus poſitiuus, reiiciendus erit ſecundus terminus numeratoris aeque ac denominatoris atque ſic valor formulae generalis in praecedente paragrapho expoſitae ſit

$$= \frac{2(m+\sqrt{4+mm})^{N}}{(m+\sqrt{4+mm})^{N+1}} \text{ ſiue } = \frac{2}{m+\sqrt{4+mm}}:$$

Nec valor iſte differt a valore in paragrapho ſecundo, vbi altera methodo inuenimus

$$S = \frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2}; \text{ eſt ſcilicet } \frac{2}{m+\sqrt{4+mm}} = \frac{-m+\sqrt{4+mm}}{2},$$

quod ſola multiplicatio per crucem indicat. Quod ſi fuerit m numerus negatiuus ; reiiciendus erit primus terminus relatus ad ſecundum, tam in numeratore quam denominatore formulae in praecedente paragrapho inuentae, quo facto habetur

$$\frac{-2(m-\sqrt{4+mm})^{N}}{-(m-\sqrt{4+mm})^{N+1}} \text{ ſiue } \frac{2}{m-\sqrt{4+mm}},$$

in qua poſtrema formula ſi m mutetur in $-m$; oritur negatiue idem valor, qui affirmatiue valet pro altero caſu, quod idem in paragrapho quinto demonſtraui.

§. 10. Simili modo pertractandae erunt omnes fractiones continuae infinitae, quae vbique perfecte recurrunt pro quauis noua fractione, vnde indoles expreſſionum noſtrarnm haud parum dilucebit: Exempla huius animaduerſionis ſequentia allegabo.

$$\text{I. } \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{II. } \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\text{etc.}}}}} + = -1+\sqrt{3}$$

$$\text{III. } \cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\cfrac{m}{m+\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{4m+mm}}{2}$$

$$\text{IV. } \cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{4n+mm}}{2}$$

V.

V. $$\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+\cfrac{n}{-m+n+\text{etc.}}}}} = \frac{m-\sqrt{4n+mm}}{2}$$

VI. $$\cfrac{-n}{m-\cfrac{n}{m-\cfrac{n}{m-\cfrac{n}{m-\text{etc.}}}}} = \frac{-m+\sqrt{mm-4n}}{2}$$

VII. $$\cfrac{-n}{-m-\cfrac{n}{-m-\cfrac{n}{-m-\cfrac{n}{-m-\text{etc.}}}}} = \frac{m-\sqrt{mm-4n}}{2}.$$

Hae variae formulae varia nobis ſubminiſtrant corollaria notatu haud indigna, quorum praecipua nunc indicabo.

§. 11. (*a*) Ex tribus prioribus exemplis inter ſe collatis apparet, non licere terminos fractionum, id eſt, numeratorem ac denominatorem mutare, etiamſi valor vniuscuiusque fractionis inde non mutetur, atque ſingulas fractiones perfecte eodem modo eſſe vbique replicandas tam ratione terminorum quam ſignorum.

(*b*) Hinc etiam ſequitur, diuerſa ab inuicem eſſe exemplum quartum et ſeptimum, etiamſi fractiones $\frac{n}{m}$ et $\frac{-n}{-m}$ per ſe ſumtae alias recte cenſeantur inter ſe aequales: Notetur autem, numeros n et m poni per ſe poſitiuos in formulis noſtris et a ſolis ſignis praefixis + vel — indicari an ſint affirmatiue vel negatiue accipiendi. Mutatio fractionis $\frac{n}{m}$ in $\frac{-n}{-m}$ nihil aliud eſt quam terminorum multiplicatio per -1. Sed nullae multiplicationes, quae formam fractionis vllo modo permutent, admittendae ſunt.

(*c*) Ob eandem rationem differt exemplum quintum a ſexto, quia ſcilicet forma differunt ab inuicem fractiones $\frac{n}{-m}$ et $\frac{-n}{m}$, vtut valore ſuo eaedem.

(*d*) Tanta vis ineſt duabus praecedentibus notis, vt valor appoſitus in exemplo quarto ſit ſemper realis, qui poteſt fieri imaginarius in exemplo ſeptimo atque idem intelligendum eſt de exemplis quinto et ſexto.

(*e*) Lex generalis theoriae noſtrae haec eſt vt, quando literae *n* ſignum negatiuum praeponitur, idem ſignum ſit praeponendum literae *n* in quantitate radicali, ſicuti videtur in exemplo ſexto ac ſeptimo: Verum quando ſignum negatiuum numero *m* eſt praefixum, ſicuti in exemplo quinto et ſeptimo, tunc non ſolum ſignum contrarium, in valore fractionum continuarum, praeponendum eſt literae *m*, ſed integra quantitas radicalis ſub ſigno negatiuo adhibenda eſt.

(*f*) In ſolis exemplis VI et VII. emergens valor fieri poteſt imaginarius et fit imaginarius, ſi fuerit $n > \frac{1}{4}mm$. De hoc caſu paucula ſeorſim dicam.

§. 12. Videamus igitur, quemadmodum fractiones continuae infinitae in praememorato caſu ſuam indolem, ſtatum ſcilicet imaginarium, prodant atque hunc in finem vnicum allegemus exemplum. Ponatur $n = 1$ et $m = 1$ atque adeo $n > \frac{1}{4}mm$: Sic oritur valor fractionum pro exemplo ſexto §. 10. $= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ac pro exemplo ſeptimo $= \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$: Quod ſi autem ipſae expreſſiones ordine ſuo euolvantur,

vantur, progrediendo ab fractione vni-membri, ad fractionem bimembrem, trimembrem, quadrimembrem etc. oriuntur ſucceſſiue pro vtroque exemplo ſequentes termini

$-1, -\infty, 0, -1, -\infty, 0$ — etc. in caſu priore atque

$1, +\infty, 0, 1, +\infty, 0$, etc. in caſu poſteriore atque hae ambae ſeries ſic in infinitum progrediuntur pro ſingulis trinis terminis ſubſequentibus, nec adeoque ad valorem fixum conuergere poſſunt, vnde non mirum inuentum valorem radice imaginaria exprimi.

In ipſo limite inter vtrumque ſtatum, vbi ſcilicet eſt $n = 1$ et $m = 2$, reſultans ſeries terminorum ſua ſpecie aliquid intermedii habet, quandoquidem pro exemplo ſexto inuenitur ſeries

$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}$, — etc.

quae eadem cum ſignis affirmatiuis valet pro exemplo ſeptimo, quaeque proprie non pertinet, ſiue numeratores ſiue denominatores ſpectentur, ad recurrentes: attamen vterque terminorum ordo hac gaudet proprietate, vt quiuis terminus compoſitus ſit ex duplo termino praecedente demto ante-praecedente. Demonſtraui autem in veteribus Commentariis, ſimili titulo omnes ſeries, quae dicuntur, algebraicas, pertinere ad ſeries recurrentes. Ex praememorata ſerie terminorum per ſe liquet, fore terminum infiniteſimum aequalem vnitati ſiue negatiue ſiue affirmatiue ſumtae,

prout

prout ſermo ſit de exemplo ſexto vel ſeptimo, id quod etiam formulae noſtrae appoſitae indicant.

§. 13. Hactenus de fractionibus continuis infinitis earumque valore, in quibus perfecte eadem fractio haud interrupta vbique recurrat. Progredior ad ordinem ſecundum, quem ita voco, quando binae fractiones alterno ordine perpetuo recurrunt.

Ponam duas fractiones qualescunque $\frac{n}{m}$ et $\frac{q}{p}$, ex quarum perpetuo recurſu formetur fractio continua in infinitum extenſa ſequentem in modum

$$\cfrac{n}{m + \cfrac{q}{p + \cfrac{n}{m + \cfrac{q}{p + \cfrac{n}{m + \text{etc.}}}}}}$$

quaeritur valor huius expreſſionis ex infinitis fractionibus compoſitae. Sit rurſus valor iſte $= S$ atque puta duos nouos teminos expreſſioni praefigi ſeruata eius lege; habebis

$$\cfrac{n}{m + \cfrac{q}{p + S}} \text{ ſiue } \frac{np + nS}{mp + mS + q};$$

haec autem mutatio reſtituit perfecte fractionem continuam propoſitam vtpote in infinitum extenſam. Erit igitur $\frac{np + nS}{mp + mS + q} = S$. vnde inuenitur

$$SS + \frac{mp + q - n}{m} S = \frac{np}{m} \text{ ac denique}$$

$$S = \frac{n - mp - q + \sqrt{4mnp + q - n)^2}}{2m}.$$

Ex iſta formula ſequentia defluunt corollaria.

(*a*) Si ponatur $q = n$ et $p = m$, obtinetur

$$S = \frac{-m + \sqrt{4n + mm}}{2},$$

quod

quod conforme eſt exemplo quarto paragraphi decimi.

(*b*) Si $q = 0$ fit $S = \frac{n}{m}$, atque ſic in propoſita expreſſione fractionum continuarum ſola remanet fractio prima $\frac{n}{m}$, reliquis omnibus euaneſcentibus. Sed ſi in valore S accipiatur quantitas radicalis negatiue, fit $S = -p$, qui valor reuera hypotheſi noſtrae analytice ſatisfacit, ſimul autem applicatione ſua inutilis eſt.

(*c*) Si reſcindatur prima fractio $\frac{n}{m}$ ita, vt expreſſio incipiat ab fractione $\frac{q}{p}$, indeque prorſus continuetur, vt ante; tunc mutabitur valor expreſſionis mutatusque eadem methodo reperitur vt ante; Sed et absque vllo nouo calculo inuenitur conuertendo ſimpliciter, in priori expreſſione, literas n et q pariter atque literas m et p, atque ſic alter iſte valor expreſſionis fractionis continuae, quem vocabo σ, ſequenti modo exprimitur,

$$\sigma = \frac{q - pm - n + \sqrt{4pqm + (pm + n - q)^2}}{2p}.$$

Simul autem ipſa argumenti natura facit $S = \frac{n}{m + \sigma}$, quod ex ſola expreſſione propoſita patet, vnde plura compendia in calculis locum inuenient.

§. 14. Singulae praecedentis paragraphi formulae egregie contrahuntur, ſi omnes numeratores ponantur vnitati aequales, ſeruatis denominatoribus m et p, quo facto talis oritur expreſſio in infinitum continuanda.

$$\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{m+\text{etc.}}}}}}$$

quae ſupponit $n = q = 1$, hisque ſubſtitutis valoribus, prouenit

$$S = \frac{-p+\sqrt{(pp+\frac{4p}{m})}}{2} \text{ atque } \sigma = \frac{-m+\sqrt{(mm+\frac{4m}{p})}}{2},$$

ſitque ſimul, ſi inuenti valores S et σ ſubſtituantur, $S = \frac{1}{m+\sigma}$, quam ſimplicitatem haud expectasſem, niſi illam praecognitam habuiſſem. Caeterum et hic, quod iam ſupra §. 11. coroll. (*c*) in caſu ſimili monui, probe diſpiciendum, an quantitates radicales negatiue ſint accipiendae vel affirmatiue. Quoties terminus $\frac{4p}{m}$ eſt negatiuus; atque ſi ſimul fuerit $\frac{4p}{m} > pp$, ſiue $p < \frac{4}{m}$ fiunt valores S et σ imaginarii.

Exempl. 1. ſit $m = 1$ et $p = 2$; habetur

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1+\text{etc.}}}}} = S = \frac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3};$$

tum etiam, reſecto primo membro, fit

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}} = \sigma = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Qnod

Quod ſi vero in iſto exemplo fractiones continuae mutentur in fractiones ſimplices ſucceſſiue pro vno, duobus, tribus etc. membris, fit ſucceſſiue

$$S = 1.\ \tfrac{2}{3}.\ \tfrac{3}{4}.\ \tfrac{8}{11}.\ \tfrac{11}{15}.\ \text{et}\ \sigma = \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{3}{8}.\ \tfrac{4}{11}.\ \tfrac{11}{30},$$

vbi iam quintus terminus proxime accedit ad verum inuentum valorem indicatum.

Exempl. 2. Ponatur nunc, retentis reliquis denominatoribus, $p = -5$; habebitur

$$\cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 - etc.}}}}} = S = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Reſectoque primo membro oritur pro expreſſione ſocia

$$-\cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 - etc.}}}} = \sigma = \frac{-1 + \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}.$$

Quod ſi fractiones continuae ſucceſſiue permutentur in fractiones ſimplices, hae ſatis cito conuergunt ad determinatos valores S et σ, etiamſi pro priori mutatum fuerit ſignum quantitati radicali praefixum, pro altero retentum, cuius rei ratio peritiores haud effugiet.

Exempl. 3. Sit porro $p = -4$, pro qua poſitione vtrobique quantitas radicalis euaneſcit fitque $S = +2$ et $\sigma = -\frac{1}{2}$. fractiones autem ſimplices pro hoc exemplo oriuntur ſucceſſiue

$1.\ \frac{4}{3}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{8}{5}.\ \frac{5}{3}.$ etc. pro S et $-\frac{1}{4}.\ -\frac{1}{3}.\ -\frac{3}{8}.\ -\frac{2}{5}.\ -\frac{5}{12} -$ etc. pro σ vterque quidem valor ad praeſcriptum accedit, at lentius.

Exempl. 4. Denique ponatur $p = -2$, quae poſitio facit

$S = \frac{2 - \sqrt{-4}}{2}$ vel $= 1 - \sqrt{-1}$ ac $\sigma = \frac{-1 + \sqrt{-1}}{2}$; vterque valor imaginarius eſt, ynde colligendum eſt, fractiones ſimplices, fractionibus continuis ſucceſſiue ſubſtitutas, ad nullum conuergere valorem fixum, quod quidem ex ipſis fractionibus ſimplicibus reſultantibus confirmatur, vtpote quae ſunt 1. 2. ∞. 0. 1. etc. pro valore S ſimulque $-\frac{1}{2}. -1. \infty. 0. -\frac{1}{2}. -$ etc. pro valore σ.

§. 15. Eadem, qua vſi ſumus methodo, pertractari poterunt fractiones continuae tertii vel cuiuscunque altioris ordinis, in quibus nimirum eaedem fractiones, eodem ordine ſub eodemque ſigno recurrunt poſt quamuis periodum, ſiue ex tribus ſiue ex pluribus fractionibus compoſita ſit; hanc obſeruationem vnico illuſtrabo exemplo et quidem paulum compendiario. Proponatur nempe expreſſio in infinitum continuata

$$\cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}}}} = S.$$

Reperitur talis aequatio $S = \frac{1 + pr + pS}{m + r + mpr + S + mpS}$. ſit, verbi gratia, $m = 1$; $p = 2$ et $r = 3$, habebitur $S = \frac{-4 + \sqrt{37}}{3}$, qui valor facillima appropinquatione confirmatur. Quod ſi vero aſſumitur $r = p = m$ obtinebitur aequatio

$$mmSS + SS + m^3S + mS = mm + 1 \text{ vel } SS + mS = 1$$

$$\text{vel } S = \frac{-m + \sqrt{4 + mm}}{2},$$

prou-

prouti inuenimus §. 2. Efficietur etiam vt valor emergens S fiat pure rationalis, ſi aſſumatur arbitraria $p = -\frac{1}{m}$ tunc enim fit ſimpliciter $S = \frac{m-r}{mm+1}$. Ponatur, exempli gratia, $m = 2$; $p = -\frac{1}{2}$; $r = 1$; ſic expreſſio recte diſpoſita proueniet

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}} = S = \frac{1}{5}.$$

Quotuscunque autem fuerit ordo fractionum continuarum, id eſt, ex quotcunque membris periodus quaeuis compoſita ſit, valor S ſemper aequatione quadrata poterit exprimi

§. 16. Qui praefatam contulerit theoriam cum Euleriana (vid. nou. Commentar. Acad. Tom. XI. pag. 28.) ſimulque cum ea, quae extat in elementis Algebrae *Euleri* vel potius in additionibus huius operis, multas paſſim obſeruabit concluſiones, egregie conſpirantes, etiamſi methodo diuerſa erutas; modum autem noſtrum ſuis peculiaribus aliquando gaudere poſſe commodis proxima occaſione exponam. Impraeſentiarum non alio fine negotium iſtud ſuſcepi, quam vt examinarem, quibus in caſibus expresſiones *fractionales* infinitae formula definiri poſſint finita ſiue algebraica ſiue *tranſcendentali*, cuiusmodi eſt Brounkeriana a quadratura circuli pendens. Subſidium ab inductione expectabam, adhibita methodo §. §. 6, 7, 8 et 9 expoſita; ſperabam me perueturum

turum ad ſeries recurrentes altiorum ordinum quarum terminus generalis ſemper eſt in poteſtate, at ſpes me fefellit: Vidi potius quid non ſit quam quid ſit. Nouas orſus ſum disquiſitiones ab exemplo, poſt periodicas fractiones, ſimpliciſſimo, ponendo in ſingulis fractionibus vnitatem pro numeratore et numeros naturales pro denominatoribus ſingulis ſe inuicem ſubſequentibus: Nempe fractio continua haec eſt,

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\text{etc.}}}}}}$$

nec puto legem progreſſionis fingi poſſe ſimpliciorem.

§. 17. Analyſin pro hoc exemplo ſic rurſus inſtitui: Commutaui fractiones continuas in ſimplices incipiendo a fractione vni-membri indeque progrediendo ad fractionem continuam bimembrem, trimembrem, quadrimembrem et ſic porro, hoc modo obtinui ſucceſſiue ſequentes valores

$$\frac{1}{1}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{7}{10}.\ \frac{30}{43}.\ \frac{157}{225}.\ \frac{972}{1393}.\ \frac{6961}{9976}.\ \frac{5660}{81201}.\ \frac{516901}{740785}.\ \frac{5225670}{7489051}.\ \frac{57999271}{82120346}.\ \text{etc.}$$

In his fractionibus tam numeratores quam denominatores notabili gaudent proprietate communi, cuius ope absque vllo negotio in immenſum continuari poteſt fractionum progreſſio: Sint ſcilicet ſiue in ſerie numeratorum ſiue in ſerie denominatorum tres termini contigui A, B et C, ſitque index termini $C = n$, erit $C = nB + A$: ſic quintus numerator 157 fit $= 5 \times 30 + 7$ pariterque quintus denominator $225 = 5 \times 43 + 10$. Gaudet

Gaudet praeterea iſta fractionum ſeries hac proprietate vt, ſi bini termini qualeſcunque per crucem multiplicentur, ambo producta ſola vnitate differant, alternis vicibus in exceſſu atque defectu: Sic ſi numerator termini noſtri decimi multiplicetur per denominatorem vndecimi, prodit numerus

434359498481820

atque ſi numerator vndecimi multiplicetur per denominatorem decimi idem oritur numerus ſola vnitate auctus; ſequitur exinde, fractiones mox fieri inter ſe tantum non aequales; confirmatam habebimus hanc conſequentiam, ſi fractionem quintam $\frac{157}{225}$, parum a prima remotam, comparemus cum vndecima $\frac{5799271}{8312346}$ quae vltima eſt a nobis computata, videbimus fractionem priorem ſuper alteram peccare in exceſſu at vix ſenſibili; Sic igitur acquieſcere poterimus praefato valore $\frac{5799271}{8312346}$ ſiue fractione decimali 0,6978. Dubium non eſt, quin detur formula verum valorem geometrica accuratione determinans, conceſſis praeſertim quadraturis vel ſignis ſummatoriis; at eius inuentio noua in calculo inſtituendo requirere videtur artificia.

DISQVI-

DISQVISITIONES VLTERIORES DE INDOLE FRACTIONVM CONTINVARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§ 1.

Cum nuper, data occaſione, theoriam de fractionibus continuis ruminarem, incidi, vt fieri plerumque ſolet, in aliquot huius argumenti proprietates, quae viſae fuerunt notatu digniores, quasque partim in ſuperiori transactione expoſui: quas reliquas feci exponam in praeſente, non quod altioris indaginis eas crediderim, ſed quod non meminerim fuiſſe indicatas ſaepeque non ſine matura diiudicatione interpretandas putem.

Vſus fractionum continuarum ſaepiſſime requirit, vt in fractiones ſimplices permutentur, ita vt hae fiant ſucceſſiue aequales fractionibus continuis incipiendo ab vnimembri indeque progrediendo ad bimembres, trimembres et ſic porro. Duo dedi huius praecepti exempla in priori transactione §. §. 6. 16 et 17. Obſeruaui autem hac de re regulam generalem pro fractionibus continuis qualibuscunque et vtcunque variabilibus.

§. 2.

§. 2. Fractionem continuam ſub forma conſiderabo generaliſſima, quae ita ſe habet,

$$\cfrac{a}{\alpha+\cfrac{b}{\beta+\cfrac{c}{\gamma+\cfrac{d}{\delta+\cfrac{e}{\varepsilon+\cfrac{f}{\phi+\text{etc.}}}}}}}$$

huius adeoque membra, quae vocabo *indices*, ſunt

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot\frac{f}{\phi}\ \text{etc.}$$

Abſit autem, vt dicamus, rem eſſe merae curioſitatis numeratores

$$a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.\ \text{etc.}$$

generaliter exprimere, cum ſufficiat vnitatem pro ſingulis numeratoribus adhibere. Conuertamus fractionem continuam in fractionem ſimplicem, pro vno, duobus, tribus etc. membris, atque ſic habebimus ſucceſſiue ſequentes fractiones ſimplices

$$\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{a\beta}{\alpha\beta+b}\cdot\frac{a\beta\gamma+ac}{\alpha\beta\gamma+b\gamma+\alpha c}\cdot\frac{a\beta\gamma\delta+ac\delta+a\beta d}{\alpha\beta\gamma\delta+b\gamma\delta+\alpha c\delta+\alpha\beta d+bd}\cdot$$

$$\cdot\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon+ac\delta\varepsilon+a\beta d\varepsilon+a\beta\gamma e+ace}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon+b\gamma\delta\varepsilon+\alpha c\delta\varepsilon+\alpha\beta d\varepsilon+bd\varepsilon+\alpha\beta\gamma e+b\gamma e+\alpha ce}\ \text{etc.}$$

Apparet ergo, quam faſtidioſum foret opus, haſce fractiones multo vlteriores proſequi, cum tam numeratores quam denominatores continue magis magisque fiant compoſiti: decima iam fractio numeratorem habebit ex quinquaginta quinque membris et denominatorem ex octuaginta nouem compoſitum.

 Atta-

Attamen non alio ſine totum ſuſcipitur negotium, quam vt fractio remotior reperiatur, quae vix diſſerat a fractionibus ſequentibus; haec enim natura eſt fractionum continuarum infinitarum, vt niſi, veluti data opera, indices $\frac{a}{\alpha} . \frac{b}{\beta} . \frac{c}{\gamma}$. etc. varie intorqueantur, ad valorem conuergant conſtantem.

§. 3. Cum igitur non minus neceſſarium ſit quam operoſum, vt fractio continua, pluries nouo membro aucta, in fractionem ſimplicem conuertatur; peroportune mihi contigit compendium, quo omnis in continuandis fractionibus ſimplicibus labor inſigniter ſubleuatur, ita vt currente veluti calamo noua quaeuis fractio ſimplex formari atque conſcribi poſſit; compendium iſtud generale eſt, quacunque lege fractio continua progrediatur ſiue regulari ſiue pro arbitrio variata, id eſt, vtcunque progrediantur indices fractionis continuae, quos vocaui

$$\frac{a}{\alpha} . \frac{b}{\beta} . \frac{c}{\gamma} . \frac{d}{\delta} . \frac{e}{\varepsilon} . \frac{f}{\phi} \text{ etc.}$$

Sint duae vltimae fractiones ſimplices iam inventae $\frac{M}{N}$ et $\frac{P}{Q}$ atque denotet $\frac{f}{\phi}$ indicem fractionis ſimplicis proxime ſubſequentis, dico fore hanc novam fractionem $= \frac{P\phi + Mf}{Q\phi + Nf}$: Igitur tota regula pro inuenienda noua fractione in hoc conſiſtit, vt numerator vltimae fractionis multiplicetur per denominatorem noui indicis atque numerator penultimae fractionis per numeratorem noui indicis: Sic erit aggregatum productorum aequale numeratori nouae fractionis ſiue $= P\phi + Mf$, atque ſi eadem plane operatiuncula repetatur cum denominatoribus inuentis

tis Q et N, habebitur nouus denominator $= Q\Phi + Nf$: integra autem ſuperueniens fractio ſimplex erit $= \frac{P\Phi + Mf}{Q\Phi + Nf}$; ſic aliud non requiritur, quam vt inter ſcribendum praememorato modo literae Φ et f iuxta ponantur. Secundum hanc normam fiet in praecedente paragrapho fractio ſimplex ſexta =

$$\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon\Phi + ac\delta\varepsilon\Phi + a\beta d\varepsilon\Phi + a\beta\gamma e\Phi + ace\Phi + a\beta\gamma\delta f + ac\delta f + a\beta d f}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\Phi + b\gamma\delta\varepsilon\Phi + \alpha d\varepsilon\Phi + \alpha\beta e\Phi + bd\varepsilon\Phi + \alpha\beta\gamma e\Phi + b\gamma e\Phi + \alpha ce\Phi + \alpha\beta\gamma\delta f + b\gamma\delta f + \alpha c\delta f + \alpha\beta d f + b d f.}$$

Praeſtantiſſimum vtique eſt hoc compendium, ſimul autem ſatis obuium, vt mihi vix peſuadere poſſim, a nemine adhuc fuiſſe ante me animaduerſum. Quod ſi vero, relictis expreſſionibus analyticis, ad exempla pure arithmetica et numerica deſcendamus, quaevis fractio, ex ſolo vno numeratore et denominatore conſtans, ſimpliciſſimam poſtulat multiplicationem per numerum f et Φ.

§. 4. Expoſito non obſtante adminiculo, taedioſus requiritur calculus ad fractionem ſimplicem remotiorem determinandam, quoties indices $\frac{a}{\alpha}$. $\frac{b}{\beta}$. $\frac{c}{\gamma}$. etc. maioribus numeris iisque in progreſſu ſuo valde divergentibus exprimuntur. Arripio hanc occaſionem pauca quaedam dicendi de famoſa fractione continua Brounckeriana, quae omnium prima ab Illuſtri Auctore in ſcenam producta fuit. In hac fractione continua, indices $\frac{a}{\alpha}$. $\frac{b}{\beta}$. $\frac{c}{\gamma}$. etc. ita progrediuntur

$$\frac{1}{2}.\ \frac{9}{2}.\ \frac{25}{2}.\ \frac{49}{2}.\ \frac{81}{2}.\ \frac{121}{2}.\ \text{etc.}$$

Ipſa autem fractio continua in infinitum producta indicare dicitur exceſſum quadrati ſuper circulum ei inſcriptum, vnitate expreſſum: At certe fractio continua

tinua reſultans pro aliquo indicum numero hoc laborat incommodo, vt non ſolum ad magnos protinus perducat numeros, ſed et ipſi valores lento ac vago gradu ad verum accedant, cuius rei ratio poſita eſt in magna diuergentia indicum; ſola ſpecioſa nouitatis gratia expreſſionem Brouncherianam ab obliuione eripuit: Cum autem non liceat absque maximo labore fractionem continuam ad magnum terminorum numerum euehere eiusque valorem explorare, *Walliſius* correctionem adhibuit pro vltimo indice, in quo ſubſiſtere placet, et quidem pro eius denominatore; haec correctio in eo conſiſtit, vt, loco binarii, in vltimo denominatore ponat binarium auctum radice numeratoris: Vi huius correctionis, ſi in ſeptimo indice ſubſiſtere lubeat, hic faciendus erit $= \frac{169}{2+13}$ vel $= \frac{169}{15}$ mutato denominatore 2 in 15. Ergo in hoc exemplo ſeptem indices veriores erunt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{49}{2} \cdot \frac{81}{2} \cdot \frac{121}{2} \cdot \frac{169}{15}:$$

Hi indices ſubminiſtrant ſequentes ſucceſſiue fractiones ſimplices

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{29}{75} \cdot \frac{156}{789} \cdot \frac{2661}{7734} \cdot \frac{24191}{115937} \cdot \frac{712679}{2971101},$$

quarum vltima etſi correcta valde adhuc deficit a vero expreſſionis, in infinitum continuatae, valore. Quod ſi vltimae fractioni vnitatem addamus, habebimus proxime valorem quadrati circulo circumſcripti, poſito ipſo circulo aequali vnitati; vnde deducitur ratio quadrati ad circulum inſcriptum vt 3683780 ad 2971101, quae iuxta minor eſt in ratione proxime vt 39 ad 40. Si in ſeptimo termino

no correctio (qua index naturalis $\frac{169}{2}$ mutatus fuit in $\frac{169}{15}$) non adhibita fuiſſet, vltima fractio ſimplex oritura fuiſſet $\frac{498105}{1528920}$, ex qua deducitur ratio inter quadratum et circulum vt 2027025 ad 1528920 quae ratio nunc peccat in exceſſu in ratione proxime vt 27 ad 26. vnde concludo expreſſionem continuam Brouncherianam infinitam per ſe tardiſſime ad ſcopum tendere nec correctionem vltimi termini a *Walliſio* deſcriptam eſſe admodum efficacem: aliam exponam correctionem, quae viſa mihi fuit haud parum efficacior et quae quodammodo inſeruire poterit in confirmationem ſingularis theorematis Brouncheriani. Conuertamus fractiones ſimplices, omiſſa correctione Walliſiana, nempe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} \cdot \frac{29}{76} \cdot \frac{156}{789} \cdot \frac{2661}{7734} \cdot \frac{24158}{110737} \cdot \frac{498125}{1528920}$$

in fractiones decimales, quae erunt

0,5000; 0,1538; 0,3816; 0,1977; 0,3441; 0,2181; 0,3257;

theorema autem Brouncherianum indicat fractionem 0,2732, ad quam progreſſio fractionum ſimplicium conuergere et denique tantum non attingere deberet. Quis huiusmodi approximationem dignam labore exiſtimet, cum vel vltimus terminus tam enormiter a vero valore recedat? Attamen ſi inter ſingulos binos terminos contiguos ſumantur media arithmetica, haec facile cum theoremate conciliabuntur; termini intermedii ſic ſe habebunt

0,3269; 0,2677; 0,2896; 0,2709; 0,2811; 0,2719.

Separentur hi termini in duas claſſes, alteram pro terminis ordine ſuo imparibus, alteram pro paribus: prima claſſis conſtabit ex terminis

0, 3269 ; 0, 2896 ; 0, 2811 ;

ſecunda ex terminis

0, 2677 ; 0, 2709 ; 0, 2719 ;

In vtraque claſſe valores perſpicuis paſſibus tendunt ad fractionem 0, 2732 ab Illuſtri *Brounckero* pro quatuor figuris erutam, et quidem deſcendendo in prima claſſe, aſcendendo in ſecunda; praeferenda autem eſt claſſis ſecunda, quia eius termini multo minus variabiles ſunt, atque ſufficiunt in illa tres termini in confirmationem theorematis, cuius demonſtratio directa tot ſpinis obſita eſt. Quod ſi autem media arithmetica inter ſucceſſiuos valores fractionum ſimplicium theorema confirmant, idem quoque confirmatum habebimus pro progreſſione fractionum ſimplicium ipſarum, quia tandem fiunt inter ſe aequales.

§. 5. Quae in praegreſſa diſſertatione §. §. 6 et 17. expoſui, caſus ſunt particulares regulae noſtrae generaliſſimae, §. 3. huiusce poſterioris transactionis, expoſitae: haec regula generalis eſt pro omnibus qualibuscunque fractionibus continuis, ad indices arbitrarios conſtructis, iisque ſiue abruptis ſiue in infinitum continuatis. Ergo progreſſio fractionum ſimplicium in genere tranſcendenter recurrens eſt, quia indices habet varibiles et pertinet ad ſecundum ordinem, quia quiuis terminus ex duobus prae-

praecedentibus conſtruitur; nemo autem, quod ſciam, docuit exprimere terminum generalem in huiusmodi ſeriebus tranſcendenter recurrentibus, niſi ſtudioſe efficiatur, vt indices vel recurrant periodice vel conſtanter iidem permaneant, quos caſus in prima noſtra diſſertatione pertractauimus et quos ſolos eſſe exiſtimo, qui fractionem continuam in infinitum continuatam reddant mutabilem in expreſſionem finitam ſiue algebraicam ſiue numericam. Praeter hoſce caſus nihil habemus niſi adpropinquationes ad verum quaeſitum valorem; tunc autem disquirendum eſt, vbinam conſultius ſit abrumpere operationem et quaenam correctio adhiberi poſſit, minori labore determinanda, ſi accuratiorem rei determinationem deſideremus: Atque in hoc negotio rite conſiciendo plurima colligere licet adminicula in paragrapho noſtro tertio, ſi attentius perpendatur.

§. 6. Si inter membra vel indices fractionis continuae aliquis occurrat, cuius numerator ſit $=0$, hic caſus etſi per ſe clarus aliquam meretur attentionem. Puta fractionem continuam ſucceſſiue mutatam in fractiones ſimplices aequiualentes, quarum duae vltimae ſint rurſus $\frac{M}{N}$ et $\frac{P}{Q}$, ſitque $\frac{f}{\Phi}$ index proxime imminens; erit proxima fractio ſimplex $=\frac{P\Phi+Mf}{Q\Phi+Nf}$ (§. 3.); pone $f=0$, habebis $\frac{P\Phi}{Q\Phi}$. Deinceps nouus ſuperueniat index qualiscunque $\frac{l}{\lambda}$, habebis proximam fractionem ſimplicem reſultantem $=\frac{P\Phi\lambda+Pl}{Q\Phi\lambda+Ql}$: pro alio ſequente indice qualicunque $\frac{m}{\mu}$, oritur ſequens fractio ſimplex $=\frac{P\Phi\lambda\mu+Pl\mu+P\Phi m}{Q\Phi\lambda\mu+Ql\mu+Q\Phi m}$ etc.

omnium

omnium harum fractionum ſimplicium communis eſt valor $\frac{P}{Q}$ nec adeoque porro variabilis, quacunque lege variabili indices progrediantur: Sint, verbi gratia, indices pro fractione continua $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{0}{1}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{3}{4}$ etc. Ex his formabuntur fractiones ſimplices ad ductum regulae §. 3. ſequentes $\frac{1}{1}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{6}{9}.\ \frac{22}{33}.\ \frac{106}{159}$ etc. Idem etiam ſequitur ex fractionibus ſimplicibus §. 2. expoſitis; fac ibi $c = 0$, fient ſingulae fractiones ſimplices, quae poſt ſecundam ſequuntur, ipſi ſecundae aequales ſiue $= \frac{a\beta}{\alpha\beta + b}$, ſi, deletis terminis in quibus eſt litera c, numeratorem et denominatorem dividas per eorum maximum communem diuiſorem. Sic pro fractione ſimplici ſexta, quae paragrapho tertio pleniſſime expoſita eſt, deletis praefatis terminis. oritur fractio

$$\frac{a\beta\gamma\delta\varepsilon\phi + a\beta d\varepsilon\phi + a\beta\gamma e\phi + a\beta\gamma\delta f + a\beta df}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\phi + b\gamma\delta\varepsilon\phi + \alpha\beta\delta\varepsilon\phi + bd\varepsilon\phi + \alpha\beta\gamma e\phi + b\gamma e\phi + \alpha\beta\gamma\delta f + b\gamma\delta f + \alpha\beta\delta f + b\delta f},$$

in qua tam numerator quam denominator communem habent diuiſorem

$$\gamma\delta\varepsilon\phi + d\varepsilon\phi + \gamma e\phi + \gamma\delta f + df$$

factaque diuiſione oritur ſimplex fractio $\frac{a\beta}{\alpha\beta + b}$. Egregie igitur congruunt expreſſiones noſtrae ipſi argumenti naturae. Sequitur ex inde quod error, qui ex abruptione fractionis continuae committitur, tanto minor eſt, quanto minorem habuerit numeratorem index proximus quantoque maiorem denominatorem. Caeterum hanc annotationem vnice in confirmationem formulae noſtrae §. 3. adiicere placuit.

§ 8. Aliam induit ſpeciem argumentum noſtrum, cum retentis denominationibus in praecedente paragra-

paragrapho adhibitis ponitur $\Phi = 0$, id eſt, cum in indice proxime imminente ponitur denominator $= 0$. Sint rurſus poſt duas vltimas fractiones, quas voco ſimplices, $\frac{M}{N}$ et $\frac{P}{Q}$ tres indices proximi $\frac{f}{\Phi}$; $\frac{l}{\lambda}$ et $\frac{m}{\mu}$, ponaturque $\Phi = 0$, manentibus caeteris qualibuscunque; prouenient inde ſequentes fractiones ſimplices

$$\frac{M}{N} \cdot \frac{P}{Q} \cdot \frac{Mf}{Nf} \cdot \frac{Mf\lambda + Pl}{Nf\lambda + Ql} \text{ et } \frac{Mf\lambda\mu + Pl\mu + Mfm}{Nf\lambda\mu + Ql\mu + Nfm}$$

Intelligitur ex duabus vltimis fractionibus, quare in tertia fractione retinendus ſit factor communis f; ratio nempe eſt, quod eſſentialiter concurrat ad formandos terminos ſequentes; poſtquam autem fractiones conſtructae ſunt, tunc demum in alios vſus licet illas ad minimos terminos reducere. Exinde videmus, *primo* quod valor nouae fractionis ſimplicis, indici reſpondentis, cuius denominator ponitur aequalis nihilo, ſit $= \frac{M}{N}$ ſiue $=$ fractioni ſimplici ante-praecedenti; ſic ſi ſextus index denominatorem habeat nihilo aequalem; orietur valor quartae fractionis; *ſecundo* quod eadem noua fractio non ſit exprimenda per $\frac{M}{N}$ ſed per $\frac{Mf}{Nf}$, multiplicando ſcilicet eius terminos per numeratorem indicis nouae fractioni reſpondentis.

Iam vero quaeritur, quomodo ambo haec praecepta conueniant cum formulis §. §. 2. et 3. exhibitis: id vt appareat vtar formula paragraphi tertii, in qua ſupponam $\Phi = 0$; pro hac ſuppoſitione contrahitur formula generalior in hanc ſpecialiorem

$$\frac{a\gamma\delta f + a\epsilon\delta f + a\epsilon\zeta f}{\alpha b\gamma\delta f + \beta\gamma\delta f + \alpha\epsilon\delta f + \alpha b\zeta f + b\zeta f},$$

cuius valor, facta diuiſione per f, eſt quartus ter-

minus §. 2. expoſitus. Sic igitur expreſſiones noſtrae generales egregie inter ſe cohaerent; verum vt et alteram partem confirmemus, nunc ſupponemus denominatorem γ, pro tertia fractione ſimplici, aequalem nihilo, vt et aliquot terminos ſequentes examinare poſſimus: fractio ſimplex tertia §. 2. haec eſt $\frac{a\beta\gamma + ac}{\alpha b\gamma + \beta\gamma + \alpha c}$; ponatur $\gamma = 0$ et prodibit tertia fractio ſimplex $\frac{ac}{\alpha c}$, cuius valor eſt $= \frac{a}{\alpha}$ atque adeo $=$ primae fractioni ſimplici: ſi vlterius pergatur, habebitur pro quarta fractione, poſito $\gamma = 0$, $\frac{ac\delta + a\beta d}{\alpha c\delta + \alpha b d + \beta d}$. Sic igitur habemus pro ſecunda fractione $\frac{a\beta}{\alpha b + \beta}$; pro tertia $\frac{ac}{\alpha c}$ atque pro quarta $\frac{ac\delta + a\beta d}{\alpha c\delta + \alpha b d + \beta d}$; ſic hae tres fractiones rectiſſime reſpondent regulae noſtrae §. 3. explicatae, ſecus atque fieret ſi pro tertia fractione $\frac{ac}{\alpha c}$ poneretur ſimpliciter $\frac{a}{\alpha}$, quia poſt duas fractiones ſimplices contiguas $\frac{a\beta}{\alpha b + \beta}$ et $\frac{a}{\alpha}$ haec eadem regula dat pro ſequente fractione ſimplice $\frac{a\delta + a\beta d}{\alpha\delta + \alpha b d + \beta d}$, cuius valor non idem eſt cum vero valore $\frac{ac\delta + a\beta d}{\alpha c\delta + \alpha b d + \beta d}$; vnicus eſt caſus, in quo conueniunt ambae expreſſiones, nempe cum ponitur $c = 1$.

Ex hiſce animaduerſionibus intelligimus, quod ſi fractiones continuas ſucceſſiue omnes transformare velimus in fractiones ſimplices eumque in finem quamuis fractionem ſimplicem formare ex duabus praecedentibus fractionibus iamiam inuentis, ſecundum regulam noſtram §. 3. deſcriptam, quod, inquam, non liceat fractiones ſimplices reſultantes ad mino-

minores terminos reducere, etiamſi id fieri poſſit. Haec omnia veram theoriam de fractionibus continuis, ſiue abruptis ſiue in infinitum progredientibus, ſub forma generaliſſima ſpectatam illuſtrant.

§. 8. Vnum ſupereſt hac occaſione minime ſilentio praetermittendum: nempe vt omnis circumſpectio adhibeatur, quando indices occurrunt negatiui. Si aliquis datur index negatiuus, diſpiciendum erit an negatiuus ponendus ſit ob numeratorem negatiuum poſito denominatore affirmatiuo, an ob denominatorem negatiuum poſito numeratore affirmatiuo; ſin in fractione continua abrupta vltimus index fuerit negatiuus, vterque modus eodem recidit, at aliter ſe res habet, ſi de aliquo indice intermedio ſermo ſit; tunc enim inter ſe differunt fractiones $\frac{-s}{t}$ et $\frac{s}{-t}$, non per ſe ſed ob diuerſitatem quam ſequentibus membris in fractione continua iniiciunt, igitur quisque analyſta rem omnem accuratiſſime ſecum determinet: optime extricabimus quaeſtionem per exemplum.

Sermo ſit de ſecundo indice $\frac{b}{\mathfrak{b}}$; ſi quis hunc indicem reducere velit ad duos trientes negatiue ſumptos, nondum ſatis ſuam ſententiam aperuit; an ponet $\frac{-2}{3}$ an $\frac{2}{-3}$ vel etiam $\frac{-\frac{2}{3}}{1}$ vel $\frac{\frac{2}{3}}{-1}$? Singuli caſus pro re nata locum habere poſſunt aeque ac innumeri alii, quandoquidem nihil impedit, quominus literis b et $\mathfrak{b}$ numeros fractos ſubſtituamus: igitur, vt tollatur omnis ambiguitas, requiritur vt

pro quouis indice tam numerator quam denominator, vnusquisque cum ſuo vero ſigno ſimulque cum praeſcriptis terminis, vt, inquam, haec omnia rite indicentur et quidem tam ratione fractionum per ſe affirmatiuarum, quam negatiuarum, quandoquidem etiam inter ſe differre cenſendi ſunt indices $\frac{+b}{+\beta}$ et $\frac{-b}{-\beta}$. Poſtquam ſinguli indices hoc modo exacte fuerunt praeſcripti, erunt, in fractione continua formanda ſingula membra ſigno affirmatiuo inter ſe connectenda. Sic ſi pro fractione formanda tri-membri proponantur tres indices $\frac{1}{1}.\ \frac{-2}{3}.\ \frac{2}{1}$, fiat $a = 1$; $\alpha = 1$; $b = -2$; $\beta = 3$; $c = 2$ et $\gamma = 1$ formabiturque fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{-2}{3+\cfrac{2}{1}}},\ \text{cuius valor} = \tfrac{5}{3},$$

quem etiam formula noſtra $\frac{\alpha\beta\gamma + \alpha c}{\alpha\beta\gamma + b\gamma + \alpha c}$ (§. 2.) recte indicat; at ſi indices proponatur $a = 1$; $\alpha = 1$; $b = 2$; $\beta = -3$; $c = 2$ et $\gamma = 1$, formabitur fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{-3+\cfrac{2}{1}}}\ \text{cuius valore nunc} = -1,$$

quem rurſus eadem formula noſtra optime indicat; ſi porro indices ſint formati ex valoribus $a = 1$; $\alpha = 1$; $b = -2$; $\beta = -3$; $c = 2$ et $\gamma = 1$ formabitur fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{-2}{-3+\cfrac{2}{1}}}\ \text{quae eſt} = \tfrac{1}{3},$$

idem-

idemque valor denuo ex formula allegata oritur, cum tamen fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{2}{1}}}$$ ſit $= \frac{5}{7}$ ſiue immediate ſumta, ſiue per formulam aeſtimata: Alius rurſus valor oritur, ſi retentis caeteris denominationibus ponatur $b = \frac{2}{3}$ et $\beta = 1$: Ita pro fractione continua habemus

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{2}{3}}{1+\cfrac{2}{1}}}$$ cuius valor $= \frac{9}{11}$,

quem iterum exhibet formula noſtra ſub iisdem denominationibus.

§. 9. Nec dum ſic omnibus liberamur ambiguitatibus; poſtquam enim pro quouis indice fractionali, tam numerator quam denominator, vnusquisque cum vero ſuo ſigno ſiue affirmatiuo ſiue negatiuo, fuerunt probe definiti, inſuper definiendum erit an talis fractio ſit affirmatiue vel negatiue accipienda. Nos autem in praeſente pertractatione quemvis indicem ſub ſigno affiirmatiuo adhibuimus ita, vt in fractione continua, vnusquisque numerator ſub ſigno $+$ additus ſit praecedenti denominatori, cum tamen indici ſignum negatiuum praefixum eſſe poſſit; ſic index ita ſe habere poteſt $-(\frac{b}{\beta})$ vel $-(\frac{-b}{\beta})$ vel $-(\frac{-b}{-\beta})$. In huiusmodi caſibus licebit praefatos indices transformare, absque vlla laeſione valoris pro fractione contioua, modo denominator in indice nihil

hil mutetur; transformatio in eo conſiſtat vt ponatur $+\frac{-b}{\beta}$; $+\frac{b}{\beta}$; $+\frac{b}{-\beta}$; quo facto omnia ad hypotheſes et denominationes noſtras paragraphi ſecundi reducta habebimus. Sic fractio continua

$$\frac{1}{1}-\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{3}} = \frac{1}{1}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}} = \frac{7}{10},$$

pariterque fractio continua

$$\frac{1}{1}-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}} = \frac{1}{1}+\cfrac{-1}{2+\cfrac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

Inde deducitur regula, indices fractionales ita ſemper eſſe praeſcribendos vt in formanda fractione continua ſingulae fractiones ſub ſigno affirmatiuo inter ſe eſſe connectendas in anteceſſum ſupponatur; haec autem ſuppoſitio nihil demit vniuerſalitati theoriae noſtrae ſemperque locum habet.

§. 10. Vix ſatis praedicari poteſt neceſſitas, quae poſtulat, vt non ſolum ad valorem fractionis ſed et ad formam eius, tam ratione ſignorum quam terminorum attendamus: Qui indices fractionales formant, quorum ſinguli numeratores vnitate exprimuntur, hi minimam argumenti particulam exhauriunt, imo facile ſe in errorem praecipitant, quando theorema noſtrum paragraphi tertii adhibent ad valores fractionum continuarum ſucceſſiue determinandos. Hanc obſeruationem exemplo illuſtrabo.

Problema. Quaeritur progreſſio indicum fractionalium talis vt fractiones continuae inde formatae ſucceſſiue valores obtineant, qui ita progrediantur $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{5}{6}$. $\frac{6}{7}$. etc. Sint indices quaeſiti $\frac{1}{\alpha}$ $\frac{1}{\beta}$. $\frac{1}{\gamma}$ $\frac{1}{\delta}$. $\frac{1}{\varepsilon}$. $\frac{1}{\varphi}$. etc.

for-

formabitur inde fractio continua,

$$\cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}}}$$

cuius valores ſucceſſiue ponendi erunt aequales $\frac{1}{2}. \frac{2}{3}. \frac{3}{4}. \frac{4}{5}$ etc. hinc deducitur $\alpha = 2$, $\beta = -2$ pro duobus terminis initialibus: ex his fit pro tertio termino (§. 3.) $\frac{2\gamma + 1}{3\gamma + 2} = \frac{3}{4}$ ſiue $\gamma = -2$; deinceps pro termino quarto $\frac{3\delta + 2}{4\delta + 3} = \frac{4}{5}$ ſeu $\delta = -2$ etc. Sic indices quaeſiti $\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \frac{1}{\gamma}. \frac{1}{\delta}. \frac{1}{\varepsilon}. \frac{1}{\varphi}.$ etc. proueniunt $\frac{1}{2}. \frac{1}{-2}. \frac{1}{-2} \frac{1}{-2}. \frac{1}{-2}. \frac{1}{-2}$ etc. ipſaque fractio continua hanc induit formam

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-2 + \text{etc.}}}}}}}$$

quae ſucceſſiue ſequentes ſubminiſtrat valores ſeu fractiones ſimplices

$$\tfrac{1}{2}. \tfrac{2}{3}. \tfrac{5}{8}. \tfrac{12}{19}. \tfrac{29}{46}. \tfrac{70}{111}. \text{ etc.}$$

atque hi valores plane ſunt diuerſi a valoribus propoſitis $\frac{1}{2}. \frac{2}{3}. \frac{3}{4}. \frac{4}{5}. \frac{5}{6}. \frac{6}{7}.$ etc. Errorem proditurum non obſcure prouideram; vera obtinebitur ſolutio, ſi quaeſiti indices generaliter exprimuntur iisque vtamur ad normam §. 3. deſcriptam; ſint ſcilicet indices fractionales quaeſiti

$$\frac{a}{\alpha}. \frac{b}{\beta}. \frac{c}{\gamma}. \frac{d}{\delta}. \frac{e}{\varepsilon}. \frac{f}{\varphi} \text{ etc.}$$

quorum ſtatim duo priores vulgari calculo determinentur qui deinceps docebunt tam numeratores quam denominatores cum veris eorundem ſignis, hoc modo inue-

inuenitur

$a=1$; $b=-1$; $c=-1$; $d=-1$; $e=-1$; $f=-1$;

ſinguli autem denominatores ſiunt $=2$; ſunt itaque veri indices

$$\frac{1}{2}.\ \frac{-1}{2}.\ \frac{-1}{2}.\ \frac{-1}{2}.\ \frac{-1}{2}\ \text{etc.}$$

atque adeo fractio continua haec erit

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\cfrac{-1}{2+\text{etc.}}}}}$$

cuius ſucceſſiue valores ſecundum praeſcriptam legem ſunt $\frac{1}{2}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{3}{4}.\ \frac{4}{5}.\ \frac{5}{6}.\ \frac{6}{7}.$ etc.

Quod ſi vero, calculo vulgari abſque ſubſidio paragraphi tertii, ſinguli numeratores ponantur $=1$ atque ſucceſſiue determinentur denominatores; reperiuntur veri indices aliter expreſſi, nempe

$$\frac{1}{2}.\ \frac{1}{-2}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{-2}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{-2}\ \text{etc.}$$

tuncque fractio continua ſub alia forma, quamuis aequiualente, talis obtinetur

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-2+\text{etc.}}}}}}}$$

in qua denominatores ſignum alternant.

§. 11. Sequitur exinde huiusmodi fractiones continuas *a poſteriori* formari poſſe, quae pro quocunque membrorum numero dato praeſcriptum obtineant valorem; ſi in praefato exemplo numerus membrorum dicatur N, erit valor fractionis con-

tinuae

tinuae $= \frac{N}{N + n}$ atque, ſi fuerit infinita, aſſurget ad vnitatem, quod conforme eſt exemplo quarto paragraphi decimi prioris diſſertationis, reſciſſo enim primo membro, quod reliquum eſt, fit $= -1$; ergo ſumma fractionis continuae in infinitum continuatae ſit $= \frac{1}{-1} = 1$. Sic quoque pro valoribus ſucceſſivis $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{5}.\ \frac{5}{8}.\ \frac{8}{13}$ fiunt indices fractionales $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{1}.\ \frac{1}{1}.\ \frac{1}{1}.\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. Pro valoribus $\frac{1}{1}.\ \frac{3}{2}.\ \frac{5}{3}.\ \frac{7}{4}.\ \frac{9}{5}$ etc. reperientur indices

$$\frac{1}{1}.\ \frac{-1}{3}.\ \frac{-1}{2}.\ \frac{-1}{2}\ \text{etc.}$$

qui fractionem continuam in infinitum extenſam formant

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3 - \dots}} = 2,$$

vt legi praeſcriptae conforme eſt. Si velis, vt recurrentes valores prodeant, $\frac{1}{1}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{1}{1}.\ \frac{2}{3}.\ \frac{1}{1}.\ \frac{2}{3}$ etc.; aſſumes indices $\frac{1}{1}.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{0}.\ \frac{1}{0}.\ \frac{1}{0}\ \frac{1}{0}$ etc.

Quaecunque fingatur lex, qua valores in ſerie continua progredi ponuntur, ſi iſta lex talis ſit, vt terminus infiniteſimus exinde intelligatur, erit fractio continua in infinitum extenſa praefato termino infiniteſimo aequalis et quia non dari fractiones continuas infinitas exiſtimo, quarum valor algebraice determinari poſſit praeter illas, quarum indices fractionales, certo modo, recurrant; oportet, ſi recte iudico, vt pro huiusmodi caſibus, quaeſiti indices ſemper deſinant in terminos periodice recurrentes.

§. 12. Si quis integram hanc theoriam noſtram conferre velit cum ea, quam illuſtris geometra, *Leonhardus Eulerus* expoſuit in nouis commentariis tom. XI. pag. 33. et ſeq. ambas methodos

 noſtras

noſtras valde diuerſas quidem at minime contrarias deprehendet, ſimulque intelliget, quam neceſſe ſit, vt indicibus fractionalibus vtamur generalius expreſſis.

Praelaudatus Auctor multa habet *de euolutione radicum quadratarum per fractiones continuas*, atque methodum docet ingenioſam omnium numerorum integrorum radices quadratas ad fractiones continuas reducendi: Id vero infinitis modis fieri poteſt, nec enim quaeſtio per ſe eſt determinata: veruntamen fractiones continuae, quae adhiberi poſſunt, omnes eius ſunt indolis, vt indices periodice recurrant iidem eodemque ordine; vnde non male reducentur ad ordinem, primum, ſecundum, tertium etc. prouti quaeuis periodus vel ex vno, vel ex duobus, vel ex tribus terminis etc. conſtiterit: Nec neceſſe eſt vt periodus ſemper a primo termino incipiat: hoc autem titulo praeferendae videntur fractiones continuae, quae ad ſimpliciorem pertinent ordinem. Notetur hic, me alio ſenſu accipere *indices* ac fecit magnus *Eulerus*; ego quidem, vt rem generalius explicarem, per *indicem* intelligo quamuis nouam fractionem ſimplicem in fractione continua occurrentem, veluti

$$\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{c}{\gamma} \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{e}{\varepsilon} \cdot \frac{f}{\phi} \text{ etc.}$$

memoratus autem Auctor cum haud alios numeratores quam vnitatem adhibere conſtituiſſet, per indicem intelligit ſolum fractionis denominatorem pro ſubintellecto numeratore 1 nec primum numerum in tabula ipſius proprie ad fractionem continuam pertinere cenſendum puto. Igitur vt ſermone communi

ni vtamur, neceſſe mihi erit indicibus Eulerianis α, β, γ etc. ſubſtituere $\frac{1}{\alpha}$. $\frac{1}{\beta}$. $\frac{1}{\gamma}$ etc. Sic quando ponitur pro $\sqrt{7}$ ſucceſſio indicum 2. 1. 1. 1. 4. 1. 1. 1. 4. mihi ſcribendum erit, ſeruato initiali numero, 2. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{1}$ etc. vbi incipiens binarius indicat numerum addendum fractioni continuae regulari atque periodicae quarti ordinis

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}$$

cuius valor, ſi in infinitum continuata cenſeatur, fit $= -2+\sqrt{7}$; ergo ſi binarius fractioni continuae addatur, oritur $\sqrt{7} =$ binario eadem fractione continua aucto, plane vt exprimitur in citata tabula.

§. 13. Notetur nunc, quod in praecedente paragrapho praeſtitit fractio continua quarti ordinis, id quoque praeſtare poſſe fractionem continuam primi ordinis, ſi modo admittere velimus numerum fractum pro numeratore vbique recurrente, nempe $\frac{3}{4}$ vel 3 : 4; Si enim formetur fractio continua primi ordinis

$$S = \cfrac{3:4}{2+\cfrac{3:4}{2+\cfrac{3:4}{2+\text{etc.}}}}$$

dico fore $\sqrt{7} = 2 + 2\,S$, videatur in praecedente

 per-

pertractione § 9. formula IV. ponendo $m = 2$ et $n = 3:4$; Nec vllus eſt numerus, cuius radix quadrata non poſſit infinitis modis per fractionem continuam determinari, quia etiam pro denominatore continue recurrente numerus fractus adhiberi poteſt; ſic ſi formetur fractio continua

$$S = \cfrac{3:16}{5:2 + \cfrac{3:16}{5:2 + \cfrac{3:16}{5:2 + \text{etc.}}}}$$

inuenitur $\sqrt{7} = \frac{5}{2} + 2\,S$. Incongrua videbitur huiusmodi fractio continua; attamen ideo commendabilis, quia mox admodum ad verum valorem approperat: Si enim vel duo ſola prima membra in fractione continua ſumuntur; inuenitur $\sqrt{7} = \frac{545}{206}$; eſt autem $\sqrt{7} = 2.6457$ et $\frac{545}{206} = 2.6456$. Sed valeant huiusmodi fractiones continuae quantum poſſunt: pergo ad alia exempla ſcopo noſtro magis accommoda.

Pro $\sqrt{13}$ adhibet Celeberrimus Auctor fractionem continuam quinti ordines, hoc modo

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Huic

Huic ſubſtitui poteſt fractio continua primi ordinis

$$\sqrt{13} = 3 + 2S \quad \text{vbi} \quad S = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

Pro $\sqrt{61}$ fractione continua vtitur idem Auctor, quae pertinet ad ordinem vndecimum, cuius indices ſunt

$$\tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{14} \text{ etc.}$$

pro vnaquauis periodo, quae in infinitum continuata deindeque ſeptenario aucta dat valorem $\sqrt{61}$. huic fractioni continuae, magno labore erutae, ſubſtitui poteſt fractio continua primi ordinis

$$S = \cfrac{3}{7 + \cfrac{3}{7 + \cfrac{3}{7 + \text{etc.}}}} \quad ; \text{erit enim } \sqrt{61} = 7 + 2S.$$

Nihil porro impedit, quo minus fractione continua vtamur prorſus negatiua, ſaepius efficaciori. Sic invenio $\sqrt{60} = 8 + 2S$, vbi

$$S = -\cfrac{1}{8 - \cfrac{1}{8 - \cfrac{1}{8 - \text{etc.}}}}$$

Si in iſta fractione continua acquieſcamus tribus prioribus terminis; fit

$$S = -\tfrac{63}{496};\ 2S = -\tfrac{63}{248} \text{ atque adeo } \sqrt{60} = 8 + 2S = \tfrac{1921}{248}.$$

Quam longe exactiſſimus ſit iſte valor, intelligitur ex tabula logarithmorum; eſt enim

$$\log. \sqrt{60} = 0,8890756 \text{ et } \log. \tfrac{1921}{248} = 0,8890757$$

 et

et cum incertus ſit in tabulis numerus vltimae figurae, nondum dici poteſt, an reuera ambo logarithmi in ſeptima figura differant nec ne.

§ 14. Sic itaque abunde videmus totum negotium infinitis modis ſemper abſolui poſſe fractione continua, quam ad *primum ordinem* refero: Nec tamen inde concludendum eſt, non dari aditum ad ordines altiores; methodum hac de re pleniſſimam exhibui in priori diſſertatione paragrapho 13. et ſequentibus; Vlteriorem eius explicationem paucis dabo pro ordine ſecundo: Si conſtruatur fractio continua ſecundi ordinis, cuius ambo indices initiales perpetuo recurrentes ſint $\frac{n}{m}$ et $\frac{q}{p}$, oſtendi loco citato fore valorem fractionis continuae in infinitum continuatae

$$S = \frac{n - mp - q + \sqrt{4mnp + (mp + q - n)^2}}{2m}:$$

Inde habetur, ſi quantitatem ſigno radicali inuolutam deſignemus per N, talis valor

$$\sqrt{N} = -n + mp + q + 2mS.$$

Iſtae expreſſiones egregie contrahuntur, ſi in ambobus indicibus ponatur numerator $= 1$; tunc enim ſimpliciter obtinetur

$$S = \frac{-p + \sqrt{(pp + \frac{4p}{m})}}{2} \text{ atque } \sqrt{(pp + \tfrac{4p}{m})} = p + 2S$$

fuerit, verbi gratia, $m = 1$ et $p = 2$, erit $S = -1 + \sqrt{3}$, atque $\sqrt{3} = 1 + S$, vbi per S in hoc exemplo intelligitur valor fractionis continuae, cuius

ius indices ſunt $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{1} . \frac{1}{2}$ etc. prorſus vt habet *Eulerus* pro ſuo indicandi modo

Vnicum denique ſuperaddam exemplum pro fractione continua tertii ordinis, de qua egi in praecedente diſſertatione §. 15. Sint tres indices, qui primam conſtituunt periodum $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{12}$; ex his formabitur fractio continua, cuius valor $S = -6 + \sqrt{41}$; ergo $\sqrt{41} = 6 + S$ ſiue = ſenario aucto fractione continua, cuius indices $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{12}$ quem valorem etiam indicat tabula Euleriana.

SOLVTIO

SOLVTIO QVORVNDAM PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

Inuenire duo quadratorum paria xx, yy et tt, uu, ita vt tam $(xx+yy)(ttxx+uuyy)$ quam $(xx+yy)(uuxx+ttyy)$ fiat numerus quadratus.

Analyſis.

1. Primo patet, quicunque bini numeri tam pro x, y quam pro t, u fuerint inuenti, eorum aeque mulupla veluti αx, αy et βt, βu quaeſito aeque ſatisfacere; ſicque problema ita reſtringi conveniet, vt tam x et y quam t et u ſint numeri primi inter ſe.

2. Incipiamus a formula priori $(xx+yy)(ttxx+uuyy)$, quae poſita huic quadrato $(xx+yy)^2 xxyy(pp+qq)^2$ aequalis fit

$$ttxx+uuyy = xxyy(xx+yy)((pp-qq)^2+(2pq)^2)$$

vnde concluditur

$$tx = xy(x(pp-qq)+2pqy);\quad uy = xy(y(pp-qq)-2pqx)$$

ſicque erit

$$t = xy(pp-qq)+2pqyy;\quad u = xy(pp-qq)-2pqxx.$$

3.

3. Iam pro altera formula, cum ſit

$ty = xyy(pp-qq) + 2pqy^3$; $ux = xxy(pp-qq) - 2pqx^3$

fiet

$$ttyy + uuxx = xxy^4(pp-qq)^2 + 4pqxy^5(pp-qq) + 4ppqqy^6$$
$$+ x^4yy(pp-qq)^2 - 4pqx^5y(pp-qq) + 4ppqqx^6$$

quae forma, quia manifeſto per $xx+yy$ eſt diviſibilis, abit in

$$(xx+yy)(xxyy(pp-qq)^2 - 4pqxy(xx-yy)(pp-qq)$$
$$+ 4ppqq(x^4 - xxyy + y^4)).$$

4. Cum nunc haec forma per $xx+yy$ multiplicata numerum quadratum praebere debeat, habebimus ſequentem expreſſionem ad quadratum reducendam:

$$4ppqqx^4 - 4pq(pp-qq)x^3y + (p^4 - 6p^2q^2 + q^4)x^2y^2$$
$$+ 4pq(pp-qq)xy^3 + 4ppqqy^4$$

quae quidem manifeſto fit quadratum, ſi $x=y$; verum hunc caſum vtpote facillimum hinc merito excludimus; ſiquidem tota quaeſtio huc rediret, vt $2(tt+uu)$ quadratum efficeretur.

5. At ponendo illam formulam aequalem huic quadrato

$$(2pqxx - (pp-qq)xy + 2pqyy)^2$$

deletis terminis paribus fit

$$(p^4 - 6ppqq + q^4)x^2y^2 + 4pq(pp-qq)xy^3 = (p^4 + 6ppqq + q^4)x^2y^2$$
$$- 4pq(pp-qq)xy^3$$

hincque $8pq(pp-qq)y = 12ppqqx$

vnde colligitur haec ſolutio problematis:

$x = 2(pp-qq)$; $y = 3pq$; hincque porro

$t = 6pq(p^4 + ppqq + q^4)$ et $u = -2pq(pp-qq)^2$.

6. En ergo ſolutionem prima infinite patentem, quoniam numeros p et q ad arbitrium capere licet; reductis ſcilicet numeris t et u ad minimos terminos, et quia perinde eſt ſiue ſint poſitiui ſiue negatiui habebimus

$$x = 2(pp - qq); \quad t = 3(p^4 + ppqq + q^4) = \tfrac{3}{4}xx + yy$$
$$y = 3pq; \quad u = (pp - qq)^2 = \tfrac{1}{4}xx$$

hincque reperitur

$$xx + yy = 4p^4 + ppqq + 4q^4$$
$$ttxx + uuyy = xxyy(xx + yy)(pp + qq)^2 = xx(xx + yy)(\tfrac{9}{16}xx + yy)$$
$$uuxx + ttyy = 4ppqq(xx + yy)(p^4 + 7ppqq + q^4)^2 = (xx + yy)(\tfrac{1}{4}xx + yy)^2.$$

7. Vt alias ſolutiones inueniamus, ponamus ſuperioris formae radicem quadratam:

$$2ppxx - (pp - qq)xy - 2pqyy + Ayy$$

cuius quadrato illi aequali poſito prodibit aequatio:

$$(AA - 4Apq)yy - 2A(pp - qq)xy + (4Apq - 4ppqq)xx = 0$$

hic ſi $A = 4pq$ prodit ſolutio praecedens; at poſito $A = pq$ fit

$$+ 3pqy + 2(pp - qq)x = 0,$$

quae cum illa pariter congruit.

8. Ponamus $A = -2pp$ prodibitque haec aequatio

$$(pp + 2pq)yy + (pp - qq)xy - (2pq + qq)xx = 0$$

quae per $x + y$ diuiſa dat

$$(pp + 2pq)y - (2pq + qq)x = 0$$

vnde

vnde ſit

$$x = p(p + 2q) \text{ et } y = q(q + 2p) \text{ tum vero}$$
$$u = pqq(p + 2q)(qq + 2pq + 3pp).$$

9. En ergo aliam ſolutionem a praecedente diuerſam, et infinite patentem, qua numeris t et u ad minimos terminos reductis ſit

$$x = p(p + 2q);\; t = p(q + 2p)(pp + 2pq + 3qq)$$
$$y = q(q + 2p);\; u = q(p + 2q)(qq + 2pq + 3pp)$$

hincque reperitur:

$$xx + yy = p^4 + 4p^3q + 8ppqq + 4pq^3 + q^4$$
$$ttxx + uuyy = (p + 2q)^2(q + 2p)^2(pp + qq)^2(xx + yy)$$
$$uuxx + ttyy = ppqq(5pp + 8pq + 5qq)^2(xx + yy).$$

10. Poſito $A = 2pp$ prodit $(pp - 2pq)yy - (pp - qq)xy + (2pq - qq)xx = 0$ quae per $y - x$ diuiſa dat $(pp - 2pq)y - (2pq - qq)x = 0$ ideoque

$$x = p(p - 2q);\; t = p(2p - q)(pp - 2pq + 3qq)$$
$$y = q(2p - q);\; u = q(p - 2q)(qq - 2pq + 3qq)$$
$$xx + yy = p^4 - 4p^3q + 8ppqq - 4pq^3 + q^4$$
$$ttxx + uuyy = (p - 2q)^2(2p - q)^2(pp + qq)^2(xx + yy)$$
$$uuxx + ttyy = ppqq(5pp - 8pq + 5qq)^2(xx + yy).$$

Haec autem ſolutio a praecedente non differt; neque poſitiones $A = 2qq$ et $A = -2qq$ ſolutionis diuerſas praebent.

11. Conſtant methodi, quarum beneficio ex vna ſolutione inuenta aliae eliciuntur poſſunt; verum eae

 ad

ad calculos nimium intricatos deducunt. Ita reperire licet

$$x = q(pp-qq)(3pp-qq)$$
$$y = (pp+qq)(p(pp+qq) \pm q(3pp+qq)),$$

conuenientes vero valores pro t et u paragr. 2 ſuppeditat.

Solutio I.

In hac ſolutione ratio numerorum x et y eſt $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}.\frac{pp-qq}{2pq}$ vnde ex cathetis trianguli rectanguli inueniuntur; tum vero ratio $\frac{t}{u} = \frac{3xx+4yy}{xx}$; vnde ſolutiones ſimpliciores ſunt:

1°. $x = 5$; $y = 2$; $t = 91$; $u = 25$
2°. $x = 7$; $y = 5$; $t = 247$; $u = 49$
3°. $x = 5$; $y = 9$; $t = 399$; $u = 25$
4°. $x = 3$; $y = 10$; $t = 427$; $u = 9$
5°. $x = 11$; $y = 14$; $t = 1147$; $u = 121$
6°. $x = 15$; $y = 7$; $t = 871$; $u = 225$
7°. $x = 16$; $y = 5$; $t = 217$; $u = 64$
8°. $x = 16$; $y = 9$; $t = 273$; $u = 64$
9°. $x = 7$; $y = 18$; $t = 1443$; $u = 49$
10°. $x = 13$; $y = 20$; $t = 2107$; $u = 169$.

Solutio II.

Hic ratio numerum x et y eſt $\frac{x}{y} = \frac{p(p+2q)}{q(q+2p)}$ numerorum t et u vero $\frac{t}{u} = \frac{p(q+2p)(pp+3pq+3qq)}{q(p+2q)(qq+3pq+3pp)}$ ſi numeros x et y vt datos ſpectemus, ob

$ppy + 2pqy = qqx + 2pqx$, reperitur

$$\frac{p}{q} = \frac{x-y+\sqrt{(xx-xy+yy)}}{y};$$

vnde

vnde numerorum x et y character in hoc conſiſtit, vt $xx - xy + yy$ ſit quadratum; cuiusmodi numeri cum facile inueniantur; ſit $xx - xy + yy = zz$; eritque

$$\frac{p}{q} = \frac{x - y + z}{y} = \frac{x}{y - x + z}; \text{ ſeu } \frac{p}{q} = \frac{z - y}{x - z};$$

hinc fit

$$\frac{p + 2q}{q + 2p} = \frac{2x - y - z}{z - 2y + x} = \frac{z + y}{z + x} \text{ et } \frac{p(q + 2p)}{q(p + 2q)} = \frac{(z - y)(z + x - 2y)}{(z - x)(z + y - 2x)} \text{ vt}$$

$$(z - y)(z + x - 2y) = (z + x - y)(2z - x - y)(z - x)(z + y - 2x)$$
$$= z + y - x)(2z - x - y)$$

vnde $\frac{p(q + 2p)}{q(p + 2q)} = \frac{z + x - y}{z + y - x}$.

Deinde eſt

$$\frac{pp + 2pq + 3qq}{qq + 2pq + 3pp} = \frac{(x - y)^2 + 3(x - z)^2}{(x - y)^2 + 3(z - y)^2} = \frac{2z + y - x}{2z + x - y};$$

hincque tandem elicitur

$$\frac{t}{u} = \frac{(z + x - y)(2z - x + y)}{(z + y - x)(2z + x - y)}.$$

Sicque pro x et y eiusmodi numeris inuentis, vt ſit rationaliter $\sqrt{(xx - xy + yy)} = z$ capiatur:

$$t = (z + x - y)(2z - x + y) = xx + yy + (x - y)z$$
$$u = (z + y - x)(2z - y + x) = xx + yy - (x - y)z.$$

hinc obtinetur

$$ttxx + uuyy = (xx + yy)(xx - 2xy + yy + (x + y)z)^2$$
$$uuxx + ttyy = (xx + yy)(xx - 2xy + yy - (x + y)z)^2$$

vel etiam hoc modo

$$ttxx + uuyy = \tfrac{1}{9}(xx + yy)(x + y + z)^2(4z - x - y)^2$$
$$uuxx + ttyy = \tfrac{1}{9}(xx + yy)(x + y - z)^2(4z + x + y)^2.$$

Num autem quo facilius valores pro x et y idoneos

 repe-

reperiamus, ſpectemus x vt datum ac ponamus $z = y - v$ eritque

$$xx - xy = -2yv + vv \text{ et } y = \frac{xx - vv}{-2v + x} = \frac{vv - xx}{2v - x};$$

vbi pro quouis valore ipſius x aſſumto caſus integri pro y ſunt eruendi: notandum vero eſt, pro x numerum impariter parem aſſumi non poſſe, quia y quoque fieret par:

x	y	z	t	u
3	− 5	7	45	11
3	+ 8	7	19	54
5	+ 8	7	34	55
5	− 16	19	340	59
5	+ 21	19	81	385
7	− 8	13	154	41
7	+ 15	13	85	189
7	− 33	37	1309	171
7	+ 40	37	214	1435
8	+ 15	13	99	190
9	− 56	61	3591	374
9	+ 65	61	445	3861
11	− 24	31	891	194
11	+ 35	31	301	1045
11	− 85	91	8041	695
11	+ 96	91	801	8536
13	− 35	43	1729	335
13	+ 48	43	484	1989
13	− 120	127	15730	1161
13	+ 133	127	1309	16549

Problema

Problema 2.

Inuenire duo quadratorum paria xx, yy et tt, uu, vt $(ttxx+uuyy)(uuxx+ttyy)$ ſit numerus quadratus.

Solutio.

Hoc problema eandem ſortitur ſolutionem, quod praecedens, idemque quaterni numeri pro x, y, t, u inuenti ſatisfaciunt. Inde ergo ſolutio ſimpliciſſima eſt

$$x=2;\ y=5;\ t=11;\ u=45$$

ex qua ſit

$$ttxx+uuyy=34.9.169;\quad uuxx+ttyy=34.625$$

ideoque

$$(ttxx+uuyy)(uuxx+ttyy)=34^2.39^2.25^2.$$

Ceterum haec ſolutio non ſolum ob eam cauſam tantum eſt particularis, ob quam talis erat, ſed etiam hoc problema infinitas ſolutiones admittere videtur, quae praecedenti non conueniant. Fieri enim poteſt, vt haec formula

$$(ttxx+uuyy)(uuxx+ttyy)$$

ſit quadratum, etiamſi neutra praecedentium $(xx+yy)(ttxx+uuyy)$, et $(xx+yy)(uuxx+ttyy)$ fuerit quadratum, cuius rei vnicum exemplum dediſſe ſufficiat:

$$x=973;\ y=263:\ t=973;\ u=1841$$

eſt enim

$uuxx+ttyy=2.25.263^2.973^2$ quadratum duplicatum
$ttxx+uuyy=2.25.141793^2$ quadratum duplicatum.

En

En adhuc aliam ſolutionem latius patentem

$$x = 3n^4 + 6mmnn - m^4 \; ; \; t = mx$$
$$y = 3m^4 + 6mmnn - n^4 \; ; \; u = ny$$

cuius inuentionis ratio facile intelligitur, poſita enim $t = mx$ et $u = ny$ fit
$ttxx + uuyy = mmx^4 + nny^4$ et $uuxx + ttyy = xxyy(mm + nn)$
ſicque ad quadratum reducenda eſt haec formula

$$(mm + nn)(mmx^4 + nny^4)$$

quae facto $x = v + z$ et $y = v - z$ ad iſtam ſolutionem perducit: hinc autem praecedentes ſolutiones non obtinentur.

Problema 3.

Inuenire duo quadratorum paria $xxyy$ et $ttuu$, vt tam hic numerus $ttxx + uuyy$ quam iſte $ttyy + uuxx$ fiat quadratus.

Solutio.

Ex modo tradita ſolutione problematis praecedentis ſolutio huius facile adornatur, pro m et n eiusmodi numeris ſumendis, vt $mm + nn$ fiat quadratum. Sic ſi fiat $m = 4$ et $n = 3$ reperitur

$$x = 851, \quad t = 3404$$
$$y = 1551, \quad u = 3653.$$

At ex problemate primo multo concinniores ſolutiones impetrantur, quibus adeo praeter binas praeſcriptas conditiones et haec tertia adimpletur; vt $xx + yy$ fiat etiam quadratum. At ſolutio ſecunda primi problematis vnum praebet caſum, quo $xx + yy$ fit quadratum ſcilicet

$$x = 8 \; ; \; y = 15 \; ; \; t = 99 \; ; \; u = 190$$

vnde

vnde fit

$$xx + yy = 17^2$$
$$ttxx + uuyy = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2$$
$$ttyy + uuxx = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2 .$$

Si inſuper addita fuiſſet haec conditio, vt etiam $xx - xy + yy$ foret quadratum eadem ſolutio negotium conficeret. Huiusmodi autem ſolutiones elicentur quaerendis numeris x et y vt haec expreſſio

$$x^4 - x^3y + 2xxyy - xy^3 + y^4 \text{ fiat quadratum}$$

ad quos porro vt ante numeros t et u inueſtigari oportet.

Occaſionem hoc problema Diophantaeum tractandi praebuit problema Geometricum a Schotenio propoſitum, quo datis in triangulo baſi, perpendiculo et ratione laterum ipſa latera quaerentur. Problema hoc geminam admittit ſolutionem, quarum vtraque vt praebeat latera rationaliter expreſſa, negotium ad problema iſtud Diophantaeum perducitur. Si enim baſis trianguli ponatur $= a$, perpendiculum $= b$, et laterum ratio $m:n$; vocatis ipſis lateribus mz et nz; primo neceſſe eſt a et b ita exprimi

$$a = (mm - nn)(xx + yy) \text{ et } b = 2mnxy,$$

tum vero pro z haec duplex expreſſio reperitur:

$$z = \surd(xx + yy)((m-n)^2 xx + (m+n)^2 yy) \text{ et}$$
$$z = \surd(xx + yy)((m+n)^2 xx + (m-n)^2 yy)$$

 quae

quae vt ambae ſiant rationales facto $m+n=b$; $m-n=u$ naſcitur noſtrum problema Diophantaeum. Cuius ergo caſus ſimpliciſſimus erit ſumto

$$x=3;\ y=5;\ t=45 \text{ et } u=11,$$

vnde haec naſcuntur data:

ratio laterum $m:n=28:17$

baſis trianguli $a=33$; et perpendiculum $=28$,

vnde reperiuntur ipſa latera:

vel $mz=\frac{140}{2}$ et $nz=\frac{85}{2}$

vel $mz=\frac{364}{5}$ et $nz=\frac{221}{5}$

ſiue in integris ſumta

baſis $a=495$ et perpendicula $b=420$

obtinebuntur latera rationem $28:17$ tenentia

vel $mz=700$ et $nz=425$

vel $mz=1092$ et $nz=663$.

SPECV-

SPECVLATIONES ANALYTICAE.

Auctore

L. EVLERO.

Cum nuper inueniſſem integrale huius formulae differentialis $\frac{(x^\alpha - x^\beta)\,dx}{l\,x}$, ſi ita capiatur vt euaneſcat poſito $x = 0$, tum vero ſtatuatur $x = 1$, aequari huic valori: $l\frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$: haec integratio eo magis attentione digna mihi videbatur, quod eius veritas per nullas methodos hactenus vſitatas oſtendi poſſet. Quamobrem nullum plane eſt dubium, quin ea plurimum in receſſu habeat, et ad multa alia praeclara inuenta in Analyſi perducere queat. Haud igitur ingratum Geometris fore arbitror, ſi nonnullas ſpeculationes quae ſuper hac formula ſe mihi obtulerunt expoſuero.

§ 1. Quoniam iſta integratio ſe ad omnes plane exponentes pro literis α et β aſſumtos extendit, atque adeo valores imaginarii non excluduntur, ponamus $\alpha = n\sqrt{-1}$, et $\beta = -n\sqrt{-1}$, eritque $x^\alpha - x^\beta = x^{n\sqrt{-1}}\, x^{-n\sqrt{-1}}$, quae formula cum reducatur ad hanc: $e^{n\,l\,x\sqrt{-1}} - e^{-n\,l\,x\sqrt{-1}}$, notum eſt eius valorem eſſe $= 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,l\,x$; quo valore ſubſtituto prodit

$$2\sqrt{-1}\int\frac{dx\,\text{ſin.}\,n\,l\,x}{l\,x} = l\frac{1 + n\sqrt{-1}}{1 - n\sqrt{-1}}.$$

Conſtat autem huius formulae $l\frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}}$ valorem eſſe $2\sqrt{-1}$ A tang. n, quandoquidem ſumto n variabili eius differentiatio dat

$$d.\ l\frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}} = \frac{2\,dn\sqrt{-1}}{1+nn},$$

cuius integrale manifeſto eſt $2\sqrt{-1}$ A tang. n; hinc igitur adipiſcitur ſequens Theorema:

Theorema 1^a. Iſta formula integralis $\int\frac{dx\,\text{ſin.}\,n\,l\,x}{l\,x}$ a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=1$ extenſa exprimit arcum circuli cuius tangens $=1$; vnde ſumto $n=1$, erit $\int\frac{dx\,\text{ſin.}\,l\,x}{l\,x}=\frac{\pi}{4}$, denotante π ſemiperipheriam circuli cuius radius $=1$.

§. 2. Quamuis autem haec integratio ex noſtra forma generali, quae aliis methodis inacceſſa videtur, ſit deducta: tamen eius veritas per reſolutiones conſuetas ſequenti modo oſtendi poteſt, ſicque ex hoc caſu integratio generalis eo maius firmamentum accipiet; Cum enim per ſeriem infinitam ſit

$$\text{ſin.}\,n\,l\,x = \frac{n\,l\,x}{1} - \frac{n^3(l\,x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n^5(l\,x)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}$$

erit

$$\int\frac{dx\,\text{ſin.}\,n\,l\,x}{l\,x} = \int dx\left(n - \frac{n^3(l\,x)^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n^5(l\,x)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ \text{etc.}\right);$$

conſtat autem eſſe

$$\int dx(lx)^2 = x(lx)^2 - 2\int dx\,lx = x(lx)^2 - 2x\,lx + 2.\,1\,x,$$

quae expreſſio poſito $x=1$ reducitur ad $2.\,1$; ſimili modo fiet

$$\int dx\,(lx)^4 = x(lx)^4 - 4\int dx\,(lx)^3 = x\,(lx)^4 - 4x(lx)^3 + 4.3\int dx(lx)^2,$$

quae

quae poſito $x = 1$ ob $l\,1 = 0$ praebet 4. 3. 2. 1; eodemque modo erit $\int dx\,(lx)^6 = 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ His igitur ſingulis valoribus integralibus introductis proueniet

$$\int \frac{dx\,\text{ta}.\,n\,lx}{lx} = n - \frac{2.\ 1\ n^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{4.\ 3.\ 2.\ n^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} - \frac{6 \ldots 1\ n^7}{1 \ldots 7} = n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7} + \text{etc.}$$

cuius ſeriei ſumma manifeſto eſt A tang. n.

§. 3. Hic caſus nobis anſam praebet etiam hanc formulam integralem inueſtigandi $\int \frac{dx\,\text{coſ}.\,n\,lx}{lx}$; quae quidem non immediate in noſtra forma generali continetur; et quia eſt

$$\text{coſ}\,n\,lx = 1 - \frac{nn\,(lx)^2}{1.\ 2} + \frac{n^4\,(lx)^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{n^6\,(lx)^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \text{etc.}$$

ex primo termino oritur $\int \frac{dx}{lx}$, cuius quidem valorem oſtendi eſſe infinitum. Pro ſequentibus autem terminis erit

$$\int dx\,lx = x\,lx - x = -1 \text{ et } \int dx\,(lx)^3 = -1.\ 2.\ 3 \text{ et } \int dx\,(lx)^5 = -1 \ldots 5 \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis obtinebimus

$$\int \frac{dx\,\text{coſ}.\,n\,lx}{lx} = \int \frac{dx}{lx} + \frac{nn}{2} - \frac{n^4}{4} + \frac{n^6}{6} - \frac{n^8}{8},$$

quae expreſſio manifeſto reducitur ad hanc:

$$\int \frac{dx}{lx} + \tfrac{1}{2}\,l\,(1 + nn).$$

Quia autem primus terminus hanc ſummam reddit infinitam, hinc ſubtrahamus aliam ſimilem

$$\int \frac{dx\,\text{coſ}.\,m\,lx}{lx} = \int \frac{dx}{lx} + \tfrac{1}{2}\,l\,(1 + mm)$$

et habebimus

$$\int \frac{dx\,(\text{coſ}.\,n\,lx - \text{coſ}.\,m\,lx)}{lx} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1 + nn}{1 + mm}$$

 atque

atque haec integratio non minus notatu digna videtur quam praecedens.

4. Cum autem in genere ſit

$$\cos. a - \cos. b = 2 \sin. \tfrac{a+b}{2} \sin. \tfrac{b-a}{2} \text{ erit}$$

$$\cos. n\,l\,x - \cos. m\,l\,x = 2 \sin. \tfrac{m+n}{2} l\,x \sin. \tfrac{m-n}{2} l\,x,$$

ita vt ſit

$$\int d\,x \frac{\sin. \frac{m+n}{2} l\,x \sin. \frac{m-n}{2}}{l\,x} = \tfrac{1}{4} l \frac{1+nn}{1+mm};$$

quod ſi ergo ponamus $m = p + q$ et $n = p - q$ ſequens adipiſcemur theorema maxime notatu dignum:

Theorema 2. Iſta forma integralis

$\int \frac{d\,x}{l\,x} \sin. p\,l\,x \sin. q\,l\,x$ eſt $= \frac{1}{4} l \frac{1+(p-q)^2}{1+(p+q)^2}$,

ſi ſcilicet integratio a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extenditur; quae integratio eo magis eſt notatu digna, quia in ea nullus arcus circularis occurrit, etiamſi priorem in ſe complecti videatur, quod autem ſecus ſe habet, quia $\sin. q\,l\,x$ ad vnitatem reduci nequit quin ſimul quantitas q reddatur variabilis.

§. 5. Operae igitur pretium erit inueſtigare, quomodo etiam integrale huius theorematis ex forma noſtra generali deriuari queat. Hunc in finem conſideremus iſtam formam integralem

$$\int \frac{d\,x}{l\,x} (x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma - x^\delta),$$

quae in has duas reſoluitur

$$\int \frac{d\,x}{l\,x} (x^{\alpha+\gamma} - x^{\beta+\gamma}) - \int \frac{d\,x}{l\,x} (x^{\alpha+\delta} - x^{\beta+\delta}),$$

cuius

cuius prioris valor eſt $l(\frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1})$, poſterioris vero $l(\frac{\alpha+\delta+1}{\beta+\delta+1})$, ita vt habeamus

$$\int \frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma - x^\delta) = l\frac{(\alpha+\gamma+1)(\beta+\delta+1)}{(\beta+\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}.$$

Nunc igitur ſtatuamus $\alpha = p\sqrt{-1}$ et $\beta = -p\sqrt{-1}$, deinde $\gamma = q\sqrt{-1}$ et $\delta = -q\sqrt{-1}$, vt fiat

$$x^\alpha - x^\beta = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,plx \text{ et } x^\gamma - x^\delta = 2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,qlx;$$

ſic enim noſtra forma integralis induet hanc formam $-4\int\frac{dx}{lx}\,\text{ſin.}\,plx\,\text{ſin.}\,qlx$. Pro eius autem valore reperimus

$$\alpha+\gamma+1 = 1+(p-q)\sqrt{-1};\ \beta+\delta+1 = 1-(p+q)\sqrt{-1};$$
$$\beta+\gamma+1 = 1+(q-p)\sqrt{-1};\ \text{et } \alpha+\delta+1 = 1+(p-q)\sqrt{-1},$$

quibus valoribus ſubſtitutis valor integralis prodit

$$l(\frac{1+(p+q)^2}{1+(p-q)^2}) = -l(\frac{1+(p-q)^2}{1+(p+q)^2}),$$

vnde manifeſto ſequitur integratio poſtremi theorematis

$$\int\frac{dx}{lx}(\text{ſin.}\,plx\,\text{ſin.}\,qlx) = \tfrac{1}{4}l(\frac{1+(p-q)^2}{1+(p+q)^2}).$$

§. 6. Hinc occaſionem arripimus etiam hanc formam generalem euoluendi

$$\int\frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta)(x^\gamma + x^\delta),$$

cuius valor erit

$$= l(\frac{\alpha+\gamma+1}{\beta+\gamma+1}) + l(\frac{\alpha+\delta+1}{\beta+\delta+1}) = l\frac{(\alpha+\gamma+1)(\alpha+\delta+1)}{(\beta+\gamma+1)(\beta+\delta+1)}.$$

Nunc iterum faciamus

$$\alpha = p\sqrt{-1} \text{ et } \beta = -p\sqrt{-1};$$

tum vero

$$\gamma = q\sqrt{-1} \text{ et } \delta = -q\sqrt{-1},$$

fiet-

fietque

$$x^{\alpha}-x^{\beta}=2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,plx \text{ et } x^{\gamma}+x^{\delta}=2\,\text{coſ.}\,qlx,$$

ita vt ipſa formula integralis oriatur

$$4\sqrt{-1}\int\frac{dx}{lx}\,\text{ſin.}\,plx\,\text{coſ.}\,qlx.$$

Pro valore autem integrali habebimus

$$\alpha+\gamma+1=1+(p+q)\sqrt{-1};\ \beta+\gamma+1=1+(q-p)\sqrt{-1};$$
$$\alpha+\delta+1=1+(p-q)\sqrt{-1};\ \beta+\delta+1=1-(p+q)\sqrt{-1},$$

vnde valor integralis prodit

$$l\left(\frac{1+(p+q)\sqrt{-1}}{1-(p+q)\sqrt{-1}}\right)\cdot\left(\frac{1+(p-q)\sqrt{-1}}{1-(p-q)\sqrt{-1}}\right)=l\left(\frac{1+(p+q)\sqrt{-1}}{1-(p+q)\sqrt{-1}}\right)+l\left(\frac{1+(p-q)\sqrt{-1}}{1-(p-q)\sqrt{-1}}\right).$$

Eſt vero

$$l\left(\frac{1+(p+q)\sqrt{-1}}{1-(p+q)\sqrt{-1}}\right)=2\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\,(p+q)$$

eodemque modo

$$l\,\frac{1+(p-q)\sqrt{-1}}{1-(p-q)\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\,(p-q);$$

quibus valoribus ſubſtitatis reſultat iſta integratio:

$$\int\frac{dx}{lx}\,\text{ſin.}\,plx\,\text{coſ.}\,qlx=\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,(p+q)+\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,(p-q).$$

Cum igitur ſit ingenere

$$\text{A tang.}\,a+\text{A tang.}\,b=\text{A tang.}\,\frac{a+b}{1-ab}$$

erit ſumma arcuum modo inuenta $=\text{A tang.}\,\frac{2p}{1-pp+qq}$ et valor integralis $\frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{2p}{1-pp+qq}$: hinc ſequens

Theorema 3. Iſta formula integralis

$$\int\frac{dx}{lx}\,\text{ſin.}\,plx\,\text{coſ.}\,qlx$$

a termino $x=0$ vsque ad $x=1$ extenſa aequalis eſt huic valori:

$$\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{2p}{1-pp+qq}.$$

§. 7.

§. 7. Quod ſi ergo ſumamus $q = p$, ob

$$\text{ſin.}\, p\, l\, x \,\text{coſ.}\, q\, l\, x = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\, 2\, p\, l\, x,$$

prodibit iſta integratio:

$$\tfrac{1}{2}\int \tfrac{d\,x}{l\,x}\,\text{ſin.}\, 2\, p\, l\, x = \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\, 2\, p,$$

id quod prorſus conuenit cum theoremate primo; at vero etiam ingenere ad Theorema primum reduci poteſt: Cum enim ſit

$$\text{ſin.}\, a \,\text{coſ.}\, b = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(a + b) + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(a - b),$$

formula noſtra in has partes diuiditur:

$$\tfrac{1}{2}\int \tfrac{d\,x}{l\,x}\,\text{ſin.}\,(p + q)\, l\, x + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{d\,x}{l\,x}\,\text{ſin.}\,(p - q)\, l\, x.$$

Prioris igitur partis valor erit ex theoremate

$$\tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,(p + q),$$

poſterioris vero partis

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,(p - q),$$

quae forma vtique reducitur ad eam quam hic dedimus.

§. 8. Nunc autem integrationem noſtram generalem

$$\int \tfrac{d\,x}{l\,x}\,(x^{\alpha} - x^{\beta}) = l\,\tfrac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

aliquanto generalius ad angulos reducamus, ponendo

$$\alpha = m + n\sqrt{-1}, \quad \beta = m - n\sqrt{-1},$$

vt fiat

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = x^{m}(x^{n\sqrt{-1}} - x^{-n\sqrt{-1}}) = 2\sqrt{-1}\, x^{m}\,\text{ſin.}\, n\, l\, x;$$

tum vero erit

$$\tfrac{\alpha + 1}{\beta + 1} = \tfrac{1 + m + n\sqrt{-1}}{1 + m - n\sqrt{-1}},$$

quae fractio poſito $n = k(m + 1)$ reducitur ad hanc $\frac{1 + k\sqrt{-1}}{1 - k\sqrt{-1}}$. Eſt vero

$$l\,\tfrac{1 + k\sqrt{-1}}{1 - k\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\, k = 2\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\,\tfrac{n}{m + 1},$$

 ſicque

ſicque impetramus ſequens theorema:

Theorema 4. Iſta formula integralis

$$\int \frac{dx}{lx} x^m \text{ſin. } n\,lx$$

a termino $x = 0$ vsque da terminum $x = 1$ extenſa ſemper aequalis erit huic valori: A tang. $\frac{n}{m+1}$, quod theorema ſumto $m = 0$ ad primum reducitur; vbi inprimis notatu dignum occurrit, quod, quoties $\frac{n}{m+1}$ eundem habet valorem, toties etiam formae integrales aequales inter ſe euadunt.

§. 9. Verum etiam hoc theorema in genere ad primum reduci poteſt. Si enim ponatur $x^{m+1} = y$ erit

$$x^m dx = \frac{dy}{m+1} \quad \text{et} \quad lx = \frac{ly}{m+1}$$

his valoribus ſubſtitutis fiet

$$\int \frac{dy}{ly} \text{ſin. } \frac{n}{m+1} ly,$$

quae cum ſimilis ſit primo theoremati, eius valor manifeſto eſt $=$ A tang. $\frac{n}{m+1}$;

quoniam autem hic poſuimus $x^{m+1} = y$, ambo termini integrationis hic etiam erunt $y = 0$ et $y = 1$.

§. 10. Per hoc ergo theorema, cum ſit

$$\text{A tang. } \tfrac{1}{2} + \text{A tang. } \tfrac{1}{3} = \text{A tang } 1 = \tfrac{\pi}{4},$$

pro priore erit $n = 1$ et $m = 1$, pro poſteriore vero $n = 1$ et $m = 2$, hinc igitur habebitur iſta integratio:

$$\int \frac{dx}{lx} (x + xx)\, \text{ſin. } lx = \tfrac{\pi}{4}.$$

Deinde

Deinde cum per ſeriem infinitam ſit

$$\frac{\pi}{4} = A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2} + A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{8} + A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{18} + A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{32} + A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{50} + \mathrm{etc.}$$

cuius ſeriei terminus generalis eſt $A\,\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2nn}$, habebimus hanc integrationem ſatis memorabilem:

$$\int \frac{dx}{x\,lx}(x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32} + \mathrm{etc.})\,\mathrm{ſin.}\,lx = \frac{\pi}{4},$$

quod eo magis eſt notatu dignum, quod ſeries infinita $x^2 + x^8 + x^{18} + x^{32}$ nullo modo ad ſummam finitam reduci poteſt.

§. 11. Sed reuertamur ad noſtram integrationem principalem, qua eſt

$$\int \frac{dx}{lx}(x^\alpha - x^\beta) = l\,\frac{\alpha+1}{\beta+1},$$

cuius veritatem etiam hoc modo oſtendere licet; cum ſit $x^\alpha = e^{\alpha\, lx}$ denotante e numerum cuius logaritmus hyperbolicus $= 1$, erit per ſeriem infinitam

$$x^\alpha = 1 + \frac{\alpha\, lx}{1} + \frac{\alpha\alpha(lx)^2}{1.\,2} + \frac{\alpha^3(lx)^3}{1.\,2.\,3} + \frac{\alpha^4(lx)^4}{1.\,2.\,3.\,4}$$

hincque colligitur fore

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)\frac{lx}{1} + (\alpha\alpha - \beta\beta)\frac{(lx)^2}{1.\,2} + (\alpha^3 - \beta^3)\frac{(lx)^3}{1.\,2.\,3}\ \mathrm{etc.}$$

quae ſeries per $\frac{dx}{lx}$ multiplicata et integrata, ob

$$\int dx\,(lx)^n = \pm\, 1.\,2.\,3\ldots n$$

(ubi ſignum ſuperius valet, ſi n eſt numerus par, inferius ſi impar), praebet poſito $x = 1$ ſequentem ſeriem:

$$\alpha - \beta - \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2} + \frac{(\alpha^3-\beta^3)}{3} - \frac{(\alpha^4-\beta^4)}{4}\ \mathrm{etc.}$$

quae ſeries manifeſto praebet

$$l(1+\alpha) - l(1+\beta) = l\,\frac{\alpha+1}{\beta+1}.$$

 §. 12.

§ 12. Quo valor huius formulae ſuccinctius exprimatur, loco α et β ſcribamus $\alpha - 1$ et $\beta - 1$, vt habeamus

$$\int \frac{dx}{lx}(x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}) = \int \frac{dx}{x\,lx}(x^{\alpha} - x^{\beta}) = l\frac{\alpha}{\beta}$$

Quod ſi ergo ſumamus $\alpha = e^m$ et $\beta = e^n$, nanciſcemur ſequentem integrationem ſatis concinnam:

$$\int \frac{dx}{x\,lx}(x^{e^m} - x^{e^n}) = m - n.$$

§. 13. Inueſtigemus nunc integrale huius formulae differentialis

$$\frac{dx}{x\,lx}\left(\frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{1 + x^n}\right),$$ et cum ſit

$$\frac{1}{1 + x^n} = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} \text{ etc.}$$

colligitur hinc integrale quaeſitum

$$l\frac{\alpha}{\beta} - l\frac{\alpha + n}{\beta + n} + l\frac{\alpha + 2n}{\beta + 2n} - l\frac{\alpha + 3n}{\beta + 3n},$$

vnde nanciſcimur ſequens theorema:

Theorema 5. Iſta formula integralis

$$\int \frac{dx}{x\,lx}\left(\frac{x^{\alpha} - x^{\beta}}{1 + x^n}\right)$$

a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extenſa ſemper aequatur huic formulae logarithmicae:

$$l\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta + n}{\alpha + n} \cdot \frac{\alpha + 2n}{\beta + 2n} \cdot \frac{\beta + 3n}{\alpha + 3n} \cdot \frac{\alpha + 4n}{\beta + 4n} \text{ etc.}$$

§. 14. Cum igitur alibi demonſtrauerim, huius producti in infinitum continuati

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{(c + b)}{c + a} \cdot \frac{a + k}{b + k} \cdot \frac{c + b + k}{c + a + k} \cdot \frac{a + 2k}{b + 2k} \cdot \frac{c + b + 2k}{c + a + 2k}$$

valo-

valorem aequari huic expreſſioni

$$\frac{\int z^{c-1} dz (1 - z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1} dz (1 - z^k)^{\frac{a-k}{k}}},$$

applicatione ad noſtrum caſum facta erit

$a = \alpha$, $b = \beta$, $k = n$, $k = 2n$

hincque valor noſtri producti infiniti

$$= \frac{\int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}}}{\int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}}}$$

quae ambae formulae integrales a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ ſunt extendendae, atque hinc colligimus ſequens theorema.

Theorema 6. Iſta formula integralis $\int \frac{dx}{x\,l\,x} \left(\frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x^n}\right)$, a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$ extenſa aequalis eſt huic valori $l \frac{P}{Q}$, exiſtente

$$P = \int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}} \text{ et}$$

$$Q = \int z^{n-1} dz (1 - z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}}$$

dum ſcilicet etiam hae formulae integrales poſteriores a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extenduntur.

§. 15. Sumamus igitur $n = 1$, vt formula noſtra integralis fiat $\frac{\int dx}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^\alpha - x^\beta}{1 + x}$,

ac tum erit

$$P = \int dz(1-zz)^{\frac{\beta-2}{2}} \text{ et } Q = \int dz(1-zz)^{\frac{\alpha-2}{2}},$$

vnde pro α et β ſequentes caſus euoluamus. Sit primo $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ erit $P = A \sin z = \frac{\pi}{2}$ et $Q = z = 1$, ideoque $\frac{P}{Q} = \frac{\pi}{2}$ vnde colligimus fore $\int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{x-1}{x+1} = l\frac{\pi}{2}$.

§. 16. Sumamus nunc $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, vt fiat $\frac{x^\alpha - x^\beta}{1+x} = x(x-1)$ hincque formula noſtra integralis erit $\int \frac{dx}{lx}(x-1)$, cuius valorem nouimus eſſe $= l\,2$ at vero ex formula noſtra generali erit

$$P = \frac{\pi}{2} \text{ et } Q = \int dz \sqrt{1-zz} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} - \int \frac{zzdz}{\sqrt{1-zz}}$$

At vero per reductiones notas eſt

$$\int \frac{zzdz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}},$$

ſicque erit

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

vnde fit $\frac{P}{Q} = 2$, qui valor perfecte congruit cum ante aſſignato.

§. 17. Quoniam in quantitate P non occurrit exponens α, in altero vero Q tantum β occurrat, ſuperius theorema ita in duas partes diſtribuere licebit, vt ſit

$$\int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^n} = C - l\int z^{n-1} dz(1-z^{2n})^{\frac{\alpha-2n}{2n}} \text{ et}$$

$$\int \frac{dx}{lx} \cdot \frac{x^{\beta-1}}{1+x^n} = C - l\int z^{n-1} dz(1-z^{2n})^{\frac{\beta-2n}{2n}}$$

vbi

vbi C denotant certam conſtantem, quae autem in differentia duarum huiusmodi formularum integralium e calculo egreditur.

§. 18. Poſſumus etiam noſtram formulam ingralem principalem

$$\int \frac{dx}{x\,lx}(x^\alpha - x^\beta) = l\frac{\alpha}{\beta}$$

ita transformare, vt in ea exponentes infiniti occurrant, quae ob hoc ipſum attentione non indigna videtur. Denotet igitur i numerum infinite magnum, et quia lx ita exprimere licet, vt ſit $lx = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, formula noſtra hanc induet formam:

$$\int \frac{dx}{ix(x^{\frac{1}{i}} - 1)}(x^\alpha - x^\beta) = l\frac{\alpha}{\beta}.$$

Nunc igitur ad exponentem fractum tollendum ſtatuamus $x^{\frac{1}{i}} = z$, vt ſit $x = z^i$, hincque $\frac{dx}{x} = \frac{i\,dz}{z}$; tum vero $x^\alpha = z^{\alpha i}$ et $x^\beta = z^{\beta i}$, et quia adhuc iidem termini integrationis habentur $z = 0$ et $z = 1$, hinc ſequens theorema reſultat:

Theorema 7. Denotante i numerum infinite magnum iſta formula integralis

$$\int \frac{dz(z^{\alpha i} - z^{\beta i})}{z(z-1)}$$

a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extenſa ſemper aequalis eſt huic valori $l\frac{\alpha}{\beta}$.

§. 19. Cum ſit

$$\frac{z^{\alpha i}}{z-1} = z^{\alpha i - 1} + z^{\alpha i - 2} + z^{\alpha i - 3} + z^{\alpha i - 4} \text{ etc.}$$

erit

erit

$$\int \frac{z^{\alpha i}dz}{z(z-1)} = \frac{1}{\alpha i-1} + \frac{1}{\alpha i-2} + \frac{1}{\alpha i-3} + \frac{1}{\alpha i-4} \text{ etc.} + C$$

eodemque modo erit

$$\int \frac{z^{\beta i}dz}{z(z-1)} = \frac{1}{\beta i-1} + \frac{1}{\beta i-2} + \frac{1}{\beta i-3} + \frac{1}{\beta i-4} \text{ etc.} + C$$

vnde patet, differentiam harum duarum ſerierum eſſe $l\frac{\alpha}{\beta}$, ita ſi fuerit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ prodibit iſta integratio

$$\int \frac{dz(z^{2i}-z^{i})}{z(z-1)} = \frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i-2} + \frac{1}{2i-3} + \frac{1}{2i-4} + \text{etc.} \ldots + \frac{1}{i}$$

quoniam ſequentes termini per ſeriem poſteriorem tolluntur. Conſtat autem huius ſeriei ſummam eſſe $l2$.

§. 20. Plurima adhuc alia conſectaria ex iſta integratione memorabili deduci poſſent, quibus autem hic non immorabor: ſed potius ipſam Analyſin quae ad hanc integrationem perduxit accuratius perpendam. Conſideraui ſcilicet poteſtatem x^u, cuius exponens u pro lubitu ſiue vt conſtans ſiue vt variabilis ſpectari queat, et cum ſit

$$\int \frac{x^u\,dx}{x} = \frac{x^u}{u},$$

ideoque ſi poſt integrationem ſumatur $x = 1$ erit $\int \frac{dx}{x} x^u = \frac{1}{u}$; quae formula ergo fundamentum conſtituat vnde ſequentia deducemus.

§. 21. Hanc iam formulam per du multiplicatam integremus, ſpectata x vt conſtante, et quia ſumma

ſumma $\int x^u\,du = \frac{x^u}{lx}$, tum vero conſtat hanc integrationem ab altera vbi x erat variabilis non turbari, habebimus nunc iſtam integrationem $\int \frac{dx}{x\,lx} x^u = lu + A$, vbi A denotat conſtantem per integrationem ingreſſam, quae igitur e medio tolletur, ſi duas huiusmodi formas a ſe inuicem ſubtrahamus, vnde ſi primo ſumamus $u = \alpha$, tum vero $u = \beta$, et poſterius integrale a priori ſubtrahamus, prodibit noſtra forma principalis initio commemorata

$$\int \frac{dx}{x\,lx}(x^\alpha - x^\beta) = l\frac{\alpha}{\beta}.$$

§. 22. Simili autem modo a formula integrali $\int \frac{dx}{x\,lx} x^u = lu + A$ vlterius progrediamur, quae per du multiplicata et ex ſola variabilitate ipſius u integrata ob $\int x^u\,du = \frac{x^u}{lx}$ vt ante perueniemus ad iſtam integrationem:

$$\int \frac{dx}{x\,(lx)^2} x^u = \int du\,lu + Au + B = ulu - u + Au + B$$

vbi ergo ternas formulas particulares inter ſe combinari oportet, vt ambae conſtantes A et B ex calculo deturbentur; quia autem loco A ſcribere licet A + 1 erit

$$\int \frac{dx}{x\,(lx)^2} x^u = u\,lu + Au + B.$$

§. 23. Quod ſi iam denuo per du multiplicemus et integremus, mutatis literis conſtantibus, quo formula concinnior reddatur, reperiemus

$$\int \frac{dx}{x\,(lx)^3} x^u = \tfrac{1}{2} uu\,lu + Auu + Bu + C$$

 eodem-

eodemque modo vlterius

$$\int \frac{dx}{x(lx)^3}\, x^u = \tfrac{1}{6} u^3\, lu + A u^3 + B uu + C u + D$$

$$\int \frac{dx}{x(lx)^4}\, x^u = \tfrac{1}{24} u^4\, lu + A u^4 + B u^3 + C uu + D u + E$$

etc. etc.

Vnde intelligitur, continuo plures caſus particulares inuicem coniungi debere, vt omnes quantitates conſtantes A, B, C, D, etc. ex calculo expellantur.

§. 24. Hoc igitur modo euoluamus formulam §. 22. inuentam, et exponenti u tribuamus hos tres valores: α, β et γ, vt obtineamus iſtas tres formulas:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{x(lx)^2}\, x^\alpha = \alpha\, l\alpha + A\alpha + B$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(x(lx)^2}\, x^\beta = \beta\, l\beta + A\beta + B$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{x(lx)^2}\, x^\gamma = \gamma\, l\gamma + A\gamma + B$$

vnde eliminando B duas haſce nanciſcimur aequationes:

$$\text{I} - \text{II} = \alpha l\alpha - \beta l\beta + A(\alpha - \beta) \text{ et}$$

$$\text{II} - \text{III} = \beta l\beta - \gamma l\gamma + A(\beta - \gamma)$$

$$(\text{I} - \text{II})(\beta - \gamma) - (\text{II} - \text{III})(\alpha - \beta) = (\beta - \gamma)\alpha l\alpha\ (\beta - \gamma)\beta l\beta$$
$$- (\alpha - \beta)\beta l\beta + (\alpha - \beta)\gamma l\gamma$$

quae reducitur ad hanc

$$\text{I}(\beta - \gamma) + \text{II}(\gamma - \alpha) + \text{III}(\alpha - \beta) = (\beta - \gamma)\alpha l\alpha + (\gamma - \alpha)\beta l\beta$$
$$+ (\alpha - \beta)\gamma l\gamma.$$

§. 25. Hinc igitur pro formulis ad iſtud genus referendis conſtituere poterimus ſequens theorema fundamentale:

Theore-

Theorema 8. Iſta formula integralis

$$\int \frac{dx}{x(lx)^2}((\beta-\gamma)x^\alpha+(\gamma-\alpha)x^\beta+(\alpha-\beta)x^\gamma)$$

a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=1$ extenſa ſemper aequalis eſt huic valori:

$$(\beta-\gamma)\alpha\, l\alpha+(\gamma-\alpha)\beta\, l\beta+(\alpha-\beta)\gamma\, l\gamma.$$

§. 26. Circa hanc formam imprimis notaſſe iuuabit, formulam

$$(\beta-\gamma)x^\alpha+(\gamma-\alpha)x^\beta+(\alpha-\beta)x^\gamma$$

non ſolum per $x-1$ eſſe diuiſibilem, ſed etiam per $(x-1)^2$; prius inde patet, quod poſito $x=1$ fit $\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta=0$

poſterius vero, quod eius etiam differentiale poſito $x=1$ fit $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=0$, id quod natura rei poſtulat, quia in denominatore $(lx)^2$ poſito $x=1$ continetur quadratum quantitatis euaneſcentis.

§. 27. Quo vis huius integrationis generalis clarius perſpiciatur, caſum euoluiſſe operae pretium erit quo ponitur $\alpha=n+2$, $\beta=n+1$ et $\gamma=n$ quandoquidem obtinebitur iſta integratio:

$$\int \frac{x^{n-1}dx(x-1)^2}{(lx)^2}=(n+2)l(n+2)-2(n+1)l(n+1)+nln$$

$$=l\frac{(n+2)^{n+2}n^n}{(n+1)^{2(n+1)}}.$$

§. 28. Tractemus eodem modo formulam integralem gradus tertii, in qua occurrit $(l x)^3$, tribuendo exponenti n quatuor valores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, vnde oriuntur ſequentes aequationes

$$\text{I. } \int \frac{dx}{x(lx)^3}\, x^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha l\alpha + A\alpha\alpha + B\alpha + C$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x(lx)^3}\, x^{\beta} = \tfrac{1}{2}\beta\beta l\beta + A\beta\beta + B\beta + C$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{x(lx)^3}\, x^{\gamma} = \tfrac{1}{2}\gamma\gamma l\gamma + A\gamma\gamma + B\gamma + C$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{x(lx)^3}\, x^{\delta} = \tfrac{1}{2}\delta\delta l\delta + A\delta\delta + B\delta + C.$$

Atque hinc erit primo

$$I - II = \tfrac{1}{2}\alpha\alpha l\alpha - \tfrac{1}{2}\beta\beta l\beta + A(\alpha\alpha - \beta\beta) + B(\alpha - \beta)$$

vnde fit

$$\frac{I-II}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha\alpha l\alpha - \beta\beta l\beta}{2(\alpha-\beta)} + A(\alpha+\beta) + B.$$

Eodemque modo erit

$$\frac{II-III}{\beta-\gamma} = \frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)} + A(\beta+\gamma) + B$$

quarum formularum differentia dat

$$\left(\frac{I-II}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{II-III}{\beta-\gamma}\right) = \frac{\alpha\alpha l\alpha - \beta\beta l\beta}{2(\alpha-\beta)} - \left(\frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)}\right) + A(\alpha-\gamma)$$

qua per $\alpha - \gamma$ diuiſa prodit

$$\frac{(I-II)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{(II-III)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)} = \frac{\alpha\alpha l\alpha - \beta\beta l\beta}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \left(\frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}\right) + A$$

eodemque modo erit

$$\frac{(II-III)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)} - \frac{III-IIII}{(\gamma-\delta)(\beta-\delta)} = \left(\frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right) - \left(\frac{\gamma\gamma l\gamma - \delta\delta l\delta}{2(\gamma-\delta)(\beta-\delta)}\right) + A$$

quae poſtrema a ſuperiori ſublata relinquit

$$\left(\frac{I-II}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right) - \left(\frac{II-III}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}\right) - \left(\frac{II-III}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right) + \left(\frac{III-IV}{(\gamma-\delta)(\beta-\delta)}\right) =$$

$$\left(\frac{\alpha\alpha l\alpha - \beta\beta l\beta}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right) - \left(\frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}\right) - \left(\frac{\beta\beta l\beta - \gamma\gamma l\gamma}{2(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right) + \left(\frac{\gamma\gamma l\gamma - \delta\delta l\delta}{2(\gamma-\delta)(\beta-\delta)}\right)$$

ſicque iam omnes tres conſtantes A, B, C ſunt eliſae.

§. 29.

§. 29. Quod ſi iam ſingula huius aequationis membra euoluantur et tam ſecundum numeros I, II, III, IV quam ſecundum formulas $\alpha\alpha l\alpha$, $\beta\beta l\beta$, $\gamma\gamma l\gamma$, $\delta\delta l\delta$ in ordinem diſponantur, obtinebitur ſequens aequatio:

$$\frac{\mathrm{I}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\mathrm{II}(\alpha-\delta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{\mathrm{III}(\alpha-\delta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{\mathrm{IV}(\alpha-\delta)}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$
$$=\frac{\alpha\alpha l\alpha}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\alpha-\delta)\beta\beta l\beta}{2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{(\alpha-\delta)\gamma\gamma l\gamma}{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{(\alpha-\delta)\delta\delta l\delta}{2(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

quae aequatio per $\alpha-\delta$ diuiſa ad pulcherrimam vniformitatem reducitur; quo facto ſequens nanciſcimur theorema ad hunc caſum adcommodatum:

Theorema 9. Iſta formula integralis

$$\int\frac{dx}{x(lx)}\left(\frac{x^\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{x^\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right.$$
$$\left.+\frac{x^\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{x^\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\right)$$

a termino $x=0$ vsque ad terminum $x=1$ extenſa aequatur ſequenti formulae

$$\frac{\alpha\alpha l\alpha}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{\beta\beta l\beta}{2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{\gamma\gamma l\gamma}{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{\delta\delta l\delta}{2(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

ex qua forma perſpicitur, quo modo ad caſus magis compoſitos facile progredi liceat.

§. 30. Ad hunc modum etiam praecedentes caſus repraeſentare operae pretium erit. Ita pro diviſore lx habebimus ſequentem formam integralem:

$$\int\frac{dx}{x(lx)}\left(\frac{x^\alpha}{(\alpha-\beta)}+\frac{x^\beta}{\beta-\alpha}\right)=\frac{l\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{l\beta}{\beta-\alpha}.$$

Deinde theorema §. 24. allatum ita referetur:

$$\int\frac{dx}{x(lx)^2}\left(\frac{x^\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x^\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{x^\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)=$$

$$\frac{\alpha\, l\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta\, l\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma\, l\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

atque iſtam formam ſequitur illa quam in theoremate vltimo retulimus.

§. 31. Nunc igitur hoc negotium in genere expedire poterimus pro quacunque poteſtate ipſius l. x, qui in denominatore formulae integralis occurrit, cuius exponens ſit $= n-1$, vt numerus membrorum fiat $= n$; tum igitur accipiantur pro lubitu numeri α, β, γ, δ etc. quorum numerus ſit $= n$, et quaerantur hinc ſequentes valores:

$\mathfrak{A} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)$ etc.
$\mathfrak{B} = (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)$ etc.
$\mathfrak{C} = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)$ etc.
$\mathfrak{D} = (\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)(\delta-\varepsilon)$ etc.
etc. etc.

tum vero ponatur etiam breuitatis gratia hoc productum

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots\ldots(n-2)=\mathrm{N}$$

atque obtinebitur ſequens forma integralis generaliſſima

$$\int\frac{dx}{x(lx)^{n-1}}\left(\frac{x^\alpha}{\mathfrak{A}}+\frac{x^\beta}{\mathfrak{B}}+\frac{x^\gamma}{\mathfrak{C}}+\frac{x^\delta}{\mathfrak{D}}+\text{etc.}\right)=$$

$$\frac{\alpha^{n-2}\, l\alpha}{\mathrm{N}\mathfrak{A}}+\frac{\beta^{n-2}\, l\beta}{\mathrm{N}\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^{n-2}\, l\gamma}{\mathrm{N}\mathfrak{C}}+\frac{\delta^{n-2}\, l\delta}{\mathrm{N}\mathfrak{D}}+\text{etc.}$$

vbi notandum, caſu $n=2$ fore $\mathrm{N}=1$.

§. 32.

§. 32. Ad haec vberius illuſtranda meminiſſe iuuabit, me iam pridem inſigne theorema arithmeticum demonſtraſſe circa huiusmodi fractiones $\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} +$ etc. quorum numerus ſit vt ante $= n$ vbi oſtendi, omnes ſequentes formulas nihilo aequari

I. $\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$

II. $\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$

III. $\frac{\alpha\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta\delta}{\mathfrak{D}} \text{ etc.} = 0$

IV. $\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^3}{\mathfrak{D}} \text{ etc.} = 0$

donec perueniatur ad poteſtatem exponentis $n - 2$; at vero ſumto exponente $= n - 1$ ſemper fore demonſtrauimus

$$\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 1.$$

DE

DE RESOLVTIONE POLYGONORVM RECTILINEORVM DISSERTATIO SECVNDA.

Auctore
A. I. LEXELL.

I.

Poſtquam in priori de hoc argumento Diſſertatione, vt ſperamus ſatis dilucide expoſuimus principia, quibus in ſubſidium vocatis reſolutio Polygonorum perficitur, dum ratio tantum habetur laterum et angulorum eius circuitum includentium; nunc id nobis propoſuimus, vt oſtendamus quomodo aequationes pro reſolutione Polygonorum ſubminiſtratae ita tractari debent, vt aptas et commodas ſuppeditent ſolutiones. Quem in finem omnes caſus reſolutionum pro Tetragono heic recenſendos et diſtincte euoluendos cenſuimus. Si igitur A B C D
Tab. I Fig. 1. ſit quadrilaterum, eiusque latera A B, B C, C D, D A reſpectiue deſignentur litteris a, b, c, d, anguli autem externi a A B, b B C, c C D, d D A indigitentur per litteras A, B, C, D, pro reſolutione huius quadrilateri ſequentes quatuor adipiſcemur aequationes:

I. $dd = aa + bb + cc + 2ab \operatorname{coſ.} B + 2ac \operatorname{coſ.} (B+C) + 2bc \operatorname{coſ.} C$

II. $dd + cc + 2dc \operatorname{coſ.} D = aa + bb + 2ab \operatorname{coſ.} B$

III.

III. $a\,\text{ſin.}A + b\,\text{ſin.}(A+B) + c\,\text{ſin}(A+B+C) = 0$;
IV. $a\,\text{ſin.}A + b\,\text{ſin.}(A+B) - c\,\text{ſin.}D = 0$

quas quemadmodum tractari oportet, vt pro quauis quaeſtione propoſita aptas dent ſolutiones, nunc erit diſpiciendum.

2. Problema 1. *Datis lateribus* a, b, c *cum angulis* B, C *inuenire latus* d.

Perſpicuum eſt huius Problematis ſolutionem ex aequatione noſtra prima adornari, per eam enim fit

$$dd = aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ.}B + 2ac\,\text{coſ.}(B+C) + 2bc\,\text{coſ.}C.$$

Caeterum quum ex aequatione dum ſic exprimitur, valor ipſius d minus commode inueſtigetur, neceſſum eſt vt eandem in formas aliquanto commodiores transmutemus. Eſt vero

$$aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ}\,B + 2ac\,\text{coſ.}(B+C) + 2bc\,\text{coſ.}C = (a\,\text{ſin.}B - c\,\text{ſin.}C)^2 + (b + a\,\text{coſ.}B + c\,\text{coſ.}C)^2$$

quare fiet

$$dd = (a\,\text{ſin.}B - c\,\text{ſin.}C)^2 + (b + a\,\text{coſ.}B + c\,\text{coſ.}C)^2,$$

tum igitur ſi quaeratur

Tang. $F = \frac{c\,\text{ſin.}B - c\,\text{ſin.}C}{b + a\,\text{coſ.}B + c\,\text{coſ.}C}$, conſequemur $d = \frac{b + a\,\text{coſ.}B + c\,\text{coſ.}C}{\text{coſ.}F}$.

Vel inueſtigatio ipſius d ſequenti ratione perfici poterit: quum ſit

$$aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ.}B + 2ac\,\text{coſ.}(B+C) + 2bc\,\text{coſ.}C =$$
$$\left(a + \frac{b\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}(B+C)}\right)^2 + \left(c + \frac{b\,\text{ſin.}B}{\text{ſin.}(B+C)}\right)^2 + 2\,\text{coſ.}(B+C)\left(a + \frac{b\,\text{ſin.}B}{\text{ſin.}(B+C)}\right)\left(c + \frac{b\,\text{ſin.}B}{\text{ſin.}(B+C)}\right)$$

quod facile patebit facta euolutione poſterioris formae, ſtatuamus

$$a + \frac{b\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}(B+C)} = e \quad \text{et} \quad c + \frac{b\,\text{ſin.}B}{\text{ſin.}(B+C)} = f,$$

 ita

ita vt habeatur

$dd = ee + ff + 2ef\,\text{coſ.}(B+C)$, hincque $dd = (e+f)^2$

$- 2ef(1 - \text{coſ.}(B+C)) = (e+f)^2\left(1 - \frac{4ef\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2}\right)$,

ſi igitur ponatur

$$\frac{4ef\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2} = \text{ſin.}\,E^2,$$ fiet

$$dd = (e+f)^2\,\text{coſ.}\,E^2, \text{ ſeu } d = (e+f)\,\text{coſ.}\,E.$$

De hac autem ſolutione obſeruare conuenit, eam ſemper adhiberi poſſe, quia $\frac{4ef\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(B+C)^2}{(e+f)^2}$ valorem ſemper conſequitur poſitiuum, eumque vnitate minorem. Neceſſum enim eſt, vt e et f ſimul valores ſiue poſitiuos, ſeu negatiuos ſortiantur, tum vero euidens eſt, quod $(e+f)^2 > 4ef$, hincque tanto magis $(e+f)^2 > 4ef\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(B+C)^2$.

3. Problema 2. *Datis lateribus* a, b, d *cum angulis* B, C *inuenire latus* c.

Huic problemati ſoluendo aequatio noſtra prima inſeruit, vt autem ſolutioni aptior euadat, notetur eam ſic exprimi poſſe:

$(c + b\,\text{coſ.}C + a\,\text{coſ.}(B+C))^2 + (a\,\text{ſin.}(B+C) + b\,\text{ſin.}C)^2 = dd$, vnde colligitur

$(c + b\,\text{coſ.}C + a\,\text{coſ.}(B+C))^2 = dd - (a\,\text{ſin.}(B+C) + b\,\text{ſin.}C)^2$ hincque

$c + b\,\text{coſ.}C + a\,\text{coſ.}(B+C) = \sqrt{(dd - (a\,\text{ſin.}(B+C) + b\,\text{ſin.}C)^2)}$

$= \sqrt{(d + a\,\text{ſin.}(B+C) + b\,\text{ſin.}C)(d - a\,\text{ſin.}(B+C) - b\,\text{ſin.}C)}$.

Quum autem ſignum radicale ſua natura ambiguum ſit, et quantitatem tam negatiuam, quam poſitiuam indi-

indigitet, intelligitur ex hac aequatione binos ipſius c valores colligi, quod quomodo explicari debeat, haud praeter rem erit, vt heic oſtendamus. Dum in quadrilatero A B C D dantur latera A B, B C, A D et anguli b B C, c C D et quaerendum ſit C D, liquet hoc latus inueniri ſi centro A radio $=$ A D deſcribatur circulus, in interſectione enim huius circuli cum recta poſitione data C E, dabitur punctum D, ex quo ob duplicem interſectionem circuli cum recta C E, binos conſequimur valores lateris incogniti C D, vel C D' Quod autem harum linearum valores per aequationem ſupra allatam exprimantur, ſic oſtenditur. Ex puncto A in C D normalis ducatur C E et per B ipſi C E parallela B G, tumque erit Tab. I. Fig. 2.

$CE = + AB \cos. ABG + BC \cos. BCF = -a \cos.(B+C) - b \cos. C$, nec non

$AE = a \sin.(B+C) + b \sin. C$, ex quo colligitur

$DE = \sqrt{}(AD^2 - AE^2) = \sqrt{}(dd - (a \sin.(B+C) + b \sin. C)^2)$,

hincque $c = CE \pm DE$, ex priori valore fit $c = CD'$ ex poſteriori $c = CD$. Caſu quo $DE = 0$, hoc eſt $d = a \sin.(B+C) + b \sin. C$, vnica tantum locum habet ſolutio eritque pro ea $c = -a \cos.(B+C) - b \cos. C$; vt autem problema ſit poſſibile, praeſupponi debet quod $a \sin.(B+C) + b \sin. C$ non exſuperet d, quod quidem pro quadrilatero ſemper obtinet ob $d \sin. D = b \sin. C + a \sin.(B+C)$.

4. Problema 3. *Datis lateribus* a, c, d *et angulis* B, C *inuenire latus* b.

Pro hoc Problemate ſoluendo adhibeatur iſta transformatio aequationis noſtrae primae:

$$dd = (b + a\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,C)^2 + (a\,\text{ſin}\,B - c\,\text{ſin.}\,C)^2$$

vnde colligitur

$$b + a\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,C = \sqrt{(d - a\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin}\,C)(d + a\,\text{ſin.}\,B - c\,\text{ſin.}\,C)},$$

hinc ob ambiguitatem ſigni radicalis, duplex pro b prodibit valor, vtriusque autem ratio ſequenti modo

Tab. I. Fig. 3. explicatur: Per punctum B rectae BC ducantur lineae B A $= a$, B F $= c$, quae cum B C faciunt angulos C′ B A, C B F reſpectiue aequales angulis datis B et C, per punctum autem F agatur linea recta E F D parallela ipſi B C, quo facto liquet punctum D quadrilateri inueniri dum centro A radio A D $= d$ deſcribatur circulus rectam E F interſecans in puncto D; nam ſi per D ducatur D C parallela ipſi B F, patebit in quadrilatero A B C D angulos externos C′ B A, G C D reſpectiue aequales eſſe datis B, C, tumque eſſe latus A B $= a$, C D $=$ A F $= c$. A D $= d$. At circulus centro A radio $= d$ deſcriptus rectam E F in binis punctis interſecare poteſt, ſit igitur altera interſectio D′ et ducta D′ C′ parallela ipſi B F aliud conſequemur quadrilaterum, quod tamen pro noſtra figura proprie loquendo ad noſtram quaeſtionem non pertinet, nam in iſto quadrilatero anguli interni A B C′, B C′ D′ reſpectiue aequantur angulis datis B, C. Caeterum ſi ex A in E F normalis ducatur, A E, facile demonſtratur eſſe:

A E $= c$ ſin. C $- a$ ſin. B ideoque

E D $=$

$ED = \sqrt{(dd - (c\,\text{ſin. C} - a\,\text{ſin. B})^2)}$, tumque

$FE = a\,\text{coſ. B} + c\,\text{coſ. C}$, hinc autem fiet

$BC = FD = ED - EF = \sqrt{(dd - (c\,\text{ſin. C} - a\,\text{ſin. B})^2)} - a\,\text{coſ. B} - c\,\text{coſ. C}.$

Alter autem valor quo

$$b = -\sqrt{(dd - (c\,\text{ſin. C} - a\,\text{ſin. B})^2)} - a\,\text{coſ. B} - c\,\text{coſ. C}$$

pro hoc caſu fit incongruus, quum ſit negatiuus $= -$ D′ F. Caeterum vt ſolutio ſit poſſibilis, intelligitur hanc praeſcribi conditionem, vt habeatur $d > c\,\text{ſin. C} - a\,\text{ſin. B}$.

5. Problema 4. *Datis omnibus quadrilateri lateribus et angulo* B *inuenire angulum* C.

Hunc in finem euoluatur iſte terminus aequationis noſtrae primae, qui continet coſ. (B + C), quo facto conſequemur:

$$dd = aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ. B} + 2c\,\text{coſ. C}(b + a\,\text{coſ. B}) - 2ca\,\text{ſin. C ſin. B}.$$

Vt hinc commode elici queat angulus C, ſtatuamus Tang. $F = \frac{a\,\text{ſin. B}}{b + a\,\text{coſ. B}}$ ita vt ſit $b + a\,\text{coſ. B} = a\,\text{ſin. B cot. F}$, tumque adipiſcemur:

$dd = aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ. B} + 2ac\frac{\text{ſin. B}}{\text{ſin. F}}(\text{coſ. C coſ. F} - \text{ſin. C ſin. F})$, ſiue

$dd = aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ. B} + 2ac\,\frac{\text{ſin. B. coſ.}(C + F)}{\text{ſin. F}}$ eſt vero

$aa + bb + 2ab\,\text{coſ. B} = a^2\,\text{ſin. B}^2\,\text{cot. F}^2 + a^2\,\text{ſin. B}^2 = \frac{a^2\,\text{ſin. B}^2}{\text{ſin. F}^2}$,

quare prodibit

$$dd = cc + \frac{a^2\,\text{ſin. B}^2}{\text{ſin. F}^2} + 2ac\frac{\text{ſin. B}}{\text{ſin. F}}\,\text{coſ.}\,(C + F).$$

Haec autem aequatio in ſequentes facile transformatur:

$dd = (c + \frac{a\,\text{ſin. B}}{\text{ſin. F}})^2 - 4ac\frac{\text{ſin. B}}{\text{ſin. F}}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(C + F)^2$ vel

 dd =

$$dd = \left(c - \frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)^2 + 4ac\,\frac{\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(C+F)^2$$

ex quibus inuenitur:

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(C+F) = \sqrt{\left(\frac{\left(-dd+\left(c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)^2\right)\text{ſin.}\,F}{4ac\,\text{ſin.}\,B}\right)} = \sqrt{\frac{\left(-dd\,\text{ſin.}\,F^2+(c\,\text{ſin}\,F+a\,\text{ſin}\,B)^2\right)}{4ac\,\text{ſin}\,B\,\text{ſin.}\,F}}$$

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(C+F) = \sqrt{\left(\frac{\left(dd-\left(c-\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)^2\right)\text{ſin.}\,F}{4ac\,\text{ſin.}\,B}\right)} = \sqrt{\frac{\left(dd\,\text{ſin.}\,F^2-(c\,\text{ſin}\,F-a\,\text{ſin.}\,B)^2\right)}{4ac\,\text{ſin.}\,B\,\text{ſin.}\,F}}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(C+F) = \frac{\sqrt{\left(c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}+d\right)\left(c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}-d\right)}}{\sqrt{\left(d-c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)\left(d+c-\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)}}$$

Tab. I. Fig. 4. Si ducta intelligatur A C diagonalis quadrilateri A B C D, facile conſtabit eſſe angulum B C A = F, hincque F + C = 180° − A C D, ideoque ½ (F + C) = 90° − ½ A C D, quare

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(F+C) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,A\,C\,D.$$

Haec igitur ſolutio eo reducitur, vt inueſtigato

$$\text{Tang.}\,B\,C\,A = \text{Tang.}\,F = \frac{a\,\text{ſin.}\,B}{b + a\,\text{coſ.}\,B},$$

quaeratur Tang. ½ A C D per formulam

$$\frac{\sqrt{\left(d-c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)\left(d+c-\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}\right)}}{\sqrt{\left(c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}+d\right)\left(c+\frac{a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,F}-d\right)}},$$

quo facto erit ang. C = 180° − B C A − A C D. Caeterum patet tang. ½ (C + F) heic ambiguum eſſe ipſique valorem tam negatiuum, quam poſitiuum tribui poſſe, quapropter pro C binos quoque habebimus valores, quorum ſi vnus exprimatur littera C, alter per C′; neceſſum eſt vt ſit

$$C' = 360° - C - 2F,$$

eſt

eſt enim

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C+F)=-\text{tang}\,(180^\circ-\tfrac{1}{2}(C+F))=-\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C'+F),$$

ideoque

$$360^\circ-(C+F)=+C'+F\text{, ſiue}$$
$$C'=360^\circ-C-2F.$$

Ratio autem huius ambiguitatis eſt manifeſta, dum conſideramus ſuper diagonali A C conſtrui poſſe triangulum A D'C ipſi A D C ſimile et aequale, tum autem fiet

$$\text{ang. } D'Cc=360^\circ-DCc-2BCA,$$

eſt enim

$$\tfrac{1}{2}(DCc+D'Cc)=ACc=180-BCA.$$

6. Problema 5. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* B, D *inuenire latus* d.

Pro hoc problemate inſeruit aequatio ſecunda, per quam fit:

$$dd+2cd\,\text{coſ.}D+cc=aa+2ab\,\text{coſ.}B+bb$$

hincque

$$dd+2cd\,\text{coſ.}D+cc\,\text{coſ}\,D^2=aa+2ab\,\text{coſ.}B+bb-cc\,\text{ſin.}D^2,$$

in locum autem ipſius

$$aa+2ab\,\text{coſ.}B+bb\text{, ſubſtituatur}$$
$$(a+b)^2-4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2\text{, ita vt ſit}$$
$$(d+c\,\text{coſ.}D)^2=(a+b)^2-cc\,\text{ſin.}D^2-4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2,$$

hincque fiet:

$$d+c\,\text{coſ.}D=\sqrt{(a+b+c\,\text{ſin.}D)(a+b-c\,\text{ſin.}D)}\sqrt{\left(1-\frac{4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+c\,\text{ſin.}D)(a+b-c\,\text{ſin.}D)}\right)}$$

poſito

poſito itaque

$$\frac{4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+c\,\text{ſin.}D)(a+b-c\,\text{ſin.}D)} = \text{ſin.}E^2,$$

conſequemur

$$d + c\,\text{coſ.}D = \text{coſ.}E\,\sqrt{(a+b+c\,\text{ſin.}D)(a+b-c\,\text{ſin.}D)}.$$

Tab. I. Fig. 5. Signum radicale indicat duplicem pro d inueniri valorem, ducta ſcilicet quadrilateri ABCD diagonali AC, deſcribatur ſuper ea ſegmentum circuli quod ſuſcipiat angulum CDA $= 180 - D$, eritque punctum D quadrilateri in circumferentia huius ſegmenti, ibique inuenietur vbi circulus centro C radio $= c$ deſcriptus hoc ſegmentum interſecet, dum igitur duo habentur puncta interſectionum D, D′, bini emergent valores lateris d, quorum vnus AD alter AD′. Notandum autem eſt, ducta CE normali in AD, fieri $ED = -c\,\text{coſ.}D$ et

$$AE = \sqrt{(AC^2 - CE^2)} = \sqrt{(aa + 2ab\,\text{coſ.}B + bb - cc\,\text{ſin.}D^2)}$$

quam ob rem eſſe debebit $d = ED \pm AE$, quorum valorum prior exprimit AD, alter AD′.

7. Problema 6. *Datis omnibus lateribus quadrilateri et angulo* B, *inuenire angulum* D.

Huius problematis ſolutio ex aequatione ſecunda pendet, per quam fit

$$dd + 2cd\,\text{coſ.}D + cc = aa + 2ab\,\text{coſ.}C + bb,$$

ideoque

$$\text{coſ.}D = \frac{aa + bb - cc - dd + 2ab\,\text{coſ.}B}{2cd};$$

caete-

caeterum vt commodius determinari queat angulus D, ſequentes adhibere licet transformationes:

I. $(d+c)^2 - 4cd\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D^2 = (a+b)^2 - 4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2$,

per quam fit

$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{1}{4cd}((c+d+a+b)(c+d-a-b)+4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2)$,

II. $(d-c)^2 + 4cd\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D^2 = (a-b)^2 + 4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2$,

ex qua colligitur:

$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{1}{4cd}((a-b+d-c)(a-b-d+c)+4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2)$,

hinc

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{(c+d+a+b)(c+d-a-b)+4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2}{(a-b+d-c)(a-b-d+c)+4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2}$$

vel potius ſi placet iſtas

I. $(d+c)^2 - 4cd\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D^2 = (a-b)^2 + 4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2$,

$4cd\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D^2 = (d+c+a-b)(d+c-a+b) - 4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2$;

II. $(d-c)^2 + 4cd\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D^2 = (a+b)^2 - 4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2$,

ex quo

$4cd\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D^2 = (a+b+d-c)(a+b-d+c) - 4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2$;

tumque vero

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}D^2 = \frac{(d+c+a-b)(d+c-a+b)-4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+d-c)(a+b-d+c)-4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2}.$$

Ponatur nunc

$$\text{tang.}\,\theta^2 = \frac{4ab\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B^2}{(d+c+a-b)(d+c-a+b)},$$

$$\text{tang.}\,\eta^2 = \frac{4ab\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B^2}{(a+b+d-c)(a+b-d+c)}$$

 erit-

eritque

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}D^2 = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B^2.\frac{\text{ſin.}\,\eta^2}{\text{ſin.}\,\theta^2}\left(\frac{\text{coſ.}\,\theta^2-\text{ſin.}\,\theta^2}{\text{coſ.}\,\eta^2-\text{ſin.}\,\eta^2}\right) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B^2.\frac{\text{ſin.}\,\eta^2}{\text{ſin.}\,\theta^2}\frac{\text{coſ.}\,2\theta}{\text{coſ.}\,2\eta},$$

vnde

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}D = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}B.\frac{\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\theta}\sqrt{\frac{\text{coſ.}\,2\theta}{\text{coſ.}\,2\eta}}.$$

Ob valorem tang. $\tfrac{1}{2}$ D per ſignum radicale indicatum, intelligitur angulum D duplicem conſequi valorem, quorum ſi prior dicatur D, alter habebitur $D' = 360 - D$.
Tab. I. Fig. 4. Nam ſi triangulum ABC ex datis lateribus AB, BC et angulo ABC conſtruatur, ſuper eius baſi bina conſtrui poterunt triangula ACD, AC′D datorum laterum et ſi angulus externus ad D pro triangulo ACD littera D exprimatur, angulus externus ad D′ in quadrilatero ABCD′ exprimetur per $360° - D$. Rem autem omnino ita ſe habere haud obſcurum euadet, ſi attendamus ad ea, quae de acceptione vocis anguli externi in Diſſertatione priori monuimus.

8. Problema 7. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* B, C, *inuenire angulum* A.

Solutio huius problematis per aequationem noſtram tertiam perficitur, ex qua habetur

$$a\,\text{ſin.}\,A + b\,\text{ſin.}\,(A+B) + c\,\text{ſin.}\,(A+B+C) = 0,$$ ſiue

$$\text{ſin.}\,A\,(a + b\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,(B+C)) = -\text{coſ.}\,A\,(b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}\,(B+C)),$$

hincque

$$\text{tang.}\,A = \frac{-b\,\text{ſin.}\,B - c\,\text{ſin.}\,(B+C)}{a + b\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,(B+C)},$$

quae formula licet ad computum iucundum ſatis ſit apta,

apta, ſequens tamen transformatio quoque adhiberi poterit, quaeratur

$$\frac{e}{a} = \frac{b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}\,(B+C)}{b\,\text{ſin.}\,C + a\,\text{ſin.}\,(B+C)} = \frac{\text{ſin.}\,B\left(1 + \frac{c\,\text{ſin.}\,(B+C)}{b\,\text{ſin.}\,B}\right)}{\text{ſin.}\,C\left(1 + \frac{a\,\text{ſin.}\,(B+C)}{b\,\text{ſin.}\,C}\right)}$$

eritque

$$\text{tang.}\,A = \frac{-e\,\text{ſin.}\,(B+C)}{a + e\,\text{coſ.}\,(B+C)} = \frac{-\frac{e}{a}\,\text{ſin}\,(B+C)}{1 + \frac{e}{a}\,\text{coſ.}\,(B+C)}.$$

Ex hac autem poſtrema formula, poſito $\frac{e}{a} = \text{tang.}\,F$, facile deducitur

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}(B+C)+A\right) = -\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{tang.}\,(45^\circ + F).$$

Pro hoc problemate de valore anguli A, nulla re manet ambiguitas, ceu ex ipſa contemplatione figurae apparet. Nam datis angulis externis bBC, cCD et lateribus AB, BC, CD, angulus aAB perfecte determinatur Tab. I. Fig. 1.

9. Problema 8. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* A, C *inuenire angulum* B.

Aequatio tertia euoluta dat

$$a\,\text{ſin.}\,A + \text{ſin.}\,(A+B)(b + c\,\text{coſ.}\,C) + c\,\text{coſ.}\,(A+B)\,\text{ſin.}\,C = 0.$$

Quod ſi igitur ponatur $\text{tang.}\,E = \frac{c\,\text{ſin.}\,C}{b + c\,\text{coſ.}\,C}$, fiet

$$a\,\text{ſin.}\,A + \frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,E}(\text{ſin.}\,(A+B)\,\text{coſ.}\,E + \text{coſ.}\,(A+B)\,\text{ſin.}\,E) = 0 \text{ vel}$$

$$a\,\text{ſin.}\,A + \frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,E}\,\text{ſin.}\,(A+B+E) = 0, \text{ hincque}$$ Fig. 6.

$$\text{ſin.}\,(A+B+E) = -\frac{a\,\text{ſin.}\,A.\,\text{ſin.}\,E}{c\,\text{ſin.}\,C}.$$

Quod ſi quadrilateri A B C D diagonalis B D concipiatur ducta, fiet $\text{tang.}\,CBD = \frac{c\,\text{ſin.}\,C}{b + c\,\text{coſ.}\,C}$, ideoque E indigitabit angulum CBD, hinc autem concludetur eſſe

M 2 A + B

$A + B + E = bBD + 180° - BAD = 180° + BDA$, quod omnino recte ſe habet, eſt enim

$$\text{ſin.}\, BDA : \text{ſin.}\, BAD :: BA : BD, \text{ tumque}$$

$$\text{ſin.}\, DCc : \text{ſin.}\, DBC :: BD : CD,$$

quare componendo rationes

$$\text{ſin.}\, BDA = \frac{BA.\,\text{ſin.}\, BAD.\,\text{ſin.}\, DBC}{CD.\,\text{ſin.}\, DCc},$$

ſeu introductis expreſſionibus analyticis

$$\text{ſin.}\, BDA = \frac{a\,\text{ſin.}\, A.\,\text{ſin.}\, E}{c\,\text{ſin.}\, C}.$$

Si ponatur $A + B + E = 180° + F$, facile patet arcum $360° - F$ eundem habere ſinum ac $180° + F$, ſicque pro B duplicem prodire valorem, quorum prior eſt $B = 180° + F - A - E$, alter $B' = 360° - (A + E + F)$. Idem vero ex contemplatione figurae manifeſtum redditur, deſcripto etenim triangulo BCD pro quo dantur bina latera BC, CD cum angulo BCD, habebitur punctum A quadrilateri deſcribendo ſuper diagonali BD ſegmentum circuli, quod ſuſcipit angulum $= 180° - A$, et centro B radio $= a$ circulum, pro A enim aſſumi poterit alterutrum punctum interſectionis huius circuli cum illo ſegmento, vnde ſponte conficitur pro angulo B binos emergere valores. Sint binae hae interſectiones A, A′ et ducantur lineae bBA, $b'BA'$, ſi igitur angulus bBC pro noſtra figura deſignetur per B, erit $b'BC = B'$, quare oportet eſſe $b'BC - bBC = 180° - 2F$. Eſt vero $F = BDA$, quare fieri oportet

$$b'BC - bBC = ABA' = 180° - 2\,BDA,$$

quod

quod ſic demonſtratur: iuncta AA' patet eſſe $ABA' = 180° - BAA' - BA'A = 180 - 2BA'A$ ob $BA = BA'$, hinc $ABA' = 180 - 2BDA$, eſt enim $BDA = BA'A$.

10. Problema 9. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* A, B *inuenire angulum* C.

Ex aequatione tertia ſtatim deducitur

$$\text{ſin.}(A + B + C) = -\frac{a\,\text{ſin.}\,A - b\,\text{ſin.}(A + B)}{c},$$

quae formula computo inſtituendo ſatis commoda eſt, interim haec transformatio adhiberi poſſet. Ponatur

$\frac{b}{a}\,\text{ſin.}(A + B) = \text{coſ.}\,A\,\text{tang.}\,E$, eritque

$\text{ſin.}(A + B + C) = -\frac{a}{c}(\text{ſin.}\,A + \text{coſ.}\,A.\text{tang.}\,E) = -\frac{a\,\text{ſin.}(A + E)}{c\,\text{coſ.}\,E}$.

Valor anguli C ex formula propoſita duplex prodit, nam ſi ponatur $A + B + C = 180° + F$, habebimus quoque alium valorem pro C, per quem fit $A + B + C' = 360° - F$, anguli enim $180 + F$ et $360° - F$ eundem prorſus habent ſinum. Hoc autem ex conſtructione figurae facile illuſtratur, ductis enim rectis BC, AD quae cum data linea $AB = a$ faciunt angulos aAB, bBC aequales datis A, B, captaque $BC = b$, ſi centro C radio $= c$ deſcribatur circulus, pro quarto puncto quadrilateri D accipi poteſt alterutra interſectio huius circuli cum recta AD. Sint iſtae interſectiones D, D′, tumque eſſe debebit $DCc - D'Cc = 2F - 180°$. Ducta autem CE normali in AD, fiet Tab I. Fig. 7.

$DCc - D'Cc = DCD' = 2DCE$, vnde $DCE = F - 90°$. Eſt autem

$$F = bBC + aAB + cCD - 180° = 180° - CDE,$$

 hoc

hoc eſt $F = ADC$, quare liquet quoque eſſe

$$DCc - DC'c = 2F - 180 = 2ADC - 180.$$

11. Problema 10. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* B, D *inuenire angulum* A.

Solutio ex aequatione noſtra quarta deducitur, per quam fit

$$\text{ſin. } A\,(a + b \text{ coſ. } B) + b \text{ coſ. } A. \text{ ſin. } B = c \text{ ſin. } D,$$

hinc ſi ponatur $\text{tang. } E = \frac{b\, \text{ſin. } B}{a + b\, \text{coſ. } B}$ fiet

$$b \text{ ſin. } B\,(\text{coſ. } A + \text{ſin. } A. \text{cot. } E) = c \text{ ſin. } D, \text{ ſeu}$$

$\frac{b\, \text{ſin. } B}{\text{ſin. } E}. \text{ ſin. } (A + E) = c \text{ ſin. } D$, vnde colligitur

$$\text{ſin } (A + E) = \frac{c\, \text{ſin. } D. \text{ſin. } E}{b\, \text{ſin. } B}.$$

Tab. I. Fig. 5. Pro hac formula obſeruare conuenit, quod E deſignet angulum BAC hincque habeatur $A + E = aAC$, facile autem patet eſſe

$$\text{ſin. } aAC : \text{ſin. } ADC :: CD : AC \text{ tumque}$$

$$\text{ſin. } bBC : \text{ſin. } BAC :: AC : BC,$$

vnde componendo rationes erit

$$\text{ſin. } aAC = \frac{CD. \text{ſin. } ADC. \text{ſin. } BAC}{BC. \text{ſin. } bBC},$$

ſeu introductis expreſſionibus analyticis

$\text{ſin. } aAC = \frac{a\, \text{ſin. } D. \text{ſin. } E}{b\, \text{ſin. } B}$. Quum poſito

$$\frac{a\, \text{ſin. } D. \text{ſin. } E}{b\, \text{ſin. } B} = \text{ſin. } aAC,$$

pro $A + E$ ſumi poterit vel aAC, vel $180^\circ - aAC$, patet hinc pro A binos prodire valores, priorem $A = aAC - BAC$, alterum $A' = 180^\circ - aAC - BAC$, quod per conſtructionem Geometricam egregie confirmatur, dum ſuper AC ſegmentum circuli concipitur deſcriptum, quod ſuſcipit angulum $= 180^\circ - D$ et

et centro C radio $= c$ deſcribitur circulus hoc ſegmentum in punctis D, D' interſecans. Ductis enim rectis a A D, a' A D', fiet a A B = A et a' A B = A' ex quo eſſe oportebit

$$A - A' = aAB - a'AB = DAD' = 2aAC - 180^\circ = aAC - CAD.$$

Iuncta autem D'D ob CD' = CD, patet eſſe

$$CAD = CD'D = CDD' \text{ ideoque}$$

$$aAC - CAD = aAC - CDD',$$

at in quadrilatero A C D D' circulo inſcripto eſt omnino a'AC = CDD', hinc aAB-a'AB=aAC-a'AC, quod per ſe eſt manifeſtum.

12. Problema 11. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* A, D *inuenire angulum* B.

Per aequationem quartam ſit

$$\text{ſin.}(A+B) = \tfrac{c}{b}\,\text{ſin.}D - \tfrac{a}{b}\,\text{ſin.}A.$$

Euidens autem eſt hinc pro B binos produci valores, nam ſi ſtatuatur $\frac{c}{b}$ ſin. D $-$ $\frac{a}{b}$ ſin. A = ſin. E erit vel B = E $-$ A, vel B' = 180 $-$ E $-$ A. Ratio huius duplicis valoris pro B ex conſideratione figurae quoque redditur manifeſta. Si enim ductae concipiantur A B, A E quae cum recta poſitione data A D angulos conſtituunt aAB, EAD aequales ipſis A et D, Tab. I. Fig. 8. tumque reſecentur A B = b et A E = c, atque per punctum E ducatur E C' C parallela ipſi A D et centro B radio = b ſecetur haec recta in punctis C, C', nec non per C, C' agantur lineae CD, C'D' parallelae ipſi A E; patet bina iſta trapezia ABCD, ABC'D' conditionibus Problematis ſatisfacere.

facere Pro noſtra autem figura fiet angulus

$E = A + B = 180^\circ + BCG$

ideoque quum E exſuperet 180°, ponamus

$A + B = 180^\circ + F$,

ita vt ſit $F = BCG$, eſſeque debebit

$A + + B' = 360^\circ - F$, hinc

$B' = 360^\circ - BCG - aAB$. Eſt vero

$B' = 360^\circ - bBC'$ et $B = bBC$,

pro poſteriori valore facile conſtat eſſe

$bBC = BCG + BAD = 180^\circ + BCG - aAB$,

de priori autem patet eſſe

$bBC' = BC'G + BAa = BCG + BAa$

ob $BC = BC'$. Ideoque poſito $BCG = F$, erit

$B = 180^\circ + F - A$ et $B' = 360^\circ - F - A$.

. 13. Problema 12. *Datis lateribus* a, b, c *et angulis* A, B, *inuenire angulum* D.

Ex aequatione quarta ſtatim deducitur

$\text{ſin.}\, D = \frac{a}{c}\, \text{ſin.}\, A + \frac{b}{c}\, \text{ſin.}\, (A + B)$.

Tab. I. Fig. 7. vbi de duplicitate anguli D obſeruandum, quod ſi vnus eius valor exprimatur per D, alterum fore $D' = 180 - D$. Nam ſi conſtruatur triangulum ABC cuius dantur bina latera $AB = a$, $BC = b$ et angulus $ABC = 180^\circ - B$, tumque ducatur recta aAD quae cum AB facit angulum $aAB = A$, inuenietur punctum quadrilateri D in interſectione huius rectae cum circulo centro C radio $= c$ deſcripto. Sint autem binae interſectiones D, D', ex quo bini valores anguli D prodibunt, alter $= CDG$, alter $= CD'G$, eſt vero

$CDG + CD'G = CDG + CDA = 180$.

14.

14. Problema 13 et 14. *Datis quadrilateri angulis et lateribus* a, b, *inuenire latus* c, *vel datis angulis et lateribus* a, c *inuenire latus* b.

Per aequationem quartam fit $c = \frac{a\,\text{ſin.}\,A + b\,\text{ſin.}\,(A+B)}{\text{ſin.}\,D}$ et $b = \frac{c\,\text{ſin.}\,D - a\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,(A+B)}$. Patet autem pro c et b nullam adeſſe ambiguitatem modo anguli quadrilateri prorſus ſunt determinati; ſi enim dentur anguli Tetragoni et bina eius latera, reliqua quoque latera non niſi vnico modo determinari poſſunt. Et primum quidem ſi dentur quadrilateri latera A B, B C patet Tab. I. ducta diagonali A C, triangulum A B C prorſus de- Fig. 4. terminari, pro triangulo autem A D C dari diagonalem cum angulis, quare alterutrum reliquorum vt C D non niſi vnicum recipere poteſt valorem. Sin dentur latera A B, C D, concipiatur per B ducta Fig. 7. B H parallela et aequalis ipſi C D, et iungatur A H, nunc in triangulo A B H, ex datis binis lateribus A B, B H et angulo A B H, cognoſcentur anguli B A H, B H A, et latus A H, hinc vero ob datos angulos B A D, B H D dabuntur in triangulo A H D omnes anguli cum latere A H, ex quo eruitur latus H D = B C cuius quoque non niſi vnicus eſſe poteſt valor

15. Solutiones ſupra allatae ad eas quaeſtiones praecipue ſpectant, quibus ex datis quibusdam partibus cognitis Tetragoni, pars quaedam ſingularis incognita, latus nempe vel angulus ſeorſim inueſtigari debet; at ſi ex iisdem datis plures partes quadrilateri ſimul determinandae ſunt, quaeſtiones non-

nunquam aliquanto compendio abſolui poſſunt, quarum igitur ſolutiones ne aliquid in hac doctrina deſideretur, heic quoque explicabimus:

Problema I. *Datis lateribus quadrilateri* a, b, c *et angulis* B, C, *inuenire reliquos angulos* A, D *et reliquum latus* d.

Heic in id imprimis intenti erimus, vt bini anguli A, D ſimul determinentur, quod facile fieri poteſt, modo eorum cognoſcatur differentia, ſumma enim iam cognita habetur $= 360° - B - C$. Quoniam igitur per aequationem noſtram tertiam eſt

$$a \text{ſin.} A + b \text{ſin.} (A + B) + c \text{ſin.} (A + B + C) = 0$$

ſi loco A ſcribatur $A + B - B$, fiatque euolutio, prodibit

$$a \text{ſin.} (A + B) \text{coſ.} B - a \text{coſ} (A + B) \text{ſin.} B + b \text{ſin.} (A + B) + c \text{ſin.} (A + B) \text{coſ.} C + c \text{coſ.} (A + B) \text{ſin.} C = 0$$

ex qua aequatione deducitur:

$$\text{Tang.} (A + B) = \frac{a \,\text{ſin.} B - c \,\text{ſin.} C}{b + a \,\text{coſ.} B + c \,\text{coſ.} C},$$

quum vero ſit $A + B = 360 - C - D$, fiet

$A + B = \frac{1}{2}(A + B - C - D) + 180°$, vnde colligitur

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(A - D + B - C) = \frac{a \,\text{ſin.} B - c \,\text{ſin.} C}{b + a \,\text{coſ.} B + c \,\text{coſ.} C},$$

ex qua aequatione ob datam differentiam $\frac{1}{2}(B - C)$ innoteſcet $\frac{1}{2}(A - D)$. Porro ſi conſideremus eſſe

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(A - D) = \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2}(A - D + B - C) - \text{Tang.} \frac{1}{2}(B - C)}{1 + \text{Tang.} \frac{1}{2}(A - D + B - C) \text{Tang.} \frac{1}{2}(B - C)}$$

tumque

cumque

$$\text{ſin.}B=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{coſ.}B=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{ſin.}C=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{coſ.}C=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$

perſpiciemus eſſe

$$a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C=(a-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)+(a+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C=b+(a+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)-(a-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)$$

ex quo colligetur facta neceſſaria reductione

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-D)=\frac{(a-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)-b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)}{(a+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)+b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

Caeterum haec formula aliquanto facilius ſic inuenitur: quum ſit per aequationem quartam

$$a\,\text{ſin.}A-c\,\text{ſin.}D=-b\,\text{ſin.}(A+B)\text{, ſiue}$$
$$a\,\text{ſin.}A-c\,\text{ſin.}D=+b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-D+B-C)=b(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-D)\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C))$$

conſequimur

$$\tfrac{1}{2}(a-c)(\text{ſin.}A+\text{ſin.}D)+\tfrac{1}{2}(a+c)(\text{ſin.}A-\text{ſin.}D)=$$
$$(a-c)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-D)+(a-c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-D)=$$
$$b(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-D)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)+\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-D)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C))\text{,}$$

vbi ſi praeterea notetur eſſe

$\text{ſin}\tfrac{1}{2}(A+D)=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)$ et $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+D)=-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)$

conſequemur

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-D)=\frac{(a-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+C)-b\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B-C)}{(a+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+C)+b\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

 Si

Si in hac formula ponatur $b = 0$, quo caſu Tetragonum in triangulum abit, fiet

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-D) = \frac{a-c}{a+c}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{c-a}{c+a}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+D),$$

quae eſt iam diu cognita trianguli proprietas. Simili modo ſi ponatur $B = 0$, fiet

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-D) = \frac{(a+b-c)}{a+b+c}\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}C$$

iterum pro triangulo. Praeter has formulas inueſtigandae $A - D$ inſeruientes, etiam ſequentes notari merentur:

$$\text{ſin.}(A-D) = \frac{(a^2-c^2)\,\text{ſin.}(B+C)-b^2\,\text{ſin.}(B-C)+2ab\,\text{ſin.}C-2bc\,\text{ſin.}B}{a^2+b^2+c^2+2ab\,\text{coſ.}B+2ac\,\text{coſ}(B+C)+2bc\,\text{coſ.}C}\ \text{vel}$$

$$\text{Tang.}(A-D) = \frac{(a^2-c^2)\,\text{ſin.}(B+C)-b^2\,\text{ſin.}(B-C)+2ab\,\text{ſin.}C-2bc\,\text{ſin.}B}{(a^2+c^2)\,\text{coſ.}(B+C)+b^2\,\text{coſ.}(B-C)+2ac+2ab\,\text{coſ.}C+2bc\,\text{coſ.}B}$$

quae formulae inde deducuntur, quod ſit

$$\text{Tang.}\ A = -\frac{(b\,\text{ſin.}B+c\,\text{ſin.}(B+C)}{a+b\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}(B+C)}\ \text{et}$$

$$\text{Tang.}\ D = -\frac{(b\,\text{ſin.}C+a\,\text{ſin}(B+C))}{c+b\,\text{coſ.}C+a\,\text{coſ.}(B+C)}.$$

Si in formula pro ſin. $(A - D)$, ponatur $b = 0$ quo caſu Tetragonum in triangulum abit, fiet

$$\text{ſin.}(A-D) = \frac{(a^2-c^2)\,\text{ſin.}(B+C)}{a^2+c^2+2ac\,\text{coſ.}(B+C)} = \frac{(c^2-a^2)\,\text{ſin.}(A+D)}{d^2}$$

quae eſt egregia trianguli proprietas, haud vulgo cognita. Inuentis per formulas praeſcriptas omnibus angulis quadrilateri, latus d per aequationem quartam quaeri poſſet, praeſtabit tamen formularum heic allatarum vſum adhibere. Scilicet ex §. 2. deducitur

$$dd = (a\,\text{ſin.}B - c\,\text{ſin.}C)^2 + (b + a\,\text{coſ.}B + c\,\text{coſ.}C)^2;$$

inuento igitur

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-D+B-C) = \frac{a\,\text{ſin.}B - c\,\text{ſin.}C}{b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C},\ \text{fiet}$$

$d =$

$$d = \frac{a\,\text{ſin.}\,B - c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,(A - D + B - C)}.$$

Denique ob

$$dd = ((a-c)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,(B+C) - b\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,(B-C))^2$$
$$+ ((a+c)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,(B+C) + b\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,(B-C))^2$$

ſi quaeratur

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(A-D) = \frac{(a-c)\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(B+C) - b\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(B-C)}{(a+c)\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(B+C) + b\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(B-C)},\ \text{fiet}$$

$$d = \frac{(a-c)\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(B+C) - b\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}(B-C)}{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,(A-D)}.$$

16. Problema II. *Datis lateribus* a, b, d *et angulis* B, C *inueſtigare reliquos angulos* A, D *nec non latus* c.

Quia hoc caſu anguli A, D in diſpari ſunt ratione ſufficiet alterutrum eorum quaeſiuiſſe, angulus autem D facillime inuenietur per hanc formulam

$$\text{ſin.}\,D = \frac{b\,\text{ſin.}\,C + a\,\text{ſin.}\,(C+B)}{d},\ \text{quo inuento erit}$$

$$A = 360^\circ - (B + C + D)\ \text{et}\ c = \frac{a\,\text{ſin.}\,A - b\,\text{ſin.}\,(C+D)}{\text{ſin.}\,D}$$

vel ſi placet

$$c = -b\,\text{coſ.}\,C - a\,\text{coſ.}\,(C+B) - d\,\text{coſ.}\,(C+B+D).$$

Siquidem vero angulus D duplicem recipit valorem, liquet omnino pro c binos quoque prodire valores.

17. Problema III. *Datis lateribus* a, c, d *et angulis* B, C *inuenire angulos* A, D *et latus* b.

Per aequationem quartam habebimus pro hoc Problemate

$a\,\text{ſin.}\,B + d\,\text{ſin.}\,(A+B) - c\,\text{ſin.}\,C = 0$, ex quo colligimus

 ſin.

ſin. $(A + B) = \frac{c}{d}$ ſin. $C - \frac{a}{d}$ ſin. B, tum vero fiet

$$b = -\frac{(a\,\text{ſin.}\,A + c\,\text{ſin.}\,(A + B + C))}{d}.$$

Praeterea notare iuuat ob

$$B + A = 360^\circ - C - D,\ \text{eſſe}\ B + A = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B - C + A - D)$$

et ſin. $(B + A) = -$ ſin. $\frac{1}{2}(A - D + B - C)$, ita vt ſit

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}(A - D + B - C) = \tfrac{a}{d}\ \text{ſin.}\ B - \tfrac{c}{d}\ \text{ſin.}\ C.$$

Quum pro ſumma angulorum A, B ex aequatione

$$\text{ſin.}\ (B + A) = \tfrac{c}{d}\ \text{ſin.}\ C - \tfrac{a}{d}\ \text{ſin.}\ B$$

duplex prodeat valor, neceſſum omnino eſt vt prouti vnus vel alter horum valorum adhibeatur in aequatione noſtra pro b, hoc latus duplicem ſortiatur valorem.

18. Problema IV. *Datis omnibus Tetragoni lateribus et angulo quopiam* B, *reliquos inuenire angulos.*

Si per Probl. 6. inuentus fuerit angulus D, reliquum eſt vt quaerantur anguli A et C et quum eorum iam cognoſcatur ſumma $= 360^\circ - B - D$, tantum opus eſt vt differentia $A - C$ inueſtigetur, quem in finem ſequenti modo procedere licet. Quum ſit

$$a\,\text{ſin.}\,A + b\,\text{ſin.}\,(A + B) + c\,\text{ſin.}\,(A + B + C) = 0$$
$$b\,\text{ſin.}\,C + a\,\text{ſin.}\,(B + C) + d\,\text{ſin.}\,(A + B + C) = 0$$

ſi prior aequatio per d, poſterior per c multiplicetur et productorum capiatur differentia, haec prodibit aequatio:

$$ad\,\text{ſin.}\,A - bc\,\text{ſin}\,C + bd\,\text{ſin.}(A + B) - ac\,\text{ſin.}(B + C) = 0.$$

Simili

Simili ratione ob

$$a\,\text{coſ.}\,A + b\,\text{coſ.}(A+B) + c\,\text{coſ.}(A+B+C) + d = 0$$
$$b\,\text{coſ.}\,C + a\,\text{coſ.}(B+C) + d\,\text{coſ.}(A+B+C) + c = 0$$

multiplicata priori aequatione per d, poſteriori per c et ſumta differentia conſequemur

$$ad\,\text{coſ.}A - bc\,\text{coſ.}C + bd\,\text{coſ.}(A+B) - ac\,\text{coſ.}(B+C) + dd - cc = 0.$$

Ex priori fit facta euolutione terminorum ſin. $(A+B)$, ſin. $(B+C)$:

$$(ad-bc+(bd-ac)\,\text{coſ.}B)(\text{ſin.}A+\text{ſin.}C) + \tfrac{1}{2}(ad+bc+(bd+ac)\,\text{coſ.}B)(\text{ſin.}A-\text{ſin.}C)$$
$$+\tfrac{1}{2}(db-ac)\,\text{ſin.}B\,(\text{coſ.}A+\text{coſ.}C) - \tfrac{1}{2}(db+ac)(\text{coſ.}C-\text{coſ.}A) = 0$$

ſiue

$$\text{I.}\quad (ad-bc+(bd-ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$+(ad+bc+(bd+ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$+(bd-ac)\,\text{ſin.}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$-(db+ac)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C) = 0.$$

Ex poſteriori autem euolutis terminis coſ. $(B+A)$, coſ. $(B+C)$ conſequemur

$$\text{II.}\quad (ad-bc+(bd-ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$-(ad+bc+(bd+ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$-(db-ac)\,\text{ſin.}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C) - (bd+ac)\,\text{ſin.}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$+dd-cc = 0.$$

Factis vero iſtis combinationibus

$$\text{I.}\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C) + \text{II}\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C);$$
$$\text{I.}\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C) - \text{II.}\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)$$

ad ſequentes pertingemus aequationes:

$$(ad-bc+(bd-ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C) - (bd+ac)\,\text{ſin.}B.\,\text{ſin}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$+(dd-cc)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C) = 0$$
$$(ad+bc+(bd+ac)\,\text{coſ}B)\,\text{ſin}\tfrac{1}{2}(A-C) + (bd-ac)\,\text{ſin.}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$+(cc-dd)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C) = 0.$$

Ex

Ex quarum aequationum vtrauis, quaeri poſſet $A-C$, ob cognitum angulum B et $A+C=360^\circ-B-D$; verum quum hae formulae ſatis ſint complicatae, multiplicetur prior per ſin. $\frac{1}{2}(A+C)$ et poſterior per coſ. $\frac{1}{2}(A+C)$ et ſumatur eorum ſumma, tumque erit:

$$\begin{aligned}(ad-bc+(db-ac)\text{coſ.}B)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)\\ +(bd-ac)\,\text{ſin.}B.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)\\ +(ad+bc+(bd+ac)\,\text{coſ.}B)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)\\ -(bd+ac)\,\text{ſin.}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)=0.\end{aligned}$$

Vbi ſi obſeruetur eſſe

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+D) \text{ et } \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)=-\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+D)$$

tumque

$$(db-ac)(\text{coſ.}B\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C)+\text{ſin.}B\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C))=(db-ac)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(D-B)$$

$$(db+ac)(\text{coſ.}B.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A+C)-\text{ſin.}B.\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A+C))=-(db+ac)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(D-B)$$

fiet $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(A-C)((ad-bc)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+D)+(bd-ac)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(D-B))=$
$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(A-C)((ad+bc)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(B+D)+(bd+ac)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(D-B))$, ſeu

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{(ad-bc)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(B+D)+(bd-ac)\,\text{ſin.}\frac{1}{2}(D-B)}{(ad+bc)\,\text{coſ.}\frac{1}{2}(B+D)+(bd+ac)\,\text{coſ.}\frac{1}{2}(D-B)}.$$

Caeterum haec formula multo facilius inueniri poteſt, ducendo diagonalem AC quadrilateri $ABCD$, nam ſi differentia angulorum BCA, BAC indicetur per M et differentia angulorum DCA, CAD per N, erit $\frac{1}{2}(A-C)=\frac{1}{2}(M+N)$ hinc

Tab. I. Fig. 4

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{\text{Tang.}\frac{1}{2}M+\text{Tang.}\frac{1}{2}N}{1-\text{Tang.}\frac{1}{2}M\,\text{Tang.}\frac{1}{2}N},$$

conſtat autem eſſe

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}M=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B\,\tfrac{a-b}{a+b} \text{ et } \text{Tang.}\tfrac{1}{2}N=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}D.\tfrac{d-c}{d+c}; \text{ hinc}$$

Tang.

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{(a-b)(c+d)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D+(d-c)(a+b)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D}{(a+b)(d+c)\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}B.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}D-(a-b)(d-c)\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}B.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}D}$$

quae formula omnino cum ſuperiori congruit, tumque et hoc modo exprimi poteſt:

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{(a-b)(c+d)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B+(d-c)(a+b)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}D}{(a+b)(d+c)-(a-b)(d-c)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}B.\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}D}.$$

Porro quum ſit

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C+B-D)=\frac{\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)-\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(D-B)}{1+\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C)\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(D-B)}$$

fiet hinc

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-C+B-D)=\frac{ad\,\text{ſin.}\,B-bc\,\text{ſin.}\,D-ac\,\text{ſin.}\,(D-B)}{ad\,\text{coſ.}\,B+bc\,\text{coſ.}\,D+ac\,\text{coſ.}\,(D-B)+bd}.$$

Caeterum inuento angulo D, facillime inuenietur A ope formulae

$$a\,\text{ſin.}\,B+d\,\text{ſin.}\,(A+B)+c\,\text{ſin.}\,(A+B+D)=0.$$

19. Problema V. *Datis lateribus* a, b, c *et ang.* B, D *inuenire reliquos angulos* A, C *et latus* d.

Quaeratur primum angulus A ope formulae ex aequatione quarta deducendae

$$\text{ſin.}\,A\,(a+b\,\text{coſ.}\,B)+b\,\text{coſ.}\,A\,\text{ſin.}\,B=c\,\text{ſin.}\,D,$$

ponendo nimirum

$\text{Tang.}\,E=\frac{b\,\text{ſin.}\,B}{a+b\,\text{coſ.}\,B}$, fietque $\text{ſin.}(A+E)=\frac{c\,\text{ſin.}\,D.\,\text{ſin.}\,E}{b\,\text{ſin.}\,B}$,

tum vero ſponte innoteſcit angulus

$$C=360^\circ-(A+B+D).$$

Latus autem d habebitur per formulam

$$d=\frac{c\,\text{ſin.}\,C-a\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,(A+B)}.$$

Caeterum pro hoc caſu tradi quidem poſſet formula valorem ipſius Tang. $\frac{1}{2}$ (A — C) exhibens, quae tamen complicatior eſt, quam vt heic tradi mereatur.

20. Vt ea melius intelligantur, quae in prioris Diſſertationis §. 26. monuimus de enumeratione ſolutionum Polygoni, quae locum habent, ſi reſpiciatur ad eius diagonales et angulos diagonalium cum lateribus Polygoni; pro Tetragono adferre placet expoſitionem earum ſolutionum, quas praeter angulos et latera quadrilateri, diagonalis quaedam eius vel anguli huius diagonalis cum lateribus, ingrediuntur. Antequam vero hanc enumerationem tradere liceat, primum ſequentes regulae generales quibus fundatur, erunt praemittendae.

I. In quacunque ſolutione Polygoni duo ad minimum inueniri debent lineae, quantitas enim linearum ex meris angulis determinari nequit.

II. In omni ſolutione Polygoni, dum per diagonales in triangula concipitur reſolutum, non plures quam tres occurrere debent partes ad vnum idemque triangulum pertinentes; nam ſi plures occurrerent vti quatuor, quarta illa pars ex tribus reliquis iam determinari cenſenda eſt, ideoque excluſa hac parte, in ſolutione tot non reperirentur quantitates, quae ad Polygonum determinandum requi-
Tab. I. runtur. Sic ſi in quadrilatero A B C D ponatur
Fig. 9. eſſe inueſtiganda aequatio inter latera A B, B C,
Fig. 4. C D, D A, diagonalem A C et angulum B; intelligitur id minime effici poſſe, ſiquidem pro triangulo

gulo A B C angulus B ex lateribus A B, B C, A C iam perfecte determinatur, pro triangulo autem A C D alterutrum laterum C D, D A ex diagonali A C et altero latere, minime determinatur.

21. Ponamus pro quadrilatero A B C D, latera vt ante indigitari litteris, *a*, *b*, *c*, *d*, angulos litteris A, B, C, D, diagonalem A C littera *e* exprimi, angulos vero B C D, A C D per litteras γ, γ'. Si itaque quaerendae ſint ſolutiones, quas diagonalis *e* vel anguli γ, γ' ingrediuntur, ſtatim patet bina earum genera conſtitui poſſe; quorum prius continet eas ſolutiones, quas diagonalis *e* ingreditur, poſterius illas in quibus non quidem haec diagonalis, ſed tamen vel vterque, vel alteruter angulorum γ, γ' reperitur. Pro priori genere obſeruandum eſt, angulum A ſemper vna cum diagonali in ſolutione adeſſe debere; quum enim ſolutionem ſex omnino partes ingrediantur, et earum partium quae ad triangula A B C, A C D pertinent, non niſi tres occurrere poſſint, quarum iam vna habetur diagonalis A C vtrique triangulo communis, intelligitur praeter hanc partem binas tantum occurrere poſſe, ad vnumquodque triangulum pertinentes; quare neceſſum eſt vt ſaltem ſexta pars reperiatur, quae ad neutrum horum triangulorum pertineat, cuiusmodi eſt angulus A vel C. Pro poſteriori autem genere, non videtur hanc regulam eſſe ſtabiliendam, vt angulus A vel C ſolutionem ſemper ingrediatur, ſic nullum quidem eſt dubium inter has ſex partes *a*, *b*, *c*, *d*, γ, D aequationem

inueniri poſſe, quod ſi praeſtare liceat, nec neceſſarium erit, vt angulus per quem tranſit diagonalis in ſolutione occurrat.

22. Pro priori genere ſubdiuiſio ſolutionum in certas claſſes ex eo principio deduci poteſt, quod praeter diagonalem e vel quatuor, vel tria, vel bina, vel tantum vnum quadrilateri latus ſolutionem ingredi queant. Quo principio adhibito ſequentes conſequemur ſolutionum prioris generis Claſſes et ordines:

		Partes Tetragoni ſolut. ingredientes:
I. Claſſis.	Ordo I.	a, b, c, d, e, A
II. Claſſis	1.	a, b, c, e, A, D
	2.	a, b, c, e, A, C
	3.	a, b, c, e, A, γ'
	4.	a, b, d, e, A, D
	5.	a, b, d, e, A, γ'
IV. Claſſis	1.	a, e, A, B, C, D
	2.	a, e, A, γ, C, D
	3.	b, e, A, B, C, D
	4.	b, e, A, γ, C, D

		Partes Tetragoni ſolut. ingredientes
III. Claſſis	Ordo 1.	a, b, e, A, C, D
	2.	a, c, e, A, D, γ
	3.	a, c, e, A, B, C
	4.	a, c, e, A, B, D
	5.	a, c, e, A, B, γ'
	6	a, c, e, A, γ, D
	7.	a, c, e, A, γ, C
	8.	a, d, e, A, B, C
	9.	a, d, e, A, B, D
	10.	c, d, e, A, B, γ'
	11.	a, d, e, A, γ, C
	12.	b, c, e, A, B, D
	13.	b, c, e, A, B, γ'
	14.	b, c, e, A, C, γ'

Inter has ſolutionum ſpecies nonnullae ſunt, quae tantam inter ſe habent affinitatem, vt dubii ſimus an non ad vnum, eundemque ordinem referendae ſint,

ſint, huiusmodi ſunt tertiae claſſis ordo tertius et quartus, nam in aequatione quam pro ordine tertio locum habere ſupponimus, ſi in locum ipſius C ſuſſiciatur $360° - (A + B + D)$, conſequemur aequationem pro ordine quarto. Simili ratione ordo octauus et nonus inter ſe conueniunt, tum vero pro claſſe quarta ordines 2 et 4, hoc modo conſentient cum 1 et 3.

23. Solutionum ſpecies a nobis inuentae nonnihil differunt ab iis, quas Cel. *Lambert* attulit, cuius diſcrepantiae ratio eſt, quod in enumeratione ab Ipſo facta praetermiſſi ſint ordines tertiae claſſis 8 et quartae 2 et 4; at eodem iure excludere debuisſet claſſis tertiae ordinem quartum, quem tamen retinuit. Si igitur fas eſt tertium et quartum ordinem tertiae claſſis ſeorſim conſiderare; nec dubitare quidem licet, quin ordines tertiae claſſis 8, 9 et quartae 1, 2 vel 3, 4 pro ſeparatis habendi ſint. Pro hoc quidem genere ſolutionum euidenter patet angulos, quos diagonalis A C facit cum lateribus A B, A D, cum angulis B C A, A C D ſimul conſiderari non poſſe. Nam ſi anguli D A C, B A C exprimantur per α, α', euidenter oſtendi poteſt, α cum γ vel γ' ad eandem ſolutionem concurrere non poſſe in qua reperitur angulus A et diagonalis e. Non cum γ', quia ſic pro triangulo A C D iam tres haberentur partes, e, α, γ', pro altero vero triangulo binae, e et $A - \alpha = \alpha'$, adeſſe igitur adhuc deberent binae partes eiusdem trianguli, quod fieri nequit. Sin dentur α cum γ, ob $A - \alpha = \alpha'$, res eodem redibit.

24. Sequitur vt eas expendamus ſolutiones, quae ad poſterius referendae ſunt genus, in quibus non ipſa diagonalis, ſed vna vel plures angulorum quos cum lateribus Tetragoni facit, occurrunt. Subdiuiſio in claſſes ex eodem principio adornabitur, quo ſupra vſi ſumus, conſideratione nimirum laterum Polygoni, quae in ſolutione reperiuntur:

	Partes Tetragoni ſolutionem ingredientes		Partes Tetragoni ſolutionem ingredientes
Ordo.	1. a,b,c,d,A,γ.	Ordo.	18. a,b,c,D,α',γ'.
Claſſis I.	2. a,b,c,d,γ,D.	Claſſis III.	1. a,b,A,B,D,γ'.
	3. a,b,c,d,γ,α		2. a,b,A,D,C,γ.
	4. a,b,c,d,γ,C.		3. a,c,A,B,C,γ'.
	1. a,b,c,A,B,γ'.		4. a,c,A,B,C,α.
	2. a,b,c,A,D,γ		5. a,c,A,B,D,γ'.
	3. a,b,c,A,D,γ'.		6. a,c,A,B,D,γ.
	4. a,b,c,A,C,γ.		7. a,c,A,B,D,α.
	5. a,b,c,A,D,α.		8. a,c,A,B,α,γ'.
	6. a,b,c,A,C,α.		9. a,c,A,C,α,γ.
	7. a,b,c,A,α,γ.		10. a,c,A,D,α,γ.
Claſſis II.	8. a,b,c,A,α,γ'		11. a,d,A,B,C,γ'.
	9. a,b,c,C,B,α		12. a,d,A,B,C,α.
	10. a,b,c,C,D,α.		13. a,d,A,B,D,γ.
	11. a,b,c,C,D,α'.		14. a,d,A,B,D,α.
	12. a,b,c,C,D,γ.		15. a,d,A,B,α,γ'.
	13. a,b,c,C,α,γ		16. a,d,A,C,α,γ.
	14. a,b,c,B,D,α		17. a,d,B,C,D,γ'.
	15. a,b,c,B,D,γ'.		18. a,d,B,C,D,α.
	16. a,b,c,B,α,γ'.		19. a,d,B,C,α,γ.
	17. a,b,c,D,α,γ.		20. a,d,B,D,α,γ.

Partes

25. Inſignis diuerſitas inter has ſolutiones et illas quas Cel *Lambert* ex hoc genere recenſuit, inde quidem potiſſimum prouenit, quod Celeb. hic Geometra omnes eas ſolutiones praetermittendas cenſuit, in quibus non occurrit angulus A cum aliquo angulorum C, γ, γ', vel viciſſim C cum A, α, α'; etſi autem haec praeſcribatur regula, tamen binas ſolutiones inter noſtras reperiemus, quae in enumeratione Cel. *Lambert* non comparent, primam videlicet atque ſecundam tertiae claſſis. Minime tamen dubium eſſe poteſt, quin inter has partes a, b, A, B, D, γ', vel a, b, A, C, D, γ' aequatio inueniri poſſit; id quod ex inſpectione figurae clarum ſit, nam ſi ſuppoſamus ex datis a, b, A, B, γ' quaerendum eſſe angulum D, liquet huius quaeſtionis ſolutionem omnino in poteſtate eſſe, in triangulo enim A B C ex datis lateribus a, b et angulo B inuenietur angulus α', quare dum pro triangulo A C D dantur bini anguli γ' et $\alpha = A - \alpha'$, inuenietur tertius $=$ D. Similiter ſi ex datis a, b, A, D, γ' quaerendus ſit angulus C, ex datis D, γ' inuenietur α, hincque $\alpha' = A - \alpha$, tumque in triangulo A B C ex datis, a, b, α' innoteſcet angulus γ, proinde $C = \gamma + \gamma'$.

26. Ex his quae modo docuimus, conſtat quam inſignis varietas ſolutionum oriatur pro eo caſu, quo diagonalis quaedam Tetragoni vel anguli eius cum lateribus Polygoni, conſiderantur; at tenendum eſt maiorem adhuc prodire ſolutionum diverſitatem, ſi ad binas diagonales et angulos harum diagonalium cum lateribus Polygoni attendatur, harum

rum igitur ſolutionum enumerationem heic tradere, eo minus neceſſum ducimus, quod non ſolum ſatis complicatos requireret labores, ſed etiam quia haec enumeratio parum conferre videtur ad doctrinam de ſolutione Polygonorum in genere, illuſtrandam. Qui autem completam enumerationem ſolutionum pro Tetragono adumbrare velit, cum via ab hac prorſus diuerſa incedere debere exiſtimamus; propoſita enim figura A B C D in qua bina quaeuis puncta lineis rectis iuncta ſupponuntur, ita vt ſex omnino in hac figura centur lineae et duodecim anguli, is qui perfectam enumerationem ſolutionum pro hac figura tradere vult, de eo ſollicitus eſſe debet, vt omnes modos exquirat, quibus ex octodecim partibus figurae propoſitae, ſex diſſimili ratione inter ſe combinantur; illis tamen regulis probe obſeruatis, vt has combinationes binae ſaltem ingrediantur lineae, tumque vt quomodocunque hae partes accipiantur non plures quam tres ad vnum idemque triangulum referantur, vti etiam per ſe patet non plures quam binos angulos ad vnum idemque punctum locatos, occurrere debere. Quod autem nullo facto diſcrimine linearum, hanc enumerationem abſoluendam exiſtimamus, id ea de cauſſa fit, quia in noſtra figura omnino tria Tetragona conſiderari poſſunt, quorum *primum* eſt A B C D, *ſecundum* A C B D et *tertium* A C D B, ideoque enumeratio ſolutionum ita inſtituenda eſt, vt aeque adplicari poſſit ad vnum ac alterum horum quadrilaterorum. Diſpertitio autem ſolutionum in claſſes petenda eſt ex numero linea-

Tab. I. Fig. 9.

linearum, quae ſolutionem ingrediuntur, ideoque quinque conſequemur claſſes, prouti in ſolutione ſex, quinque, quatuor, tres, aut binae reperiuntur lineae. Ratio autem angulorum, qui cum his lineis ingredi debent, ex conſideratione linearum omiſſarum optime deduci poſſe exiſtimamus. In ſingulis autem claſſibus diſcrimen ſolutionum deducere licet ex relatione, quam inter ſe tenent lineae ſolutionem ingreſſae; ſic pro Claſſe tertia vbi quatuor occurrunt lineae, diſcrimen ſolutionum ex eo oritur, quod lineae omiſſae ſint vel continuae vel diſcretae. Pro Claſſa Quarta tres lineae quae in ſolutione adſunt vel triangulum conſtituunt, vel non, et pro claſſe quinta binae lineae quae ſolutioni inſunt, vel continuae ſunt, vel diſcretae. Si ad huiusmodi cautiones attendatur, exiſtimamus enumerationem omnium ſolutionum pro Tetragono modo facillimo et maxime perſpicuo tradi poſſe, quam tamen hac occaſione ſuſcipere, noſtri non eſt inſtituti.

27. In ſolutionibus quibus ad partes in circuitu quadrilateri vel alius Polygoni conſtitutas, reſpicitur, ad aequationes altiores quam ſecundi gradus non peruenitur; at pro ſolutionibus quibus conſideratio diagonalium inducitur aequationes adeo biquadraticae locum inuenient, id eſt Problemata alia atque alia occurrent, quae quatuor diuerſas admittunt ſolutiones, id quod exemplo vberius declarabimus. Statuamus ex datis quatuor lineis AB, BC, CD, DA et angulo BAC inueſtigandam eſſe lineam BD. Primum Tab. I. itaque ex datis lateribus AB, BC et angulo BAC Fig. 10. n. 1. 2.

 trian-

trianguli BAC quaeratur latus AC; patet vero pro AC binos prodire poſſe valores diuerſos, ſi fuerit angulus BAC acutus et $BC < AB$, ſint hi valores AC, AC'. Conſtruantur ſuper AC triangula ADC, AD'C, quorum latera AD, DC data habentur et iungantur DB, D'B, quo facto binos habebimus valores ipſius DB. Tum vero ſimili ratione ſuper AC', deſcribantur triangula AC'D'', AC'D''', quorum latera $AD'' = AD'''$, $D''C' = D'''C'$ data et iungantur BD'', BD''', hae lineae binos reliquos valores quaeſitos ſuppeditabunt.

28. Antequam huic de Tetragono meditationi finem ſtatuam, ſolutiones binorum Problematum adferre placet, quorum prius notatu dignum eſt, quia relationem exhibet omnium linearum quadrilateri, alterum vero quia praxis Geodeſiae praeprimis iſti Problemati innititur. Sit igitur propoſitum Problema ſequens: *ex datis lateribus Tetragoni* AB, BC, CD, AD *et diagonali* AC, *quaerere diagonalem* BD.

Tab. I. Fig. 9. Lineae AB, BC, CD, DA, AC, BD reſpectiue deſignentur litteris a, b, c, d, e, f, anguli vero BCA, ACD, BCD litteris γ, γ', C. Quum igitur ſit $C = \gamma + \gamma'$ fiet

$$\text{coſ.}\,C = \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma' - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\gamma',$$ hincque

$$\text{ſin.}\,\gamma\;\text{ſin.}\,\gamma' = \text{coſ.}\,\gamma\;\text{coſ.}\,\gamma' - \text{coſ.}\,C,$$

ſumtis autem quadratis haec reſultabit aequatio:

$$\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,\gamma'^2 = \text{coſ.}\,\gamma^2\,\text{coſ.}\,\gamma'^2 - 2\,\text{coſ.}\,C\,\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma' + \text{coſ.}\,C^2,$$

eſt vero

$$\text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{ſin.}\,\gamma'^2 - \text{coſ.}\,\gamma^2\,\text{coſ.}\,\gamma'^2 = 1 - \text{coſ.}\,\gamma^2 - \text{coſ.}\,\gamma'^2,$$

ex quo fiet

$$1 - \text{coſ.}\,\gamma^2 - \text{coſ.}\,\gamma'^2 = \text{coſ.}\,C^2 - 2\,\text{coſ.}\,C\,\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma', \text{ ſiue}$$

$$1 + 2\,\text{coſ.}\,C\,\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma' = \text{coſ.}\,C^2 + \text{coſ.}\,\gamma^2 + \text{coſ.}\,\gamma'^2.$$

Conſtat autem eſſe

$$\text{coſ.}\,C = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc};\ \text{coſ.}\,\gamma = \frac{b^2 + e^2 - a^2}{2be};\ \text{coſ.}\,\gamma' = \frac{c^2 + e^2 - d^2}{2ce},$$

his igitur valoribus ſubſtitutis, ſequens prodibit aequatio :

$$1 + \frac{(b^2 + c^2 - f^2)(b^2 + e^2 - c^2)(c^2 + e^2 - d^2)}{4b^2c^2e^2} = \frac{(b^2 + c^2 - f^2)^2}{4b^2c^2} + \frac{(b^2 + e^2 - a^2)^2}{4b^2e^2} + \frac{(c^2 + e^2 - d^2)^2}{4c^2e^2}$$

ſiue

$$4b^2c^2e^2 + (b^2 + c^2 - f^2)(b^2 + e^2 - a^2)(c^2 + e^2 - d^2) = e^2(b^2 + c^2 - f^2)^2 + c^2(b^2 + e^2 - a^2)^2 + b^2(c^2 + e^2 - d^2)^2,$$

quae aequatio licet ſit biquadratica, tamen vt quadratica tractari poteſt, quum in ea non niſi quadrata linearum a, b, c etc. occurrant. Simplicitatis igitur gratia loco quadratorum ex litteris a, b, c etc. ipſas has litteras ſcribere licebit, tum autem facta euolutione noſtra aequatio hanc adipiſcetur formam ſatis concinnam :

$$ac(b + e + d + f - a - c) + ef(a + b + c + d - e - f) + bd(a + c + e + f - b - d) = abe + ecd + afd + bcf,$$

vbi obſeruandum litteras a, b, c etc. non indigitare ipſas lineas AB, BC, CD etc. ſed earum quadrata. Pro hac aequatione notare conuenit, producta iſta ac, ef, bd inuoluere lineas diſcretas, haec vero abe, ecd, afd, bcf, inuoluunt lineas, quae ad triangula formanda certo modo concurrunt. Caeterum quomodo ex hac aequatione quadratica determinari de-

 beat

beat quantitas f, quam heic vt incognitam ſpectamus, ſatis eſt perſpicuum.

29. Dum in campo aliquo dimetiendo occupantur Geometae; ita plerumque procedere ſolent, vt aſſumta data baſi AD et menſuratis angulis BAD, CAD, BDA, CDA inde eliciant diſtantiam BC et reliquos figurae quadrilaterae angulos. Hinc ergo ſequens exoritur Problema: *ſi in Tetragono* ABCD *cognitum fuerit latus* AD $=$ d *cum angulis* BAD $=$ A, CAD $= \alpha$, CDA $=$ D *et* BDA $= \delta$, *invenire latus* BC $=$ b *et angulos* ABC $=$ B, BCD $=$ C. Ex triangulo BDC habetur

$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 BC.\ CD.\ \text{coſ}\ BDC$, eſt vero $BD : AD :: \text{ſin.}A : \text{ſin.}(A+\delta)$; $CD : AD :: \text{ſin.}\alpha : \text{ſin}(\alpha + D)$, tum vero

$$\text{coſ.}\ BDC = \text{coſ.}\ D\ \text{coſ.}\ \delta + \text{ſin.}\ D\ \text{ſin.}\ \delta,$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet:

$$bb = aa\left(\frac{\text{ſin.}A^2}{\text{ſin.}(A+\delta)^2} + \frac{\text{ſin.}\ \alpha^2}{\text{ſin.}(\alpha+D)^2} - \frac{2\,\text{ſin.}A.\,\text{ſin.}\alpha}{\text{ſin.}(A+\delta)\,\text{ſin.}(\alpha+D)}(\text{coſ.}D\,\text{coſ.}\delta + \text{ſin.}D\,\text{ſin.}\delta)\right).$$

Commodior autem inuenietur ſolutio, ſi ita procedamus, quaſi ex datis tribus lateribus AB, CD, AD et angulis BAD, CAD quaerere vellemus latus bC, tum ſcilicet ſi AB, CD exprimantur per a, c conſequemur:

$$bb = a^2 + c^2 + d^2 - 2\,ad\,\text{coſ.}A + 2\,ac\,\text{coſ.}(A+D) - 2\,cd\,\text{coſ.}D,$$

ex qua formula facile colligitur

$$bb = (a\,\text{ſin.}A - c\,\text{ſin.}D)^2 + (d - a\,\text{coſ.}A - c\,\text{coſ}\,D)^2,$$

hincque

hincque ſi ſtatuatur

$$\text{Tang. } F = \frac{a \sin. A - c \sin. D}{d - a \cos. A - c \cos. D}, \text{ prodibit}$$

$$b = \frac{a \sin. A - c \sin. D}{\sin. F} = \frac{d - a \cos. A - c \cos. D}{\cos. F}.$$

Iam vero conſtat eſſe

$$a = \frac{d \sin. \delta}{\sin. (A + \delta)}, \text{ et } c = \frac{d \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + D)}, \text{ ita vt fiat}$$

$$\text{Tang. } F = \frac{\sin. A \sin. \delta \sin. (\alpha + D) - \sin. \alpha \sin. D . \sin. (A + \delta)}{\sin. (A + \delta) \sin. (\alpha + D) - \cos. A \sin. \delta \sin. (\alpha + D) - \cos. D \sin. \alpha \sin. (A + \delta)}$$

vbi ſi notetur eſſe

$$\begin{aligned}\sin.(A+\delta)\sin.(\alpha+D) &= \tfrac{1}{2}\sin.(\alpha+D)(\sin. A \cos.\delta + \cos. A . \sin.\delta) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\sin.(A+\delta)(\sin. D \cos.\alpha + \cos. D . \sin.\alpha),\end{aligned}$$

denominator hanc adipiſcetur formam:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2} \sin. (\alpha + D) (\sin. A \cos. \delta - \cos. A \sin. \delta) \\ &+ \tfrac{1}{2} \sin. (A + \delta) (\sin. D \cos. \alpha - \cos. D \sin. \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2} \sin. (\alpha + D) \sin. (A - \delta) + \tfrac{1}{2} \sin. (A + \delta) \sin. (D - \alpha).\end{aligned}$$

Hincque fiet

$$\text{Tang. } F = \frac{2 (\sin. A \sin. \delta \sin. (\alpha + D) - \sin. \alpha \sin. D \sin. (A + \delta))}{\sin. (\alpha + D) \sin. (A - \delta) + \sin. (A + \delta) \sin. (D - \alpha)} \text{ et}$$

$$b = \tfrac{1}{2} a (\sin.(\alpha + D) \sin.(A - \delta) + \sin.(A + \delta) \sin.(D - \alpha)) \text{Sec. } F.$$

Praeterea fiet angulus $BCD = 180° - D + F$, id quod intelligitur ſi recta BC producta concipiatur dum rectae AD occurrat, angulus enim harum rectarum erit $= F$; ſimili ratione fiet $ABC = 180° - A - F$. De numeratore formulae pro Tang. F exhibitae, notari quoque meretur cum ſic exprimi poſſe:

$$\begin{aligned}&\sin. (A - \alpha - D + \delta) + \cos. (A - \delta) \sin. (\alpha + D) \\ &\qquad - \cos. (D - \alpha) \sin. (A + \delta).\end{aligned}$$

30. Inſtituti noſtri ratio nunc quidem non fert, vt omnes caſus ſolutionum pro Pentagono heic euoluamus, vt tamen adpareat quomodo hae ſolutiones

nes ſint ſuſcipiendae, obſeruationes quasdam circa aequationes pro Pentagono locum habentes heic adferemus, quibus perpenſis non ſolum quaeſtiones pro Pentagono facile ſoluentur, ſed via quoque praeparetur ad ſolutiones aliorum Polygonorum exſequendas. Pro Pentagono autem ſequentes habemus aequationes:

I. $ee = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab\,\text{coſ.}\,B + 2ac\,\text{coſ.}\,(B+C) + 2ad\,\text{coſ.}\,(B+C+D) + 2bc\,\text{coſ.}\,C + 2bd\,\text{coſ.}\,(C+D) + 2cd\,\text{coſ.}\,D$

II. $ee + 2ed\,\text{coſ.}\,E + dd = aa + bb + cc + 2ab\,\text{coſ.}\,B + 2ac\,\text{coſ.}\,(B+C) + 2bc\,\text{coſ.}\,C$

III. $a\,\text{ſin.}\,A + b\,\text{ſin.}\,(A+B) + c\,\text{ſin.}\,(A+B+C) + d\,\text{ſin.}\,(A+B+C+D) = 0$

IV. $a\,\text{ſin.}\,A + b\,\text{ſin.}\,(A+B) + c\,\text{ſin.}\,(A+B+C) - d\,\text{ſin.}\,E = 0$

V. $a\,\text{ſin.}\,A + b.\,\text{ſin.}\,(A+B) - c\,\text{ſin.}\,(D+E) - d\,\text{ſin.}\,E = 0.$

De tribus poſteribus ſiue ex iis latera, ſeu anguli determinari debent, vix quicquam monere neceſſe eſt; ſiquidem huiusmodi determinatio facillima eſt, nec complicatiores requirit operationes, quam quibus in paribus caſibus pro quadrilatero vſi ſumus. De prima autem aequatione ſi ex ea aliquod laterum, vtpote e, vel a, vel b, determinandum ſit notare iuuat, quod ſub his formis commode exprimi queat:

1. $ee = (a + b\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,(B+C) + d\,\text{coſ.}\,(B+C+D))^2 + (b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}\,(B+C) + d\,\text{ſin.}\,(B+C+D))^2$

2. $ee = (b + a\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}\,C + d\,\text{coſ.}\,(C+D))^2 + (a\,\text{ſin.}\,B - c\,\text{ſin.}\,C - d\,\text{ſin.}\,(C+D))^2.$

Liquet

Liquet autem hinc ſiue e, ſeu a et b facile inueniri, pro inueniendo ſcilicet e, ponatur

$$\frac{b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}(B+C) + d\,\text{ſin.}(B+C+D)}{a + b\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}(B+C) + d\,\text{coſ.}(B+C+D)} = \text{Tang.}\,F$$

fietque

$$e = (b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}(B+C) + d\,\text{ſin.}(B+C+D))\,\text{Coſec.}\,F.$$

Tum vero habebitur per priorem earum

$$a + b\,\text{coſ.}\,B + c\,\text{coſ.}(B+C) + d\,\text{coſ.}(B+C+D) = \sqrt{\begin{pmatrix} e + b\,\text{ſin.}\,B + c\,\text{ſin.}(B+C) + d\,\text{ſin.}(B+C+D) \\ e - b\,\text{ſin.}\,B - c\,\text{ſin.}(B+C) - d\,\text{ſin.}(B+C+D)\end{pmatrix}}$$

ſimili ratione inuenitur b, per poſteriorem.

Si ex prima aequatione ſit quaerendus angulus B, facta euolutione terminorum qui hunc angulum inuoluunt, ſtatuatur

$\frac{c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D)}{b + c\,\text{coſ.}\,D + d\,\text{coſ.}(C+D)} = \text{Tang.}\,G$, tumque obſeruetur eſſe

$$b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\,\text{coſ.}\,C + 2bd(\text{coſ.}(C+D) + 2cd\,\text{coſ.}\,D$$
$$= (b + c\,\text{coſ.}\,C + d\,\text{coſ.}(C+D))^2 + (c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D))^2$$
$$= \frac{(c\,\text{ſin.}\,C + d.\,\text{ſin.}(C+D))^2}{\text{ſin.}\,G^2};$$ hinc ergo fiet aequatio prima

$$ee = a^2 + \frac{(c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D))^2}{\text{ſin.}\,G^2} + 2a\frac{(c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D))}{\text{ſin.}\,G}\text{coſ.}(B+G),$$

tumque

$$\left(a + \frac{c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D)}{\text{ſin.}\,G}\right)^2 - ee = 4a\left(\frac{c\,\text{ſin.}\,C + d\,\text{ſin.}(C+D)}{\text{ſin.}\,G}\right)\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(B+G)^2$$

ex qua aequatione vel alia huic analoga facile determinatur angulus B. Determinatio autem anguli C maximam faceſſit operam, atque ita ſuſcipienda videtur: facta euolutione terminorum qui angulum C inuoluunt, ſtatuamus

$$\text{Tang.}\,I = \frac{a\,\text{ſin.}\,B}{b + a\,\text{coſ.}\,B},\quad \text{Tang.}\,L = \frac{d\,\text{ſin.}\,D}{c + d\,\text{coſ.}\,D}$$

quo

quo facto erit

$$a^2+b^2+2ab\,\text{coſ.}B=\frac{a^2\,\text{ſin.}B^2}{\text{ſin.}I^2};\quad c^2+d^2+2cd\,\text{coſ.}D=\frac{d^2\,\text{ſin.}D^2}{\text{ſin.}L^2};$$

$$\frac{ac\,\text{ſin.}B+ad\,\text{ſin.}(B+D)+bd\,\text{ſin.}D}{bc+ac\,\text{coſ.}B+ad\,\text{coſ.}(B+D)+bd\,\text{coſ.}D}=\text{Tang.}(I+L),$$

ita vt ſit

$$2\,\text{coſ.}C(ac\,\text{coſ.}B+ad\,\text{coſ.}(B+D)+bd\,\text{coſ.}D+bc)$$
$$-2\,\text{ſin.}C(ac\,\text{ſin.}B+ad\,\text{ſin.}(B+D)+bd\,\text{ſin.}D)$$
$$=2(ac\,\text{ſin.}B+ad\,\text{ſin.}(B+D)+bd\,\text{ſin.}D)\frac{\text{coſ.}(C+I+L)}{\text{ſin.}(I+L)}.$$

Hinc fiet

$$ee=\frac{a^2\,\text{ſin.}B^2}{\text{ſin.}I^2}+\frac{d^2\,\text{ſin.}D^2}{\text{ſin.}L^2}+2(ac\,\text{ſin.}B+ad\,\text{ſin.}(B+D)+bd\,\text{ſin.}D)\frac{\text{coſ.}(C+I+L)}{\text{ſin.}(I+L)},$$

iam obſeruetur eſſe

$$ac\,\text{ſin.}B+ad\,\text{ſin.}(B+D)+bd\,\text{ſin.}D=a\,\text{ſin.}B(c+d\,\text{coſ.}B)+d\,\text{ſin.}D(b+a\,\text{coſ.}B)$$
$$=ad\,\text{ſin.}B.\,\text{ſin.}D\left(\frac{c+d\,\text{coſ.}B}{d\,\text{ſin.}D}+\frac{b+a\,\text{coſ.}B}{a\,\text{ſin.}B}\right)=ad\,\text{ſin.}B.\,\text{ſin.}D(\text{cot.}I+\text{cot.}L)$$

quocirca hanc adipiſcemur aequationem:

$$ee=\frac{a^2\,\text{ſin.}B^2}{\text{ſin.}I^2}+\frac{d^2\,\text{ſin.}D^2}{\text{ſin.}L^2}+2ad\frac{\text{ſin.}B\,\text{ſin.}D}{\text{ſin.}I\,\text{ſin.}L}\text{coſ.}(C+I+L)$$

ex qua quomodo determinari debeat angulus C, iam ſponte liquet.

31. Pro aequatione ſecunda obſeruemus, eam ſequentibus exprimi poſſe modis:

1. $ee+dd+2ed\,\text{coſ.}E=(b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C)^2+(a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)^2$
2. $ee+dd+2ed\,\text{coſ.}E=(a+b\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}(B+C))^2+(b\,\text{ſin.}B+c\,\text{ſin.}(B+C))^2$.

Ex harum priori facile determinatur latus b, quum ſit

$$(b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C)^2=(e+d)^2-(a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)^2-4ed\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}E^2,$$

ſi

ſi enim ponatur

$$\frac{4\,e\,d\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2}{(e+d+a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)(e+d-a\,\text{ſin.}B+c\,\text{ſin.}C)}=\text{ſin.}\,G^2,$$

prodibit

$$b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C=\text{coſ.}G\sqrt{(e+d+a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)(e+d-a\,\text{ſin.}B+c\,\text{ſin.}C)}.$$

Simili fere ratione ex ſecunda expreſſione determinatur latus a, tumque ex vtrauis elici poteſt e. Si quaerendus ſit angulus E, iſta aequatio:

$$4\,e\,d\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2=(e+d)^2-(a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)^2-(b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C)^2$$

commode adhiberi poteſt, nam ſi ponatur

$$\frac{(b+a\,\text{coſ.}B+c\,\text{coſ.}C)^2}{(e+d)^2-(a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)^2}=\text{ſin.}\,H^2,\ \text{fiet}$$

$$4\,e\,d\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2=((e+d)^2-(a\,\text{ſin.}B-c\,\text{ſin.}C)^2)\,\text{coſ.}\,H^2.$$

Vt autem ex aequatione hac ſecunda eliciatur angulus B, fiat euolutio terminorum hunc angulum inuoluentium, vt ſit

$$e^2+2\,e\,d\,\text{coſ.}E+d^2=a^2+b^2+c^2+2\,b\,c\,\text{coſ.}C+2\,a\,\text{coſ.}B(b+c\,\text{coſ}C)$$
$$-2\,a\,c\,\text{ſin.}B.\,\text{ſin.}C.$$

Iam quaeratur

$\text{Tang.}K=\frac{c\,\text{ſin.}C}{b+c\,\text{coſ.}C}$, eritque $b^2+c^2+2\,b\,c\,\text{coſ.}C=\frac{c^2\,\text{ſin.}C^2}{\text{ſin.}K^2}$

vnde conſequimur

$$e^2+2\,e\,d\,\text{coſ.}E+d^2=a^2+\frac{c^2\,\text{ſin.}C^2}{\text{ſin.}K^2}+2\,a\,c\,\frac{\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\,\text{coſ.}(B+K),$$

hinc fit

$$(e+d)^2-4\,e\,d\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2=\left(a-\frac{c\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\right)^2+4\,a\,c\,\frac{\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(B+K)^2\ \text{et}$$

$$(e-d)^2+4\,e\,d\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2=\left(a+\frac{c\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\right)^2-4\,a\,c\,\frac{\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(B+K)^2,$$

ex quibus iunctim ſumtis colligitur

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(B+K)^2=\frac{\left(a+\frac{c\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\right)^2-(e-d)^2-4\,e\,d\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2}{(e+d)^2-\left(a-\frac{c\,\text{ſin.}C}{\text{ſin.}K}\right)^2-4\,e\,d\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2},$$

 hinc

hinc ſi ponatur

$$\text{Tang.}\,\theta^2 = \frac{4ed\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2}{(a+\frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,K})^2-(e-d)^2}\,;\quad \text{Tang.}\,\eta^2 = \frac{4ed\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2}{(e+d)^2-(a-\frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,K})^2},$$

conſequemur

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(B+K) = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,E\,\frac{\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\theta}\sqrt{\frac{\text{coſ.}\,2\,\theta}{\text{coſ.}\,2\,\eta}}.$$

Vel etiam facilius forſan hoc modo, ſtatuatur

$$\frac{4ed\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2}{(e+d)^2} = \text{coſ.}\,M^2, \text{ vt ſit } (e+d)^2-4ed\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,E^2 = (e+d)^2\,\text{ſin.}\,M^2,$$

eritque hinc

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(B+K)^2 = \frac{(a+\frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,K})^2-(e+d)^2\,\text{ſin.}\,M^2}{(e+d)^2\,\text{ſin.}\,M^2-(a-\frac{c\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,K})^2},$$

vnde Tang. $\tfrac{1}{2}(B+K)$ ſatis commode exprimitur. His igitur formulis adhibitis reſolutio Pentagoni facile abſoluitur, et pro Polygonis altiorum ordinum regulae his ſimiles facile inueniri poſſunt, quibus exponendis immorari non eſt neceſſe.

OBSER-

OBSERVATIONES CIRCA NOVVM ET SINGVLARE PROGRESSIONVM GENVS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Inter res ſaepenumero, quae attentione noſtra haud dignae videantur, obſeruantur quaedam, quae ſatis profundam inueſtigationem requirunt, ac non parum ſublimibus ſpeculationibus occaſionem praeben. Quod cum plurimis exemplis confirmari posſit, tum nuper etiam ipſe ſum expertus, dum quaeſtionem illam tyronibus notiſſimam, attentius contemplarem, qua quindecim Chriſtiani totidemque Iudaei ita ordine ſunt collocandi, vt ſi, numerandi initio in dato loco ſumto, nonus quisque vel decimus in mare ſit eiiciendus, haec poena in ſolos Iudaeos ſit caſura. Quae quaeſtio etiamſi in ſe nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, ſi in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus ſed ſecundum alium quemuis numerum quotusquisque ſit eiiciendus, proponatur, difficillimum fore, ordinem eorum, qui continuo eiicientur, aſſignare. Neque adeo methodus conſtat hoc in genere

nere praeſtandi, tametſi quouis caſu oblato, dum numeratio actu inſtituitur, ſolutio facillime obtinetur. Ex hoc genere haud parum curioſa mihi videtur quaeſtio, ſi v. gr. ex plurium ſontium numero is ſolus ſit ſupplicio afficiendus, qui, poſtquam nonus quisque vel ſecundum alium numerum ex ordine fuerit exemtus, tandem vltimo ſolus ſit remanſurus; hic ſcilicet maxime interfuerit, ante noſſe illum fatalem locum, in quo numeratio illa vltimo terminabitur.

2. Quo omnia quae hic inueſtiganda occurrunt, clarius perſpiciantur, caſum illum perpendamus, quo ex ſerie 30 notarum nona quaeque expungitur, quod negotium numeratione actu inſtituta ita commodiſſime repraeſentatur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
23	20	28	24	14	4	7	12	1	19	16	10	26	27	25	5	18	2	8	29	30	13	15	11	22	6	3	21	17	9

Hic ſuperiores numeri indicant, quoto loco a primo computando quaeque nota ſit poſita; inferiores vero numeri oſtendunt, quando quaeque eiiciatur, dum ſcilicet continuo nona quaeque expungitur: Ita patet, primo nonam, ſecundo decimam octauam, tertio viceſimam ſeptimam, quarto ſextam, quinto decimam ſextam et ita porro expungi, donec vltimo delenda ſuperſit ſola viceſima prima, qui adeo foret locus ille fatalis ante memoratus. Si indices eiectorum ordine diſponantur, indicesque notarum ſubſcribantur, haec ſeries prodibit.

Indices

Indices eiectionis

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30
9,	18,	27,	6,	16,	26,	7,	19,	30,	12,	24,	8,	22,	5,	23,	11,	29,	17,	10,	2,	28,	25,	1,	4,	15,	13,	14,	3,	20,	21.

Indices naturales.

Hanc poſtremam ſeriem vocabo *ſeriem eiectionis*, quia ea indicat, quota nota eiiciatur primo, ſecundo, tertio etc. ita ſcilicet primo eiicitur nota 9na, ſecundo 18va, tertio 27ma, quarto 6ta, quinto 16ta et ita porro, donec vltimo trigeſimo nempe loco eiiciatur nota viceſima prima. Vbi quidem meminiſſe oportet, poſtquam numerando in ſerie notarum ad finem fuerit peruentum, numerationem iterum ab initio continuari; ex quo intelligitur, notam trigeſimam primam conuenire cum prima, et ſi cuiusque notae index fuerit n eidem quoque indices $n+30$, $n+60$, $n+90$ etc. conuenire ſunt cenſendi.

3. Si hanc ſeriem eiectionis conſideremus, vix vllum ordinem in ea deprehendere licet; tres quidem primi termini 9, 18, 27 ſecundum differentiam 9 aſcendunt; et quartus quoque 6, quia cum 36 conuenit, eandem legem ſequitur. Quintus autem, qui eſt 16 vel 46, denario praecedentem ſuperat, quia in numerando iam vnus ſcilicet 9 ſeu 39 eſt deletus, ideoque non numeratur. Ob eandem rationem a termino quinto 16 ad ſextum 26 etiam 10, at a ſexto 26 ad ſeptimum 7 ſeu 37 iam 11 numerantur; ſicque ſaltus continuo fiunt maiores, quia plures notae iam deletae tranſiliuntur; quod operationem actu inſtituendo ſponte elucet, etiam ſi

ordinem harum differentiarum auctarum vix aſſignare liceat; generatim certe hic nihil omnino definiri poſſe videtur. Circa finem autem imprimis haec ſeries eiectionis ita fit irregularis, vt nulli prorſus legi adſtricta videatur. Eum in finem autem hanc ſeriem hic expoſui, quo clarius omnes difficultates, quibus perſcrutatio eius impeditur, perſpiciantur, haecque ipſa ſeries ex ludicro principio enata attentione noſtra non indigna videatur.

4. Haec autem ſeries eiectionis ſpecialis duabus rebus determinatur, quarum altera in numero notarum, qui eſt 30, altera vero numeratore, qui eſt 9 continetur. Quocirca in genere quaeſtio huc redit: vt dato notarum numero vna cum numeratore ipſa ſeries eiectionis exhibeatur, cuius ſolutionem cum in genere ſperare nequeamus, in caſibus particularibus attentionem noſtram exerceri conueniet, num forte legem quampiam detegere videamus. Ac primo quidem patet, ſi numerator fuerit vnitas, ſeriem eiectionis ipſam fore ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 etc. quoniam enim primus quisque eiicitur, primo loco primus terminus, ſecundo ſecundus, tertio tertius et ita porro eiicitur, ita vt vltima nota ſimul ſit terminorum eiectorum vltimus.

5. Sit igitur numerator $= 2$, ita vt ſecundus quisque eiiciatur, ſeu eiectio ſecundum alternos inſtituatur, ac pro notarum numero ſeries eiectionis ita ſe habere deprehenduntur:

numerus

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1.

Hoc ſchema inſpicienti facile erit pluribus modis ordinem quendam obſeruare. Vltimi ſcilicet termini manifeſto tenent progreſſionem arithmeticam binario creſcentem, dummodo termini qui numerum notarum eſſent ſuperaturi, infra eum deprimantur, numero ſcilicet notarum inde detracto. Ita cum primo habeatur 1, pro ſecunda ſerie vltimus, qui foret 3, binario ſubtracto ad vnitatem reducitur; hunc ſequitur 3, et ſequens 5 numerum notarum vnitate ſuperans ad vnitatem reducitur, et ita porro. Simili lege progrediuntur termini penultimi, tum vero etiam antepenultimi, atque adeo omnes

ab

ab vltimis aequidiſtantes. Quoniam igitur omnes rectae obliquae ei, quae per terminos vltimos tranſit parallelae, per huiusmodi progreſſiones arithmeticas pro numero notarum mutilatas tranſeunt, hinc iſtae ſeries quousque lubuerit facile continuantur.

6. Exponamus ſimili modo ſeries eiectionis pro numeratore = 3, ac lex progreſſionis multo magis abſcondita prodibit

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15. 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8.
	etc.

Interim tamen etſi ſecundum lineas horizontales et verticales ordo magis eſt abſtruſus, tamen in vltimis

mis iterum progreſſio arithmetica ſe prodit ſecundum ternarium creſcens; haecque eadem lex quoque in penultimis et antepenultimis vt ante deprehenditur, ex quo et has ſeries facillime continuare licet.

7. Circa hanc legem in terminis vltimis locum habentem dubitare amplius non poterimus, dum ea adhuc pro numeratore 4 obſeruetur. Pari ergo modo ſeries eiectionis inde erectas repraeſentemus

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8. 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1

etc.

Hinc ergo lex illa in ſeriebus oblique deſcendentibus

prorſus confirmatur, quae ſcilicet hic ſunt arithmeticae quaternario creſcentes, dum termini numerum noſtrum ſuperantes infra eum deprimuntur. In ſeriebus autem horizontalibus et verticalibus ordo fit continuo intricatior. Quin etiam ipſa rei natura in ſeriebus horizontalibus nullam progreſſionis legem patitur, propterea quod eae, cum omnes numeros notarum numero non maiores fuerint complexae, vlteriori continuationi aduerſantur, ita vt continuatio tanquam imaginaria ſit ſpectanda.

8. En ergo inſignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota vltimo eiicienda aſſignari poteſt. Exiſtente ſcilicet numeratore $= n$, ſi pro notarum numero ν vltima eiicienda ſit z, ſeu indici z reſpondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, vltima eiicienda erit $z + n$, ſiquidem non ſit $z + n > \nu + 1$; at ſi $z + n > \nu + 1$, vltima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, reſiduum ex diuiſione relictum dabit indicem vltimae notae eiiciendae. Vbi notetur, ſi diuiſio nihil relinquat, tum pro reſiduo o ſcribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit vltimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus vltimo eiecta facile per hanc regulam aſſignabitur. Perpetuo autem ſi vnica fuerit nota, eadem quoque erit vltimo eiecta, ſeu ſi fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde ſequentes omnes ſine vllo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis eſt notatu digna, quod ſine eiectionis ordine

dine cognito ſtatim vltimo eiiciendam exhibeat, etiamſi ea manifeſto ab ordine ante eiectarum pendeat. Quamobrem haec regula merito tanquam inſigne Theorema ſpectari debet, in cuius demonſtrationem inquirere omnino operae erit pretium.

9. Sequenti modo autem eius demonſtratio commodiſſime adſtrui videtur. Conſideretur notarum numerus $\nu + 1$, vnde ſecundum numeratorem n prima fiat eiectio, quae cadet, in notam n, ſiquidem fuerit $n < \nu + 1$, vel in notam $n - \alpha(\nu + 1)$, qui indices autem omnes indici n aequiualent. Expungatur ergo haec nota, vti haec punctorum series A indicat

$$\begin{array}{llllllll} & 1\;2\;3 & & n & n+1 & n+2 & & \nu+1 \\ A; & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\,| & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \end{array}$$

ac notae praecedentes 1, 2, 3 . . . . $(n - 1)$ ad finem adiungantur indicibus numero $\nu + 1$ auctis, vt prodeat iſta punctorum series

$$\begin{array}{llllllll} & n+1 & n+2 & n+3 & & \nu+1 & \nu+2 & \nu+n \\ B \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

in qua notarum numerus eſt ν, quaeque series ab ea, vbi numerus notarum eſt ν, quam ita repraeſento,

$$\begin{array}{llllll} & 1\;2\;3\;4 & & \nu-1 & \nu & \\ C \cdot\cdot\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

aliter non differt, niſi quod ibi indices numeratore n ſunt aucti. Vtrinque ergo eiectiones ſecundum numeratorem n factae in easdem ordine notas cadent, ac ſi eiectio vltima in ſerie C incidat in notam cuius index eſt z, ea in ſerie B incidet in notam cuius

ius index eſt $n + 2$; id quod etiam in ſerie notarum A, quarum numerus eſt $\nu + 1$ eueniet. Quo ipſo veritas noſtri Theorematis euincitur. Simul autem inde patet, quod hic de notis vltimo eiectis eſt demonſtratum, idem de penultimis, antepenultimis, omnibusque ordinibus ab vltimis aequidiſtantibus valere.

10. Huius igitur regulae ope ſtatim pro quouis numeratore ſeries eiectionis formare poterimus, cuius ſpecimen pro numeratore 5 hic appono

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 5
1	1
2	1, 2
3	2, 3, 1
4	1, 3, 4, 2
5	5, 1, 3, 4, 2
6	5, 4, 6, 2, 3, 1
7	5, 3, 2, 4, 7, 1, 6
8	5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3
9	5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8
10	5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3
11	5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8
12	5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1.

12. Etſi autem ſeries notarum vltimo loco eiectarum tam ſimplicem ac facilem legem ſequitur: tamen hoc maxime mirabile vſu venit, quod in genere hanc ſeriem nullo modo exhibere liceat. Veluti.

luti ſi pro numeratore ſeries vltimo eiectorum ita repraeſentetur

num. notarum	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10..	. . ν
ſeries	1.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	. . . N

nouimus quidem fore A vel 1 vel 2, ſeu $A = n - 2i$ vero

$$B = A + n - 3i, \; C = B + n - 4i, \; D = C + n - 5i \text{ etc.}$$

verum tamen hinc generaliter terminum N aſſignare non valemus, propterea quod in ſingulis littera i determinatum numerum denotat, tantum ſcilicet, vt terminus indicem ſupra ſcriptum non ſuperet. Hinc etſi determinatio $D = C + n - 5i$ nihil habet difficultatis, tamen ſi velimus pro C ſuum valorem $B + n - 4i$ ponere, vt prodeat $D = B + 2n - 4i - 5i$ hinc nihil concludere poſſumus, quandoquidem geminae litterae i valores non innoteſcunt. Cauſa igitur, cur in genere circa hanc ſeriem nihil definire liceat, in hoc conſiſtit, quod continuo terminorum reductio ad alios numeros ſit inſtituenda. Facilius hoc intelligetur, ſi perpendamus, nullum terminum ex praecedente abſolute determinari, ſed ad plures interdum conditiones eſſe reſpiciendum: Scilicet ſi quartus detur C, quintus erit vel $C + n$ niſi $C + n > 5$;

vel erit $C + n - 5$ niſi $C + n > 10$
vel erit $C + n - 10$ niſi $C + n > 15$

etc.

quemlibet autem terminum ad ſuam debitam formam deprimi oportet, antequam ex eo ſequentem ope regulae demonſtratae eliciamus.

13. Pro caſibus autem particularibus ad terminos valde remotos per ſaltus progredi licet, vt non ſit opus omnes intermedios euoluiſſe. Scilicet ſi pro numeratore n, indici ν, qui hic notarum numerum ſignificat, reſpondeat terminus a, tum indici $\nu+x$ reſpondebit terminus $a+nx$, dum ſit $a+nx<\nu+x$ ſeu $x<\frac{\nu-a}{n-1}$: quin adhuc hic terminus recte ſe habet, ſi x vnitate augeatur, hoc eſt ſi $x>\frac{\nu-a}{n-1}$, vt exceſſus vnitate ſit minor, tumque indici $\nu+x$ reſpondeeit terminus $(n-1)x-\nu+a$. Simili modo ab hoc per ſaltum ad remotiorem terminum perueiire licet, ſaltus autem continuo fiunt maiores: per ſingulos autem ſaltus termini in progreſſione arithmetica ſecundum numeratorem n creſcente procedunt. Ab initio quidem ſinguli termini ſeorſim ſunt definiendi, ſtatim autem atque ad indices numeratore maiores peruenitur, calculus per ſaltus commodius inſtituitur, cuius ſpecimen pro numeratore 9 opponam, vbi perpetuo numerum $\nu-a$ per 8 ita diuidi oportet, vt quotus nimis magnus accipiatur: tum enim ipſe quotus dabit valorem ipſius x, et reſiduum erit terminus per hunc ſaltum ſequens:

Series

Series pro numeratore 9

Indices	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
termini.	1,	2,	2,	3,	2,	5,	7,	8,	8,	7,	5,	2,	11,	6,	15,	8,	17,	8

Saltus	2	3	3	4	4	4	5	6	6	7	8	9	
indices	20,	22,	25,	28,	32,	36,	40,	45,	51,	57,	64,	72,	81
termini.	6,	2,	4,	3,	7,	7,	3,	3,	6,	3,	2,	2,	2

Saltus	10	12	13	14	16	19	20	23	26	30	33	37
indices	91,	103,	116,	130,	146,	165,	185,	208,	234,	264,	297,	334
termini.	1,	6,	7,	3,	1,	7,	2,	1,	1,	7.	7,	6

Saltus	42	47	52	60	67	75	85	95	107	120
indices	376,	423,	475,	535,	602,	677,	762,	857,	964,	1084
termini.	8,	8,	1,	6,	7,	5,	8,	6,	5,	1

Saltus	136	152	172	193	217	244	275	309	348
indices	1220,	1372,	1544,	1737,	1954,	2198,	2473,	2782,	3130
termini.	5,	1,	5	5,	4,	2,	4,	3,	5

etc.

14. Hanc ergo ſeriem facili labore vltra ter- mille terminos continuauimus, ac ſi vlterius progredi velimus, ex numeris poſtremis 3130 et 5 calculum ita inſtituimus:

ab 3130
ſubtr. 5
8)3125
391 (3)

Hinc ſaltus per 391 terminos porrigitur, indeque terminus cuius index eſt 3521 erit vt reſiduum indicat 3. Porro

ab 3521
ſubtr. 3
8)3518
440 (2)

Hic ſaltus fit per 440 terminos, vnde oritur index 3521 + 440 = 3961, cui reſpondet terminus 2 reſidio indicatus.

ab

ab 3961
ſubtr. 2 Hinc colligitur pro indice 4456
terminus 1.

$8)39^{7}5^{5}9$

$495\ (1)$

Ab hoc autem ſaltus ſequens vltra 5000 extenditur; neque tamen video, quomodo huius ſeriei terminus verbi gratia decies milleſimus vel adeo centies milleſimus niſi ſaltibus hoc modo continuendis, aſſignari poſſit: indices quidem per hos ſaltus creſcentes ſecundum progreſſionem geometricam in ratione 8 : 9 proxime creſcunt, ſed quia hoc tantum proxime ſit, hinc nullum ſubſidium pro continuatione obtinetur.

15. Hinc ergo pro quouis notarum numero, dummodo 5000 non longe ſuperet, inquam eiectionis ſors poſtremo cadet: ex ſerie ſcilicet hic per ſaltus exhibita is terminus quaeri debet, qui indici notarum numero aequali reſpondet. Perpetuo ſcilicet index proxime minor ſumatur indeque progreſſis arithmetica vsque ad indicem propoſitum per differentiam 9 continuetur, quod in nonnullis exemplis declarari expediet.

I. Quaeratur ſeriei illius terminus centeſimus: Proxime inferior index per ſaltus inuentus eſt 91, cui conuenit terminus 1. Iam inde ad centeſimum ſunt loca 9, et nonies nouem ſeu 81 ad illum terminum 1 adiiciendo prodit terminus centeſimus 82. Quare ſi ex centum ſontibus is ſit ſupplicio afficiendus,

dus, qui poſtquam reliqui per numerationem ad 9 fuerint libera, tandem ſolus relinquatur, haec poena in 82^{dum} ordine incidet.

II. Vt terminus 200^{mus} reperiatur, calculus ita inſtituatur:

	200		
Index proximus	185	terminus	2
	15 per 9 dat		135
	terminus quaeſitus		137

III. Quaeratur terminus 500^{mus}:

	500		
Index proximus	475	terminus	1
	25 per 9 dat		225
	terminus quaeſitus		226

IV. Quaeratur terminus milleſimus:

	1000		
Index proximus	964	terminus	5
	36 per 9 dat		324
	terminus quaeſitus		329

V. Quaeratur terminus 5000^{mus}:

	5000		
Index proximus	4456	terminus	1
	544 per 9 dat		4896
	terminus quaeſitus		4897

17. Conſideratio huiusmodi ſerierum tam facili negotio formandarum non tantum eſt iucunda,

ſed etiam non parum ad numerorum naturam tantopere nobis adhuc abſconditam felicius perſcrutandam conferre quicquam poſſe videtur. Eximium certe hoc eſt exemplum, et omni attentione dignum, quod ſeries tam leui opera non ſolum formari ſed etiam quousque libuerit, continuari poſſit, cum tamen eius natura et vera indoles nobis maneat prorſus incognita, neque vt aliae ad terminum generalem reuocari poſſit.

II. Simili modo etiam pro numeratore 6 ordines eiectionis ſubiungimus

Numerus notarum	Series eiectionis pro numeratore 6
1.	1
2.	2. 1
3.	3. 2. 1
4.	2. 1. 4. 3
5.	1. 3. 2. 5. 4
6.	6. 1. 3. 2. 5. 4
7.	6. 5. 7. 2. 1. 4. 3
8.	6. 4. 3. 5. 8. 7. 2. 1
9.	6. 3. 1. 9. 2. 5. 4. 8. 7
10.	6. 2. 9. 7. 5. 8. 1. 10. 4. 3
11.	6. 1. 8. 4. 2. 11. 3. 7. 5. 10. 9

16. Viciſſim autem ſi detur ordo eiectorum, qui ab vltimo regrediendo ſit:

$$z, y, x, v, u, t, s, r \text{ etc.}$$

ex eo pro quouis numeratore et quolibet notarum numero, initialis ordo notarum inueſtigari poterit. Quod

Quod quo clarius appareat, ſit numerator $= 4$ et pro quolibet notarum numero ordo notarum ſequenti modo ſe habebit:

multitudo notarum	ordo notarum initialis
1	*z z*
2	*z y z y*
3	*x z y*
4	*x z y v*
5	*z y v u x*
6	*v u x t z y*
7	*t z y s v u x*
8	*v u x r t z y s*
9	*z y s q v u x r t*
10	*x r t p z y s q v u*
11	*q v u o x r t p z y s*
12	*z y s n q v u o x r t p*
13	*r t p m z y s n q v u o x*
14	*u o x l r t p m z y s n q v*
15	*n q v k u o x l r t p m z y s*
16	*z y s i n q v k u o x l r t p m*
17	*t p m k z y s i n q v k u o x l r*
18	*x l r g t p m k z y s i n q v k u o.*

Conſideratio horum ordinum non ſolum eorum naturam ſatis luculenter declarat, ſed etiam plures inſignes ſpeculationes ſuppeditare poterit.

MEDITATIONES CIRCA SINGVLARE SERIERVM GENVS.

Auctore:

L. EVLERO.

In commercio litterario, quod olim cum Illuſtriſſimo *Goldbachio* coluerum, inter alias varii argumenti ſpeculationes, circa ſeries in hac forma generali.

$$1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\text{etc.}$$

comprehenſas ſumus verſati, earumque ſummas ſcrutati. Tametſi autem huiusmodi ſeries raro occurrere ſolent, parumque vtilitatis polliceri videntur, inueſtigationes tamen, ad quas earum conſideratio nos perduxerat, eo magis dignae videntur, vt ab obliuione et interitu vindicentur, quod methodi, quibus ea occaſione ſumus vſi, multo latius patent, ac fortaſſe aliquando Analyſi inſignem vſum afferre poſſunt. Non igitur tam ipſam hanc ſeriem, etiamſi in ſe ſpectata neutiquam ſpernenda videatur, quam varias methodos, quae ad eius ſummationem perducunt, hic exponere conſtitui; quae quoniam ex commercio illo epiſtolico ſunt deſumta, lectores hic ſtatim

tim in limine monitos velim, has inueſtigationes maximam partem acumini Illuſtriſſimi *Goldbachii* eſſe attribuendas. Tres autem potiſſimum viae ad huiusmodi ſeries deducunt, quae quoniam inter ſe maxime ſunt diuerſae, vnamquamque ſeorſim explicabo, quo, quantum quaelibet praeſtet, facilius perſpici poſſit.

Prima Methodus ad huiusmodi ſeries perueniendi.

1. Si habeantur duae ſeries quaecunque, quarum ſumma conſtet:

$$1 + a + b + c + d + e + \text{etc.} = t \quad \text{et}$$
$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.} = u$$

tum vero inſuper ſeriei ex his conflatae ſumma ſit cognita ſcilicet:

$$1 + a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.} = v$$

tum illis ſeriebus in ſe multiplicandis colligitur:

$$\left.\begin{array}{l} 1+a(1+\alpha)+b(1+\alpha+\beta)+c(1+\alpha+\beta+\gamma)\text{etc.} \\ +1+\alpha(1+a)+\beta(1+a+b)+\gamma(1+a+b+c)\text{etc.}\end{array}\right\} = tu+v$$

quod quidem per ſe eſt manifeſtum, quoniam in his duabus poſterioribus ſeriebus occurrunt producta ſingulorum terminorum primae ſeriei per ſingulos ſecundae; id tantum notetur, producta cuiusque termini primae ſeriei per terminum reſpondentem ſecundae, veluti $1\,1$, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ etc. bis occurrere, quae quia in producto tu ſemel tantum reperiuntur, idcirco ad id inſuper ſeriem v adiungi oportebat.

 2. Quod

2. Quod ſi iam ſeriei $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc.}$ in infinitum continuatae ſummam per $\int\frac{1}{z^m}$ deſignemus, vt ſit

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{5^m}+\text{etc.}=\int\frac{1}{z^m} \text{ et}$$

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}=\int\frac{1}{z^n}$$

ſimilique modo pro ſerie hinc conflata:

$$1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+\frac{1}{5^{m+n}}+\text{etc.}=\int\frac{1}{z^{m+n}}$$

atque ex his ſequentes duas ſeries, quae in forma propoſita continebuntur, formemus:

$$1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)+\text{etc.}=P$$

$$1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\right)+\text{etc.}=Q$$

ex principio ſupra ſtabilito habebimus:

$$P+Q=\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n}+\int\frac{1}{z^{m+n}}$$

vnde ſi alterius harum duarum nouarum ſerierum ſumma vndecunque conſtaret, hinc alterius quoque ſeriei ſumma aſſignari poſſet. Summas autem ſerierum

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc. ſeu }\int\frac{1}{z^m}$$

hic vt cognitas ſpectamus, quandoquidem quoties exponens m eſt numerus par, hae ſummae a me per

per peripheriam circuli ſunt definitae; pro caſibus autem quibus m eſt numerus impar, ſummae vero proximae facile reperiri poſſunt.

3. Quando exponentes m et n ſumuntur aequales binae ſeries inuentae conueniunt, hocque ergo caſu ſequentem ſummationem adipiſcimur:

$$1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right) \text{ etc.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\int\frac{1}{z^n}\right)^2+\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{z^{2n}}.$$

Quocirca ſi caſus particulares conſideraturi ponamus:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{etc.}=\Delta=\int\tfrac{1}{z}$$
$$1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{5^2}+\text{etc.}=A=\int\tfrac{1}{z^2}$$
$$1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\tfrac{1}{5^3}+\text{etc.}=B=\int\tfrac{1}{z^3}$$
$$1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{5^4}+\text{etc.}=C=\int\tfrac{1}{z^4}$$
$$1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\tfrac{1}{5^5}+\text{etc.}=D=\int\tfrac{1}{z^5}$$

etc.

ſimilique modo porro:

$$\int\tfrac{1}{z^6}=E;\ \int\tfrac{1}{z^7}=F,\ \int\tfrac{1}{z^8}=G;\ \int\tfrac{1}{z^9}=H;\ \int\tfrac{1}{z^{10}}=I \text{ etc.}$$

hinc conſequimur ſequentes ſummationes:

$$1+\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{3}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\Delta\Delta+\tfrac{1}{2}A$$
$$1+\tfrac{1}{2^2}\left(1+\tfrac{1}{2^2}\right)+\tfrac{1}{3^2}\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}\right)+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}AA+\tfrac{1}{2}C$$
$$1+\tfrac{1}{2^3}\left(1+\tfrac{1}{2^3}\right)+\tfrac{1}{3^3}\left(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}\right)+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}BB+\tfrac{1}{2}E$$
$$1+\tfrac{1}{2^4}\left(1+\tfrac{1}{2^4}\right)+\tfrac{1}{3^4}\left(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}\right)+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}CC+\tfrac{1}{2}G$$
$$1+\tfrac{1}{2^5}\left(1+\tfrac{1}{2^5}\right)+\tfrac{1}{3^5}\left(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}\right)+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}DD+\tfrac{1}{2}I$$

etc.

Vbi

vbi quidem notari conuenit, primae ſeriei ſummam eſſe infinitam, reliquas vero omnes finitas.

4. At ſi exponentes m et n ſunt inaequales, hoc modo ſeries formae, quam contemplamur obtinentur, quarum quidem neutrius ſummam ſeorſim hac methodo definire licet; verumtamen ambarum iunctim ſumtarum ſumma exhiberi poteſt, vti ante oſtendimus. Quod quo planius reddatur, ſimulque ſcribendi compendium in vſum vocetur, huius ſeriei ſummam

$$1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right) \text{ etc.}$$

hac ſcriptione $\int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)$ indicemus, ita vt permutatis exponentibus habeatur $\int\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)$; His notatis inuenimus fore

$$\int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)+\int\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)=\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n}+\int\frac{1}{z^{m+n}}.$$

Quodſi ergo aliunde alterius harum ſerierum ſumma innotuerit, hinc alterius ſeriei ſumma erit cognita; atque plus ex hac prima methodo concludere non licet, ex quo ad ſecundam euoluendam progredior.

Secunda Methodus ad huiusmodi ſeries perueniendi.

5. Seruata praecedente notandi ratione perſpicuum eſt, quantitatem

$$\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n}-\int\frac{1}{z^{m+n}}$$

ad

ad ſequentes ſeries infinitas reduci:

$$+\frac{1}{1.2^n}+\frac{1}{2^m.3^n}+\frac{1}{3^m.4^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1.2^m}+\frac{1}{2^n.3^m}+\frac{1}{3^n.4^m}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1.3^n}+\frac{1}{2^m.4^n}+\frac{1}{3^m.5^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1.3^m}+\frac{1}{2^n.4^m}+\frac{1}{3^n.5^m}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1.4^n}+\frac{1}{2^m.5^n}+\frac{1}{3^m.6^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1.4^m}+\frac{1}{2^n.5^m}+\frac{1}{3^n.6^m}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{1.5^n}+\frac{1}{2^m.6^n}+\frac{1}{3^m.7^n}+\text{etc.}+\frac{1}{1.5^m}+\frac{1}{2^n.6^m}+\frac{1}{3^n.7^m}+\text{etc.}$$

etc. etc.

totumque negotium iam hinc redit, vt ſingulae hae ſeries commode ſummentur; quo ipſo vberrimus campus aperitur peculiare ſerierum genus complectens, quod ob concinnitatem per ſe omni attentione dignum videtur, etiamſi cum inſtituto noſtro non tam arcto vinculo eſſet connexum.

6. Hae autem ſummationes commodius inueſtigari nequeunt, quam ſingulos terminos, quorum forma eſt $\frac{1}{x^m(x+a)^n}$, in fractiones ſimpliciores reſoluendo. Per ea autem quae de hoc argumento in Introductione ad Analyſin tradidi, patet, hanc fractionem in ſequentes diſcerpi:

$$\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{x^m}-\frac{n}{1.a^{n+1}}\cdot\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{n(n+1)}{1.2\,a^{n+2}}\cdot\frac{1}{x^{m-2}}$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3\,a^{n+3}}\cdot\frac{1}{x^{m-3}}+\text{etc.}$$

$$\pm \frac{1}{a^m} \frac{1}{(x+a)^n} \pm \frac{m}{1.\, a^{m+1}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-1}} \pm \frac{m(m+1)}{1.\,2.\, a^{m+2}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-2}}$$

$$\pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\,2.\,3\, a^{m+3}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-3}} \pm \text{etc.}$$

vbi tenendum eſt, in inferiori ordine ſignum ſuperius $+$ valere, ſi m ſit numerus par, contra vero ſignum inferius; tum vero vterque ordo non vlterius continuari debet, quam vsque ad terminos vbi exponens poteſtatum ipſius x et $x+a$ ad vnitatem fuerit diminutus.

7. Hinc igitur primo ſummam huius ſeriei

$$\frac{1}{1(a+1)^n} + \frac{1}{2^m(a+2)^n} + \frac{1}{3^m(a+3)^n} + \frac{1}{4^m(a+4)^n} + \text{etc.} = s$$

definire licet, dum in forma modo exhibita loco x omnes numeri 1, 2, 3 etc. in infinitum ſubſtituuntur, et in vnam ſummam colliguntur: Quoniam enim omnes termini ex formula A. $\frac{1}{x^\lambda}$ nati dant ſeriem cuius ſummam per $A\int\frac{1}{z^\lambda}$ exprimimus, ex formula autem A $\frac{1}{(x+a)^\lambda}$ prodit ſeries cuius ſumma eſt $A\int\frac{1}{z^\lambda} - A\left(1 + \frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{3^\lambda} \cdots + \frac{1}{a^\lambda}\right)$, ſeriei noſtrae ſumma ita ſe habebit:

$$s = \frac{1}{a^n}\int\frac{1}{z^m} - \frac{n}{1.\, a^{n+1}}\int\frac{1}{z^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1.\,2\, a^{n+2}}\int\frac{1}{z^{m-2}}$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3\, a^{n+3}}\int\frac{1}{z^{m-3}} + \text{etc.}$$

$\pm$

$$\pm \frac{1}{a^m}\int\frac{1}{z^n} \pm \frac{m}{1.a^{m+1}}\int\frac{1}{z^{n-1}} \pm \frac{m(m+1)}{1.2\,a^{m+2}}\int\frac{1}{z^{n-2}}$$
$$\pm \frac{m(m+)(m+2)}{1.2.3\,a^{m+3}}\int\frac{1}{z^{n-3}} \pm \text{etc.}$$

$$\mp \frac{1}{a^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^n}\right)$$

$$\mp \frac{m}{1\,a^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m(m+1)}{1.2\,a^{m+2}}\left(1 + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^{n-2}}\right)$$

$$\mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3\,a^{m+3}}\left(1 + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{3^{n-3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{a^{n-3}}\right.$$

etc.

vbi ſignis ſuperioribus eſt vtendum, quoties m eſt numerus par, contra vero inferioribus. Expreſſio autem haec ſemper eſt finita, quoniam vtrumque terminorum ordinem tantum vsque ad $\int\frac{1}{z}$ continuari conuenit.

8. Tribuantur iam quoque litterae a omnes valores ab vnitate in infinitum, vt in vna ſumma conplectamur omnes ſeries infinitas prioris ordinis §. 5. ad ſiniſtram notatas; atque earum ſumma ita reperietur repraeſentata:

$$\int\frac{1}{z^n}.\int\frac{1}{z^m} - \frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}.\int\frac{1}{z^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1.2}\int\frac{1}{z^{n+2}}.\int\frac{1}{z^{m-2}}$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\int\frac{1}{z^{n+3}}.\int\frac{1}{z^{m-3}} \text{ etc.}$$

$$\pm \int \frac{1}{z^m} \cdot \int \frac{1}{z^n} \mp \int \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{y^n} \right)$$

$$\pm \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-1}} \mp \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} \left(\frac{1}{y^{n-1}} \right)$$

$$\pm \frac{m(m+1)}{1.\ 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} \mp \frac{m(m+1)}{1.\ 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} \left(\frac{1}{y^{n-2}} \right)$$

$$\pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-3}} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} \left(\frac{1}{y^{n-3}} \right)$$

etc.

Similique modo permutandis exponentibus m et n ſumma orietur alterius ſerierum ordinis ad dextram §. 5. diſpoſiti. His igitur expreſſionibus coniunctis quantitas $\int \frac{1}{z^m} \cdot \int \frac{1}{z^n} - \int \frac{1}{z^{m+n}}$ in ſequentem formam transmutatur, quam per duas partes exhiberi conuenit.

Pars prior.

$$+ (1 \pm 1) \int \frac{1}{z^m} \cdot \int \frac{1}{z^n} \mp \int \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{y^n} \right)$$

$$- \frac{m}{1} (1 \mp 1) \int \frac{1}{z^{m+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-1}} \mp \frac{m}{1} \int \frac{1}{z^{m+1}} \left(\frac{1}{y^{n-1}} \right)$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.\ 2} (1 \pm 1) \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} \mp \frac{m(m+1)}{1.\ 2} \int \frac{1}{z^{m+2}} \left(\frac{1}{y^{n-2}} \right)$$

$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} (1 \mp 1) \int \frac{1}{z^{m+3}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-3}} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} \int \frac{1}{z^{m+3}} \left(\frac{1}{y^{n-3}} \right)$$

etc.

vbi

vbi ſigna ſuperiora valent, ſi m ſit numerus par, inferiora vero ſi m ſit numerus impar.

Pars altera.

$$+(1 \pm 1)\int\frac{1}{z^n}\cdot\int\frac{1}{z^m} \mp \int\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)$$

$$-\frac{n}{1}(1 \mp 1)\int\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-1}} \pm \frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{y^{m-1}}\right)$$

$$+\frac{n(n+1)}{1.\ 2}(1 \pm 1)\int\frac{1}{z^{n+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-2}} \mp \frac{n(n+1)}{1.\ 2.}\int\frac{1}{z^{n+2}}\left(\frac{1}{y^{m-2}}\right)$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}(1 \mp 1)\int\frac{1}{z^{n+3}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-3}} \pm \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\int\frac{1}{z^{n+3}}\left(\frac{1}{y^{m-3}}\right)$$

etc.

vbi ſigna ſuperiora valent, ſi n numerus par, contra vero valent inferiora.

8. Prout ergo exponentes m et n fuerint vel pares vel impares, hae expreſſiones ad pauciores terminos reducuntur, erit ſcilicet

Pars prima ſi m *ſit numerus par:*

$$+2\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n} - \int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right) - \frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{2m(m+1)}{1.\ 2.}\int\frac{1}{z^{m+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-2}} - \frac{m(m+1)}{1.\ 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}\left(\frac{1}{y^{n-2}}\right)$$

$$-\frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}\int\frac{1}{z^{m+3}}\left(\frac{1}{y^{n-3}}\right)$$

etc.

 ſine

ſiue hoc modo

$$2\int\frac{1}{z^m}\cdot\int\frac{1}{z^n}+\frac{2m(m+1)}{1.\ 2}\int\frac{1}{z^{m+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-2}}$$
$$+\frac{2m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\int\frac{1}{z^{m+4}}\int\frac{1}{z^{n-4}}+\text{etc.}$$
$$-\int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)-\frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)-\frac{m(m+1)}{1.\ 2.}\int\frac{1}{z^{m+2}}\left(\frac{1}{y^{n-2}}\right.\ \text{etc.}$$

Pars prima ſi m *ſit numerus impar:*

$$-\frac{2m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{n-1}}-\frac{2m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}\int\frac{1}{z^{m+3}}\int\frac{1}{z^{n-3}}-\text{etc.}$$
$$+\int\frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)+\frac{m}{1}\int\frac{1}{z^{m+1}}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)+\frac{m(m+1)}{1.\ 2.}\int\frac{1}{z^{m+2}}\left(\frac{1}{y^{n-2}}\right)\ \text{etc.}$$

Pro poſterior ſi n *ſit numerus par.*

$$2\int\frac{1}{z^n}\cdot\int\frac{1}{z^m}+\frac{2n(n+1)}{1.\ 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-2}}$$
$$+\frac{2n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\int\frac{1}{z^{n+4}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-4}}\ \text{etc.}$$
$$-\int\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)-\frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{y^{m-1}}\right)-\frac{n(n+1)}{1.\ 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}\left(\frac{1}{y^{m-2}}\right.-\text{etc.}$$

Pars poſterior ſi n *ſit numerus impar.*

$$-\frac{2n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}\cdot\int\frac{1}{z^{m-1}}-\frac{2n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\int\frac{1}{z^{n+3}}\left(\frac{1}{z^{m-3}}\right.-\text{etc.}$$
$$+\int\frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right)+\frac{n}{1}\int\frac{1}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{y^{m-1}}\right)+\frac{n(n+1)}{1.\ 2}\int\frac{1}{z^{n+2}}\left(\frac{1}{y^{m-2}}\right.+\ \text{etc.}$$

10. In his formis notaſſe iuuabit, ſeries formae, quam hic conſideramus, $\int \frac{1}{z^\mu} \left(\frac{1}{y^\nu} \right)$ non ſolum occurrere, ſed etiam omnes ita eſſe comparatas, vt ſumma exponentium $\mu + \nu$ vbique ſit eadem $= m + n$. Quo circa noſtras inueſtigationes ita in ordines diſtribui conueniet, vt omnes reſolutiones, in quibus ſumma exponentium $m + n$ eſt eadem, ad eundem ordinem referantur: quandoquidem in iis eaedem ſeries, quas hic euoluere conſtitui, occurrunt; atque ſi theorema in prima methodo erutum, quo eſt

$$\int \frac{1}{z^m} \left(\frac{1}{y^n} \right) + \int \frac{1}{z^n} \left(\frac{1}{y^m} \right) = \int \frac{1}{z^m} . \int \frac{1}{z^n} + \int \frac{1}{z^{m+n}}$$

in ſubſidium vocemus, hinc ſingulas ſeries formae noſtrae $\int \frac{1}{z^\mu} \left(\frac{1}{y^\nu} \right)$ ſeorſim definire poterimus. Cum autem exponentes m et n vnitate minores eſſe nequeant, pro primo ordine erit $m + n = 2$, pro ſecundo $m + n = 3$, pro tertio $m + n = 4$ et ita porro: cum autem ſit $\int \frac{1}{z}$ infinita, pro ſeriebus quarum ſumma eſt finita hoc infinitum ex calculo egredi debet.

Ordo primus quo m + n = 2.

11. Hic ergo vnico modo eſt $m = 1$ et $n = 1$; expreſſio $\int \frac{1}{z} . \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^2}$ in ſequentem reſoluitur:

$$\int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y} \right) + \int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y} \right) = 2 \int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y} \right).$$

Prior autem methodus dat

$$2 \int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y} \right) = \int \frac{1}{z} . \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^2}$$

quae

quae praeſenti formae repugnare videtur: verum cum $\int \frac{1}{z}$ ſit infinita, eius reſpectu vtique pars altera $\int \frac{1}{z^2}$ pro euaneſcente eſt habenda. Quam ob cauſam hinc nihil ad inſtitutum noſtrum concludere licet.

Ordo ſecundus quo eſt m + n = 3.

12. Hic iteram vnico modo eſt $m = 2$ et $n = 1$, quandoquidem permutatio horum exponentium nullum diſcrimen affert. Quare haec expreſſio $\int \frac{1}{z^2} . \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^3}$ reſoluitur in hanc:

$$2 \int \frac{1}{z^2} . \int \frac{1}{z} - \int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y} \right) - 2 \int \frac{1}{z^2} . \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y^2} \right) + 1 \int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y} \right)$$

quae contrahitur in $\int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y^2} \right)$. Per minorem autem methodum eſt

$$\int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y} \right) + \int \frac{1}{z} \left(\frac{1}{y^2} \right) = \int \frac{1}{z^2} . \int \frac{1}{z} + \int \frac{1}{z^3}$$

vnde ſequi videtur:

$$\int \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{y} \right) = 2 \int \frac{1}{z^3}$$

quae concluſio etſi eſt certa, vti deinceps videbimus, tamen hinc ob infinita ei ſatis confidere non licet. Erit ergo

$$1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 2 \int \frac{1}{z^3}$$
$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc}\right)$$

quae aequalitas vtique omni attentione eſt digna.

Ordo

Ordo tertius, quo $m+n=4$.

13. Duo caſus hic ſunt conſiderandi, quorum primus eſt $m=3$, et $n=1$, vnde forma $\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^4}$ in hanc reſoluitur:

$$+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) - 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 1\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)$$

ita vt ſit

$$2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^3}\right) = 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^4}.$$

Ex prima autem methodo habetur

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) + \int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^3}\right) = \int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z} + \int\frac{1}{z^4}$$

quae aequalitas ab illa ablata relinquit

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} - 2\int\frac{1}{z^4}.$$

Altero caſu eſt $m=2$ et $n=2$, vnde colligitur

$$\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^4}$$
$$= 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$+ 2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)$$

Hincque porro

$$2\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 4\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \int\frac{1}{z^4}.$$

At methodus prima dat

$$2\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \int\frac{1}{z^4}$$

vnde concludimus fore

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \tfrac{1}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{1}{z^4}$$

et $\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2}$.

Superior vero concluſio ſuppeditat

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = \tfrac{3}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \tfrac{5}{2}\int\frac{1}{z^4}$$

quae etiam veritati eſt conſentanea, cum ſit $\int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^2} = \frac{\pi^4}{36}$ et $\int\frac{1}{z^4} = \frac{\pi^4}{90}$; ita vt etiam prior caſus non obſtante infinito ad veritatem perducat; quod tum ſolum a vero aberrare videtur, quando infiniti quadratum $\int\frac{1}{z}.\int\frac{1}{z}$, vti in primo ordine vſu venit, in calculum ingreditur; quo ipſo concluſio ex ordine ſecundo deducta iam haud mediocriter corroboratur.

Ordo quartus, quo $m + n = 5$.

14. Sit primo $m = 4$ et $n = 1$, vnde prodit pro $\int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^5}$ haec expreſſio:

$$2\int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= 2\int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^3} - 2\int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} + \int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)$$

vnde colligimus

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} + 2\int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^3} - \int\frac{1}{z^5}.$$

Methodus autem prima dat

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right) = \int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} + \int\frac{1}{z^5}$$

qua aequalitate ab illa ablata reſtat

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) - \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right) = 2\int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^3} - \int\frac{1}{z^5}.$$

Secundo autem ſit $m = 3$ et $n = 2$, ac pro $\int\frac{1}{z^3}.\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^5}$ reperitur

$$-6\int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$+ 2\int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^3} + 6\int\frac{1}{z^4}.\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) - 2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)$$

ideoque

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int\frac{1}{z^2}.\int\frac{1}{z^3} + \int\frac{1}{z^5}$$ prorſus

prorſus vti prima methodus praebet; hinc ergo fit

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right) = 3\int\frac{1}{z^5} - \int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}.$$

Seorſim autem hinc ſerierum $\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right)$ et $\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ ſummae non definiuntur. Infra autem oſtendemus, eſſe $\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) = 3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3} - \frac{9}{2}\int\frac{1}{z^5}$ et $\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) = -2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3} + \frac{11}{2}\int\frac{1}{z^5}$.

Ordo quintus, quo $m+n=6$.

15. Sit primo $m=5$ et $n=1$, eritque $\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z} - \int\frac{1}{z^6} = +\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$

$$-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4} - 2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} + \int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$$

vnde fit

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + 2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = \int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z} + 4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^6}.$$

Cum autem prima methodus det

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^5}\right) + \int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = \int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z} + \int\frac{1}{z^6}$$

hinc terminis infinitis elidendis fit

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) + \int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right) = 4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} - 2\int\frac{1}{z^6},$$

Secundo ſumatur $m=4$ et $n=2$ eritque $\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^6} =$

$$2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$+2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4} + 6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2} - \int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right) - 2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right) - 3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right) - 4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$$

 ſiue

ſiue

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right)+2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)+4\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)+8\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=$$
$$9\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^6}.$$

Sit tertio $m=3$ et $n=3$, et quia ambae partes fiunt aequales, habitur $\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^6}=$
$-12\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}+2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)+6\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)+12\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)$ ſeu

$$2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)+6\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)+12\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=12\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}$$
$$+\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^6}$$

cum quibus coniungantur hac duae ex prima methodo ortae:

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^6}$$
$$\text{et}\quad 2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\int\frac{1}{z^6}$$

hincque ſingulae ſeries formae noſtrae ita determinantur:

$$\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\frac{7}{2}\int\frac{1}{z^6}$$
$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{16}{3}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}+9\int\frac{1}{z^6}$$
$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^6}$$
$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^4}\right)=+\frac{19}{3}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-3\int\frac{1}{z^6}$$

tum vero aequationem primo inuentam adhibendo obtinetur

$$\int\frac{1}{z^6}=\frac{4}{7}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^2}$$

id quod ob $\int\frac{1}{z^2}=\frac{\pi\pi}{6}$, $\int\frac{1}{z^4}=\frac{\pi^4}{90}$ et $\int\frac{1}{z^6}=\frac{\pi^6}{945}$ veritati eſt conſentaneum.

Ordo

Ordo ſextus, quo $m+n=7$.

16. Sit primo $m=6$ et $n=1$, eritque

$\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^7}=$

$2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$

$-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}$

$+\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$

vnde colligimus hanc aequationem

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=$$
$$\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}+2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^7}.$$

Cum vero ſit

$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^7}$ erit

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)-\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=$$
$$2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}+2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^7}.$$

Eſt vero etiam

$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^7}$ et

$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^7}$

vnde habebitur

$\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}$

Sit ſecundo $m=5$ et $n=2$, eritque $\int\frac{1}{z^5}\int\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^7}=$

$-10\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)+5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$

$+2\int\frac{1}{z^2}\int\frac{1}{z^5}+6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}+10\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}$

$-\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)-2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)-3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)-4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)-5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$

vnde colligitur haec aequatio:

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)+2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+3\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=$$
$$\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}+6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}+\int\frac{1}{z^7}$$

quae per ante ex methodo prima allegatas reducitur ad hanc:

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^7}.$$

Sit tertio $m=4$ er $n=3$, crit $\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^7}=$

$$2\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^3}+20\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)-4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)-10\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$-6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-20\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z}+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+3\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+6\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$+10\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right).$$

Vnde colligitur

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)+2\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=5\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^7}\ \text{ſeu}$$
$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)=4\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^3}-2\int\frac{1}{z^7}$$

quae cum ante inuenta congruit, ita vt hinc nihil noui concludi poſſit. Hinc ergo tantum determinatur primo ſeriei $\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)$ ſumma, tum vero hae duae coniunctim $\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^3}\right)+2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^2}\right)$; ſin autem vtraque ſeorſim innoteſceret, tum etiam binae reliquae $\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^4}\right)$ et $\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^5}\right)$ innoteſcerent.

Ordo ſeptimus, quo $m+n=8$.

17. Sit primo $m=7$ et $n=1$, erit

$$\int\frac{1}{z^7}\cdot\int\frac{1}{z}-\int\frac{1}{z^8}=\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-2\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^2}$$
$$+\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^7}\right)+\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^4}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)$$
$$+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)$$

quae

quae vltima linea abit in

$$\int\tfrac{1}{z}\cdot\int\tfrac{1}{z^7}+\int\tfrac{1}{z^2}\cdot\int\tfrac{1}{z^6}+\int\tfrac{1}{z^3}\cdot\int\tfrac{1}{z^5}+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}+\tfrac{7}{2}\int\tfrac{1}{z^8}$$

ſicque erit

$$\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)=2\int\tfrac{1}{z^2}\cdot\int\tfrac{1}{z^6}-\int\tfrac{1}{z^3}\cdot\int\tfrac{1}{z^5}+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}-\tfrac{9}{2}\int\tfrac{1}{z^8}.$$

Secundo ſit $m=6$ et $n=2$, erit $\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^8}=$

$$2\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}-\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)-6\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)$$
$$+2\int\tfrac{1}{z^2}\cdot\int\tfrac{1}{z^6}+6\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}+10\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}$$
$$-\int\tfrac{1}{z^2}\left(\tfrac{1}{y^6}\right)-2\int\tfrac{1}{z^3}\left(\tfrac{1}{y^5}\right)-3\int\tfrac{1}{z^4}\left(\tfrac{1}{y^4}\right)-4\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)-5\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)$$
$$-6\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)$$

ſiue

$$\int\tfrac{1}{z^2}\left(\tfrac{1}{y^6}\right)+2\int\tfrac{1}{z^3}\left(\tfrac{1}{y^5}\right)+3\int\tfrac{1}{z^4}\left(\tfrac{1}{y^4}\right)+4\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)+6\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)$$
$$+12\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)=13\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}+\int\tfrac{1}{z^8}+6\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4})$$

quae reducitur ad hanc:

$$2\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)+5\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)+12\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)=$$
$$+12\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}-2\int\tfrac{1}{z^3}\cdot\int\tfrac{1}{z^5}+\tfrac{9}{2}\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}-\tfrac{7}{2}\int\tfrac{1}{z^8}.$$

Sit tertio $m=5$ et $n=3$, erit $\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\int\frac{1}{z^8}=$

$$-10\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}+\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)+5\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)+15\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)$$
$$-6\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}-20\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}$$
$$+\int\tfrac{1}{z^3}\left(\tfrac{1}{y^5}\right)+3\int\tfrac{1}{z^4}\left(\tfrac{1}{y^4}\right)+6\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)+10\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)+15\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)$$

vnde fit

$$\int\tfrac{1}{z^3}\left(\tfrac{1}{y^5}\right)+3\int\tfrac{1}{z^4}\left(\tfrac{1}{y^4}\right)+7\int\tfrac{1}{z^5}\left(\tfrac{1}{y^3}\right)+15\int\tfrac{1}{z^6}\left(\tfrac{1}{y^2}\right)+30\int\tfrac{1}{z^7}\left(\tfrac{1}{y}\right)=$$
$$30\int\tfrac{1}{z^6}\cdot\int\tfrac{1}{z^2}+\int\tfrac{1}{z^5}\cdot\int\tfrac{1}{z^3}+6\int\tfrac{1}{z^4}\cdot\int\tfrac{1}{z^4}-\int\tfrac{1}{z^8}$$

ſiue

$$6\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)+15\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)+30\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=$$

$$30\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{7}{2}\int\frac{1}{z^8}.$$

Sit denique $m=4$ et $n=4$, eritque

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^8}=2\int\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{z^4}+20\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^4}\right)-4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)$$
$$-10\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)-20\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)$$

hincque

$$4\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)+10\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)+20\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=20\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^2}+\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^4}$$

quae aequatio cum praecedente eandem continet determinationem, ac reducitur ad hanc proprietatem:

$$6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}=7\int\frac{1}{z^8}$$

quae valoribus a me inuentis $\int\frac{1}{z^4}=\frac{\pi^4}{90}$ et $\int\frac{1}{z^8}=\frac{\pi^8}{9450}$ egregie eſt conformis. Sin autem haec vltima aequatio cum caſu ſecundo conferatur, inde colligitur

$$4\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^2}\int\frac{1}{z^6}-4\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}+8\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-7\int\frac{1}{z^8}\quad\text{ſeu}$$

$$\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^4}$$

qui valor cum caſu primo collatus praebet

$$2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}+\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}=\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^8}$$

quae aequatio etiam veritati eſt conſentanea. Hinc praeter ſeriem $\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)$ et determinationes primae methodi, tantum hanc vnicam nouam determinationem conſequimur:

$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)+5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)=10\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}$$

neque ergo ſummas harum ſerierum $\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^3}\right)$ et $\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ ſeorſim definire licet.

Ordo

Ordo octauus, *quo* $m+n=9$.

18. Pro hoc ordine methodus prima has dat aequationes:

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^8}\right)+\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z}\cdot\int\frac{1}{z^8}+\int\frac{1}{z^9}$$

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^7}\right)+\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}+\int\frac{1}{z^9}$$

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}+\int\frac{1}{z^9}$$

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^5}\right)+\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^4}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5}+\int\frac{1}{z^9}.$$

Secunda autem methodus praeterea has ſuppeditat determinationes:

$$\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)=5\int\frac{1}{z^9}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5}$$

$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^4}\right)+5\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right)+5\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right)=10\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}$$

$$\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^3}\right)+3\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^2}\right)=6\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5}+6\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-10\int\frac{1}{z^9}.$$

Cum igitur in hoc ordine 8 occurrant ſeries formae quam contemplamur, hae ſeptem aequationes omnibus definiendis non ſufficiunt; ſin autem aliunde praeter ſeriem $\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y}\right)$ vnica reliquarum ſummari poſſet, omnium plane ſummae hinc innoteſcerent.

Ordo nonus, *quo* $m+n=10$.

19. Ex prima methodo pro hoc ordine has conſequimur aequationes:

$$\int\frac{1}{z}\left(\frac{1}{y^9}\right)+\int\frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right)=\int\frac{1}{z}\cdot\int\frac{1}{z^9}+\int\frac{1}{z^{10}}$$

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^8}\right)+\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}+\int\frac{1}{z^{10}}$$

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^7}\right)+\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right)=\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^7}+\int\frac{1}{z^{10}}$$

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y^6}\right)+\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y^4}\right)=\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^6}+\int\frac{1}{z^{10}}$$

$$\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y^5}\right)=\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^5}+\tfrac{1}{2}\int\frac{1}{z^{10}}$$

quoniam igitur 9 ſeries hic occurrunt, pro earum ſummatione ſecunda methodus primo dat

$$\int \frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right) = 3\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^8} - \int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^7} + 3\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^5} - \frac{11}{2}\int \frac{1}{z^{10}}.$$

reliquarum vero quatuor aequationum, quae inde deducuntur, duae nihil aliud definiunt, praeter notam relationem, qua eſt $\int \frac{1}{z^{10}} = \frac{10}{11}\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6}$, reliquae vero duae praebent

$$\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^7}\right) + \int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right) = 6\int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^7} - \int \frac{1}{z^5} \cdot \int \frac{1}{z^5} - \frac{7}{2}\int \frac{1}{z^{10}}$$

$$2\int \frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y^3}\right) + 7\int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^7}\right) = 14\int \frac{1}{z^3} \cdot \int \frac{1}{z^7} - 45\int \frac{1}{z^4} \cdot \int \frac{1}{z^6} + 8\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^8} + 33\int \frac{1}{z^{10}}.$$

ita vt vna determinatio adhuc deſit omnes ſeries huius ordinis ſummandas.

20. Circa determinationes, quas haec ſecunda methodus ſuppeditat, ſequentia obſeruanda occurrunt:

Primo nonniſi in ordine primo, ſecundo, tertio et quinto omnes ſeries noſtrae formae definiuntur; in reliquis omnibus vna determinatio deeſt, quominus omnes ſeries eo pertinentes ſummari queant; ita vt ſi aliunde talis determinatio ſuppeteret, totum negotium confici poſſet.

Deinde etiam pro iis ordinibus, quibus $m + n$ eſt numerus par, imprimis notari meretur, quod haec methodus eiusdem relationes inter ſummas poteſtatum parium $\int \frac{1}{z^2}$, $\int \frac{1}{z^4}$, $\int \frac{1}{z^6}$ etc. patefaciat, quas olim ex principiis maxime diuerſis erueram; cum tamen hic quadraturae circuli, a qua hae ſummae pendent,

pendent, nulla ratio habeatur. Ex quo etiam expectare licuiſſet, pro ordinibus, quibus $m+n$ eſt numerus impar, ſimilem relationem inter ſummas poteſtatum imparium prodire debuiſſe, quod autem longe ſecus vſu venit, cum determinationum, quae pro his ordinibus reperiuntur, quaedam plane inter ſe conueniant, vt nihil prorſus inde concludi queat. Quod cum praeter omnem expectationem euenerit, iſte defectus plenae determinationis omni attentione dignus eſt cenſendus.

21. Tertio obſeruandum eſt, in omnibus ordinibus vnam ſeriem noſtrae formae ſemper perfecte determinari, eam ſcilicet, quae formula $\int\frac{1}{z^{m+n-1}}\left(\frac{1}{y}\right)$ indicatur; cum autem eius determinationes, prouti $m+n$ fuerit numerus impar vel par, aliam legem ſequantur, eas ſeorſim hic ob oculos ponamus:

Pro ordinibus quibus m + n *eſt numerus par.*

$$\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2}-\frac{5}{2}\int\frac{1}{z^4}$$

$$\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}-\frac{7}{2}\int\frac{1}{z^6}$$

$$\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\frac{9}{2}\int\frac{1}{z^8}$$

$$\int\frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^7}+3\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z^5}\int\frac{1}{z^5}$$
$$-\frac{11}{2}\int\frac{1}{z^{10}}$$

$$\int\frac{1}{z^{11}}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^{10}}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^9}+3\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^7}$$
$$+\frac{3}{2}\int\frac{1}{z^6}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\frac{13}{2}\int\frac{1}{z^{12}}$$

etc.

quae expreſſiones ita ad paritatem numeri m et n ſunt adſtrictae, vt ad impares per interpolationem transferri nequeant.

Pro ordinibus quibus m + n *eſt numerus impar.*

$$\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right)=2\int\frac{1}{z^3}$$

$$\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=3\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}$$

$$\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^4}$$

$$\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)=5\int\frac{1}{z^9}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^5}$$

$$\int\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{1}{y}\right)=6\int\frac{1}{z^{11}}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^9}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^8}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^7}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^6}$$

etc.

Hic autem nihil impedit, quominus hae expreſſiones etiam ad ordines pares transferantur.

22. Interpolatione autem rite inſtituta hae ſummationes pro omnibus ordinibus ita ſe habebunt:

$$2\int\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right)=4\int\frac{1}{z^3}$$

$$2\int\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right)=5\int\frac{1}{z^4}-\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^2}$$

$$2\int\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right)=6\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^3}$$

$$2\int\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{y}\right)=7\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^4}-\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^3}$$

$$2\int\frac{1}{z^6}\left(\frac{1}{y}\right)=8\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^5}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^4}$$

$$2\int\frac{1}{z^7}\left(\frac{1}{y}\right)=9\int\frac{1}{z^8}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^5}-\int\frac{1}{z^4}\cdot\int\frac{1}{z^4}$$

$$2\int\frac{1}{z^8}\left(\frac{1}{y}\right)=10\int\frac{1}{z^9}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^6}-2\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^5}$$

$$2\int\frac{1}{z^9}\left(\frac{1}{y}\right)=11\int\frac{1}{z^{10}}-2\int\frac{1}{z^2}\cdot\int\frac{1}{z^8}-2\int\frac{1}{z^3}\cdot\int\frac{1}{z^7}-2\int\frac{1}{z^4}\int\frac{1}{z^6}-\int\frac{1}{z^5}\cdot\int\frac{1}{z^5}$$

etc.

vnde

vnde in genere ſi ponatur $m+n=\lambda$ erit

$$2\int\frac{1}{z^{\lambda-1}}\left(\frac{1}{y}\right)=(\lambda+1)\int\frac{1}{z^{\lambda}}-\int\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-2}}-\int\frac{1}{z^{3}}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-3}}$$

$$-\int\frac{1}{z^{4}}\cdot\int\frac{1}{z^{\lambda-4}}\cdots\cdots-\int\frac{1}{z^{\lambda-2}}\cdot\int\frac{1}{z^{2}}.$$

23. Quo minus autem haec interpolatio in dubium vocari poſſit, comparentur hae expreſſiones pro ordinibus paribus cum ante exhibitis, indeque obtinebuntur ſequentes relationes:

$$5\int\frac{1}{z^{4}}=2\int\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{2}}$$

$$7\int\frac{1}{z^{6}}=4\int\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{4}}$$

$$9\int\frac{1}{z^{8}}=4\int\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{6}}+2\int\frac{1}{z^{4}}\cdot\int\frac{1}{z^{4}}$$

$$11\int\frac{1}{z^{10}}=4\int\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{8}}+4\int\frac{1}{z^{4}}\cdot\int\frac{1}{z^{6}}$$

$$13\int\frac{1}{z^{12}}=4\,\frac{1}{z^{2}}\cdot\int\frac{1}{z^{10}}+4\int\frac{1}{z^{4}}\cdot\int\frac{1}{z^{8}}+2\int\frac{1}{z^{6}}\cdot\int\frac{1}{z^{6}}$$

etc.

quae cum iis, quas olim elicui, perfecte conſentiunt. Si enim ponamus

$$\int\frac{1}{z^{2}}=\alpha\pi^{2},\ \int\frac{1}{z^{4}}=\beta\pi^{4},\ \int\frac{1}{z^{6}}=\gamma\pi^{6},\ \int\frac{1}{z^{8}}=\delta\pi^{8},$$
$$\int\frac{1}{z^{10}}=\varepsilon\pi^{10}\ \text{etc.}$$

erit vtique quemadmodum demonſtraui

$$5\beta=2\alpha\alpha$$
$$7\gamma=4\alpha\beta$$
$$9\delta=4\alpha\gamma+2\beta\beta$$
$$11\varepsilon=4\alpha\delta+4\beta\gamma$$
$$13\zeta=4\alpha\varepsilon+4\beta\delta+2\gamma\gamma$$
$$15\eta=4\alpha\zeta+4\beta\varepsilon+4\gamma\delta$$

etc.

24. Prima methodus tantum pro ordinibus paribus vnius ſeriei in noſtra forma generali contentae ſummam praebuerat, quae poſito $m+n=2\mu$ ita ſe habebat

$$\int \frac{1}{z^{\mu}}\left(\frac{1}{y^{\mu}}\right)=\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{z^{\mu}}\cdot\int \frac{1}{z^{\mu}}+\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{z^{2\mu}}.$$

Nunc autem ope ſecundi methodi praeterea ex quouis ordine vnam ſeriem formae noſtrae ſummare valemus, atque adeo in ordine $m+n=6$ omnes has ſeries ſummare licuit. Exquo ſuſpicari licet, hanc ſummationem quoque in omnibus ordinibus ſuccedere, etiamſi ſecunda methodus negotium non penitus conficiat: plurimum autem iam praeſtitum cenſeri debet, quod ſi cuiusque ordinis vnica ſeries praeter binas memoratas vndecunque ſummari poſſet, inde ſtatim omnium reliquarum ſummas conſequi: Res quidem ita ſe habet in ordinibus hic euolutis; at ſi vlterius progrediamus, plures vna determinationes deficere deprehenduntur.

25. Quo autem clarius ratio aequationum, quas tam prima quam ſecunda methodus pro quolibet ordine ſuppeditat, perſpiciatur, formulas noſtras adhuc ſuccinctius ita repraeſentemus, vt pro ordine quocunque $m+n=\lambda$ loco $\int \frac{1}{z^{\mu}}\cdot\frac{1}{z^{\nu}}$ ſcribatur vel p^{μ} vel p^{ν}, quippe quae duae formulae ob $\mu+\nu=\lambda$ pro aequiualentibus ſunt habendae. Similique modo pro

pro $\int \frac{1}{z^{\lambda}}$ ſcribatur p^{λ}; tum vero loco formulae

$$\int \frac{1}{z^{\mu}} \left(\frac{1}{y^{\nu}}\right) \quad \text{ſeu} \quad \int \frac{1}{z^{\mu}} \left(\frac{1}{z^{\lambda - \mu}}\right)$$

ſcribatur q^{μ}; hincque aequationes ſingulorum ordinum magis euadent perſpicuae.

Pro ordine $m + n = 3$

$$\begin{array}{r|l}
q + q^2 = p + p^3 & q + q^2 = 2p^2 + p - p^3 \quad \text{ſeu} \quad q = p - p^3 \\
 & \quad -1 \quad -2
\end{array}$$

Pro ordine $m + n = 4$

$$\begin{array}{r|l}
q + q^3 = p + p^4 & q + q^2 + q^3 = 2p^2 + p - p^4 \\
 & \qquad\quad +1 \\
2q^2 = p^2 + p^4 & \qquad q^2 + 2q^3 = 2p^2 - p^2 + p^4 \\
 & \quad +1 \;\; +2 \quad +2
\end{array}$$

Pro ordine $m + n = 5$

$$\begin{array}{r|l}
q + q^4 = p + p^5 & q + q^2 + q^3 + q^4 = 2p^2 + 2p^4 + p - p^5 \\
 & \qquad\qquad -1 \qquad\quad -2 \\
q^2 + q^3 = p^2 + p^5 & q^2 + 2q^3 + 3q^4 = 2p^3 + 6p^4 - p^2 + p^5 \\
 & \quad -1 \quad -3 \qquad\qquad -6
\end{array}$$

Pro ordine $m + n = 6$

$$\begin{array}{r|l}
q + q^5 = p + p^6 & q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = 2p^2 + 2p^4 + p - p^6 \\
 & \qquad\qquad\qquad +1 \\
q^2 + q^4 = p^2 + p^6 & q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 = 2p^2 + 6p^4 - p^2 + p^6 \\
 & \qquad +1 \;\; +4 \qquad\qquad +2 \\
2q^3 = p^3 + p^6 & \qquad q^3 + 3q^4 + 6q^5 = \qquad 6p^4 + p^3 - p^6 \\
 & \quad +1 \;\; +3 \quad +6 \qquad\qquad +6
\end{array}$$

Pro

Pro ordine $m + n = 7$

$q + q^6 = p + p^7$	$q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 2p^2 + 2p^4 + 2p^6 + p - p^7$
	$-1 \qquad -2$
$q^2 + q^5 = p^2 + p^7$	$q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 5q^6 = 2p^2 + 6p^4 + 10p^6 - p^2 + p^7$
	$-1 \quad -5 \qquad -10$
$q^3 + q^4 = p^3 + p^7$	$q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 10q^6 = 6p^4 + 20p^6 + p^3 - p^7$
	$-1 \quad +4 \quad -10 \qquad -2 \quad -20$

Pro ordine $m + n = 8$

$q + q^7 = p + p^3$	$q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 = 2p^2 + 2p^4 + 2p^6 + p - p^8$
	$+1$
$q^2 + q^6 = p^2 + p^8$	$q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 4q^5 + 5q^6 + 6q^7 = 2p^2 + 6p^4 + 10p^6 - p^2 + p^8$
	$+1 + 6 \qquad +2$
$q^3 + q^5 = p^3 + p^8$	$q^3 + 3q^4 + 6q^5 + 10q^6 + 15q^7 = 6p^4 + 20p^6 + p^3 - p^8$
	$+1 \quad +5 \quad +15 \qquad +10$
$2q^4 = p^4 + p^8$	$q^4 + 4q^5 + 10q^6\ 20q^7 = 2p^4 + 20p^6 - p^4 + p^8$
	$+1 + 4 \quad +10 + 20 \qquad +2 \quad +20$

hoc ergo modo iſtas aequationes quouſque lubuerit facile continuare licet.

Tertia Methodus ad huiusmodi ſeries perueniendi.

26. Haec methodus ſimilis fere eſt praecedenti, conſidero enim ſeriem

$$\int \frac{1}{z^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots\ldots + \frac{1}{(z-1)^m}\right),$$

cuius valor modo ſuperiori expreſſus eſt

$$= \int \frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{y^m}\right) - \int \frac{1}{z^{m+n}}$$

modo

modo autem in §. praec. vſitato $= q^n - p^{m+n}$; de quo notetur eſſe per methodum primam

$$q^m + q^n = p^m + p^{m+n} = p^n + p^{m+n} \text{ ob } p^m = p^n.$$

Iam huius formae

$$\frac{1}{z^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{(z-1)^m}\right)$$

quilibet terminus continetur in hac forma $\frac{1}{(x+a)^n x^m}$ quae vti vidimus §. 6. reſoluitur in has partes:

$$\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{x^m} - \frac{n}{1\,a^{n+1}}\cdot\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{n(n+1)}{1.2\,a^{n+2}}\cdot\frac{1}{x^{m-2}} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\,2.\,3\,a^{n+3}}\cdot\frac{1}{x^{m-3}} \text{ et}$$

$$\pm\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{(a+x)^n} \pm \frac{m}{1\,a^{m+1}}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} \pm \frac{m(m+1)}{1.2\,a^{m+2}}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-2}} \pm \text{etc.}$$

vbi ſignorum ambiguorum valent ſigna ſuperiora, ſi m eſt numerus par, inſeriora vero ſi m eſt numerus impar; tum vero vtramque progreſſionem eousque continuari conuenit, donec in ſuperiori factoris $\frac{1}{x}$, in inferiori vero factoris $\frac{1}{x+a}$ exponens euadat vnitas.

27. Vt igitur ſeriei propoſitae ſummam obtineamus, in formulae euolutae ſingulis terminis tam loco a quam loco x omnes numeros naturali ordine progredientes ab vnitate in infinitum ſucceſſiue ſcribi omnesque terminos inde oriundos in vnam ſummam colligi oportet. Tum autem pro terminis ſuperioris partis euolutae fore

$$\int\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{x^m} = \int\frac{1}{z^n}\cdot\int\frac{1}{z^m} = p^n = p^m$$

$$\int \frac{1}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} = \int \frac{1}{z^{n+1}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-1}} = p^{n+1} = p^{m-1}$$

$$\int \frac{1}{a^{n+2}} \cdot \frac{1}{x^{m-2}} = \int \frac{1}{z^{n+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{m-2}} = p^{n+2} = p^{m-2}$$

etc.

pro terminis autem inferioris partis euolutae

$$\int \frac{1}{a^{m}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n}} = \int \frac{1}{z^{m}} \cdot \int \frac{1}{z^{n}} - \int \frac{1}{z^{m}} \left(\frac{1}{y^{n}}\right) = p^{m} - q^{m} = q^{n} - p^{m+n}$$

$$\int \frac{1}{a^{m+1}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-1}} = \int \frac{1}{z^{m+1}} \int \frac{1}{z^{n-1}} - \int \frac{1}{z^{m+1}} \left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) = p^{m+1} - q^{m+1} = q^{n-1} - p^{m+n}$$

$$\int \frac{1}{a^{m+2}} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n-2}} = \int \frac{1}{z^{m+2}} \cdot \int \frac{1}{z^{n-2}} - \int \frac{1}{z^{m+2}} \left(\frac{1}{y^{n-2}}\right) = p^{m+2} - q^{m+2} = p^{n-2} - p^{m+n}$$

etc.

His igitur ſubſtitutis valor ſeriei noſtrae, qui eſt $= q^{n} - p^{m+n}$ euoluitur in ſequentem expreſſionem:

$$p^{m} - \frac{n}{1} p^{m-1} + \frac{n(n+1)}{1.\ 2} p^{m-2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} p^{m-3} + \text{etc.}$$
$$\pm q^{n} \pm \frac{m}{1} q^{n-1} \pm \frac{m(m+1)}{1.\ 2} q^{n-2} \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} q^{n-3} \text{ etc.}$$
$$\mp p^{m+n} \mp \frac{m}{1} p^{m+n} \mp \frac{m(m+1)}{1.\ 2} p^{m+n} \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} p^{m+n} \text{ etc.}$$

Cum autem ſit $p^{\mu} = q^{\mu} + q^{m+n-\mu} - p^{m+n}$, habebimus

$$0 = q^{m} - \frac{n}{1}(q^{m-1} + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}(q^{m-2} + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}(q^{m-3} + q^{n+3})$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot p^{m+n} \qquad - \frac{n(n+1)}{1.\ 2} p^{m+n} \qquad + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} p^{m+n}$$
$$\pm q^{n} \pm \frac{m}{1} q^{n-1} \qquad \pm \frac{m(m+1)}{1.\ 2} q^{n-2} \qquad \pm \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} q^{n-3}$$
$$\mp p^{m+n} \mp \frac{m}{1} p^{m+n} \qquad \mp \frac{m(m+1)}{1.\ 2} p^{m+n} \qquad \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} p^{m+n}.$$

28.

28. Antequam ad ordines ſupra conſideratos deſcendamus, euoluamus in genere aliquos caſus.

I. Sit igitur $m = 1$ et aequatio inuenta induet hanc formam:

$$0 = q - q^n - q^{n-1} - q^{n-2} \dots\dots - q + n p^{n+1}$$

ſeu $q^2 + q^3 + q^4 \dots\dots + q^n = n p^{n+1}$

exponente ordinis exiſtente $n + 1$, ita vt ſit

$$q^\mu + q^{n+1-\mu} = p^\mu + p^{n-1}.$$

II. Sit $m = 2$, ordinisque exponens $n + 2$, vt ſit $q^\mu + q^{n+2-\mu} = p^\mu + p^{n+2}$ et aequatio noſtra fiet

$$0 = q^2 - n(q + q^{n+1}) + q^n + 2q^{n-1} + 3q^{n-2} + 4q^{n-3} \dots + nq$$
$$+ n p^{n+2} \qquad\qquad - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} p^{n+2}$$

ſiue

$$q^n + 2q^{n-1} + 3q^{n-2} \dots (n-1)q^2 - nq^{n+1} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n+2}.$$

III. Sit $m = 3$, ordinisque exponens $n + 3$, vt ſit $q^\mu + q^{n+3-\mu} = p^\mu + p^{n+3}$ et aequatio noſtra erit

$$0 = q^3 - n(q^2 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}(q + q^{n+2})$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n+3}$$
$$- q^n - 3q^{n-1} - 6q^{n-2} - 10q^{n-3} \dots\dots - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} q$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n+3}$$

ſiue

$$q^n + 3q^{n-1} + 6q^{n-2} \dots\dots + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} q^3 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} q^2 + n q^{n+1}$$
$$= \frac{n(nn+5)}{6} p^{n+3} \qquad - 1 \qquad\qquad + n \qquad - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} q^{n+2}$$

vel hoc modo diſtinctius:

$$q^n + 3q^{n-1} + 6q^{n-2} + 10q^{n-3} \dots\dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} q^2$$
$$- q^3 + n(q^2 + q^{n+1}) - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} q^{n+2} = \frac{n(nn+5)}{6} p^{n+3}.$$

IV. Sit $m = 4$, ordinisque exponens $n + 4$, et $q^{\mu} + q^{n+4-\mu} = p^{\mu} + p^{n+4}$, et aequatio noſtra fiet

$$\begin{array}{l} 0 = q^4 - n(q^3 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}(q^2 + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(q + q^{n+3}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{n(nn+5)}{1\cdot 2\cdot 3} p^{n+4} \\ + q^n + 4q^{n-1} + 10q^{n-2} + 20q^{n-3} \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} p^{n+4} \end{array}$$

ſiue

$$\begin{array}{l} q^n + 4q^{n-1} + 10q^{n-2} \ldots + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} q^2 = \frac{n(n-1)(nn+3n+14)}{24} p^{n+4} \\ + q^4 - n(q^3 + q^{n+1}) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}(q^2 + q^{n+2}) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} q^{n+3}. \end{array}$$

29. Euoluamus etiam ſimili modo quosdam caſus pro exponente n.

I. Sit primo $n = 1$, et ordinis exponens $m + 1$, eritque noſtra aequatio

$$\begin{array}{l} 0 = q^m - q^{m-1} + q^{m-2} - q^{m-3} \ldots \mp q \pm \tfrac{1}{2} p^{m+1} \pm q \mp p^{m+1} \\ \qquad\quad - q^2 \quad + q^3 \quad - q^4 \qquad\quad \mp q^m \end{array}$$

vnde patet ſi m fuerit numerus par, quo caſu ſuperiora ſigna valent, totam aequationem fieri identicam; at ſi m ſit numerus impar habebitur

$$q^2 - q^3 + q^4 - q^5 \ldots\ldots - q^m = \tfrac{1}{2} p^{m+1}.$$

II. Sit $n = 2$, ordinisque exponens $m + 2$, et aequatio noſtra erit

$$\begin{array}{l} 0 = q^m - 2q^{m-1} + 3q^{m-2} - 4q^{m-3} \ldots \mp mq \quad \left.\begin{array}{l} + \tfrac{1}{2}(m+2) \\ - \tfrac{1}{2}(m+1) \end{array}\right\} p^{m+2} \\ \qquad - 2q^3 \quad + 3q^4 \quad - 4q^5 \ldots\ldots \mp mq^{m+1} \\ \pm q^2 \pm mq \mp (m+1) p^{m+2} \end{array}$$

vbi ſuperior ambiguitas valet pro valoribus paribus ipſius m, inferior pro imparibus. Iam pro variis valoribus ipſius m habebimus.

Primo

Primo pro valoribus paribus

$m = 2;\ q^2 - q^3 = \frac{1}{2}p^4$
$m = 4;\ q^2 - q^3 + q^4 - q^5 = \frac{1}{2}p^6$
$m = 6;\ q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 = \frac{1}{2}p^8$
$m = 8;\ q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + q^8 - q^9 = \frac{1}{2}p^{10}$
etc.

Deinde pro valoribus imparibus:

$m = 1;\ q^2 = 2p^2$
$m = 3;\ 3q^2 + q^3 - 3q^4 = 3p^5$
$m = 5;\ 5q^2 - q^3 - q^4 + 3q^5 - 5q^6 = 4p^7$
$m = 7;\ 7q^2 - 3q^3 + q^4 + 3q^5 - 3q^6 + 5q^7 - 7q^8 = 5p^9$
$m = 9;\ 9q^2 - 5q^3 + 3q^4 - q^5 - q^6 + 3q^7 - 5q^8 + 7q^9 - 9q^{10} = 6p^{11}$
etc.

III. Si ponamus $n = 3$ ſinguli caſus commodius perpenduntur, ſuntque primo pro m numero impari

$m = 1;\ q^2 + q^3 = 3p^4$
$m = 3;\ 6q^2 + 0q^3 + 3q^4 - 6q^5 = 7p^6$
$m = 5;\ 15q^2 - 5q^3 + 6q^4 - 7q^5 + 10q^6 - 15q^7 = 13p^8$
$m = 7;\ 28q^2 - 14q^3 + 13q^4 - 12q^5 + 13q^6 - 16q^7 + 21q^8 - 28q^9 = 21p^{10}$
etc.

pro ordinibus vero imparibus:

$m = 2;\ 3q^2 + q^3 - 3q^4 = 3p^5$
$m = 4;\ 10q^2 - 2q^3 - 2q^4 + 6q^5 - 10q^6 = 8p^7$
$m = 6;\ 21q^2 - 9q^3 + 3q^4 + 3q^5 - 9q^6 + 15q^7 - 21q^8 = 15p^9.$
$m = 8;\ 36q^2 - 20q^3 + 12q^4 - 4q^5 - 4q^6 + 12q^7 - 20q^8 + 28q^9 - 36q^{10} = 24p^{11}$
etc.

hic pro vtroque ordine forma aequationis in genere expreſſa ita ſe habebit:

ſi m ſit numerus par

$$(m+1)q^2-(m-3)q^3+(m-5)q^4-(m-7)q^5 \ldots\ldots -(m+1)q^{m+2} = \frac{m+4}{2}p^{m+2}$$

ſi m ſit numerus impar

$$m(m+1)q^2-(mm-3m)q^3+(mm-5m+12)q^4-(mm-7m+24)q^5$$
$$+(mm-9m+40)q^5-(mm-11m+60)q^7 \ldots\ldots -m(m+1)q^{m+2}$$
$$= \frac{mm+4m+2}{2}p^{m+2}.$$

30. Nunc iam ſingulos ordines percurramus, atque aequationes per methodum ſecundam inuentas ope formulae $p^\mu = q^\mu + q^{m+n-\nu} - p^{m+n}$ ad ſimiles formas, cuiusmodi hic ſumus nacti reducamus.

Ordo $m+n=3$

meth. I.	meth. II.	meth. III.
$q+q^2=p+p^3$	$q^2=2p^3$	$q^2=2p^3$

Ordo $m+n=4$

$q+q^3=p+p^4$	$3q^2-q^3=4p^4$	$q^2+q^3=3p^4$
$2q^2=p^2+p^4$	$4q^2-4q^3=2p^4$	$2q^2-2q^3=p^4$

ergo $q^2=\frac{7}{4}p^4$ et $q^3=\frac{5}{4}p^4$ ob $p^2=\frac{5}{2}p^4$ ergo $q^3=\frac{1}{2}p^2$

Ordo $m+n=5$

$q+q^4=p+p^5$	$q^2+q^3+q^4=4p^5$	$q^2+q^3+q^4=4p^5$
$q^2+q^3=p^2+p^5$	$0=0$	$3q^2+q^3-3q^4=3p^5$

$q^4=3p^5-p^2$; $q^3=-\frac{9}{2}p^5+3p^2$; $q^2=\frac{11}{2}p^5-2p^2$.

Ordo $m+n=6$

$q+q^5=p+p^6$	$3q^2-q^3+3q^4-q^5=6p^6$	$q^2+q^3+q^4+q^5=5p^6$
$q^2+q^4=p^2+p^6$	$8q^2-2q^3+5q^4-8q^5=8p^6$	$4q^2+2q^3+q^4-4q^5=6p^6$
$2q^3=p^3+p^6$	$12q^2+6q^4-12q^5=14p^6$	$6q^2+3q^4-6q^5=7p^6$
		$q^2-q^3+q^4-q^5=\frac{1}{2}p^6$

Ergo

Ergo

$$q^5 = p^2 - \tfrac{1}{2}p^3;\quad q^4 = p^3 - \tfrac{1}{3}p^6;\quad q^3 = \tfrac{1}{2}p^3 + \tfrac{1}{2}p^6;\quad q^2 = p^2 - p^3 + \tfrac{4}{3}p^6$$

$$q^5 = \tfrac{7}{2}p^6 - p^2 - \tfrac{1}{2}p^3$$

$$q^5 = -\tfrac{7}{2}p^6 + 3p^2 - \tfrac{1}{2}p^3$$ Ob $p^2 = \tfrac{7}{4}p^6$ erit

$$q^5 = \tfrac{7}{4}p^6 - \tfrac{1}{2}p^3;\quad q^4 = -\tfrac{1}{3}p^6 + p^3;\quad q^3 = \tfrac{1}{2}p^6 + \tfrac{1}{2}p^3;\quad q^2 = \tfrac{17}{12}p^6 - p^3.$$

Ordo $m + n = 7$

$q + q^6 = p + p^7$	$q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 6p^7$	$q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 6p^7$
$q^2 + q^5 = p^2 + p^7$	$4q^3 + 3q^4 - 2q^5 = 6p^7$	$5q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 - 5q^6 = 10p^7$
$q^3 + q^4 = p^3 + p^7$	$4q^3 + 3q^4 - 2q^5 = 6p^7$	$10q^2 + 2q^3 + q^4 + 4q^5 - 10q^6 = 14p^7$
		$10q^2 - 2q^3 - 2q^4 + 6q^5 - 10q^6 = 8p^7$
		$5q^2 - q^3 - q^4 + 3q^5 - 5q^6 = 4p^7$

vnde concluditur

$$q^6 = +4p^7 - p^2 - p^3$$
$$q^5 = -10p^7 + 5p^2 + 2p^3$$
$$q^4 = +18p^7 - 10p^2$$
$$q^3 = -17p^7 + 10p^2 + p^3$$
$$q^2 = +11p^7 - 4p^2 - 2p^3.$$

Ordo $m + n = 8$

$q + q^7 = p + p^8$	$3q^2 - q^3 + 3q^4 - q^5 + 3q^6 - q^7 = 8p^8$
$q^2 + q^6 = p^2 + p^8$	$12q^2 - 2q^3 - 9q^4 - 4q^5 + 7q^6 - 12q^7 = 18p^8$
$q^3 + q^5 = p^3 + p^8$	$30q^2 \quad + 9q^4 - 6q^5 + 15q^6 - 30q^7 = 36p^8$
$2q^4 = p^4 + p^8$	$40q^2 \quad + 4q^4 - 8q^5 + 20q^6 - 40q^7 = 42p^8$

$$q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 = 7p^8$$
$$6q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6 - 6q^7 = 15p^8$$
$$15q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5 + 5q^6 - 15q^7 = 25p^8$$
$$20q^2 \; * \; + 2q^4 - 4q^5 + 10q^6 - 20q^7 = 21p^8$$
$$5q^2 - 5q^3 + 6q^4 - 7q^5 + 10q^6 - 15q^7 = 13p^8$$
$$q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 = \tfrac{1}{2}p^8$$

hinc

hinc reperitur

$$q^7 = \tfrac{9}{2}p^8 - p^2 - p^3 - \tfrac{1}{2}p^8$$
$$q^7 = -\tfrac{9}{2}p^8 + 3p^2 - p^3 + \tfrac{1}{2}p^4$$
$$q^7 = p^2 - p^3 + \tfrac{1}{2}p^4$$

reliquae aequationes omnes coaleſcunt in hanc vnicam:

$$4q^5 + 10q^6 = 20p^8 - 9p^4 \text{ ob } 7p^8 = 6p^4$$

neque ergo haec tertia methodus plenam determinationem ſuppeditat, cum tamen pro caſibus $m+n=5$ et $m+n=7$ eſſet largita.

Ordo $m+n=9$.

Hic ope tertiae methodi omnia determinentur idque vnico modo; vti ſequitur

$$q^8 = +5p^9 - p^2 - p^3 - p^4$$
$$q^7 = -\tfrac{35}{2}p^9 + 7p^2 + 2p^3 + 4p^4$$
$$q^6 = +\tfrac{85}{2}p^9 - 21p^2 \quad * \quad -6p^4$$
$$q^5 = -\tfrac{125}{2}p^9 + 35p^2 \quad * \quad +5p^4$$
$$q^4 = +\tfrac{127}{2}p^9 - 35p^2 \quad * \quad -4p^4$$
$$q^3 = -\tfrac{83}{2}p^9 + 21p^2 + p^3 + 6p^4$$
$$q^2 = +\tfrac{37}{2}p^9 - 6p^2 - 2p^3 - 4p^4$$

praetermiſſo ordine decimo obſeruo etiam vndecimum perfecte determinari poſſe; calculo enim ſubducto reperitur

$$q^{10} = 6p^{11} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5$$
$$q^9 = -27p^{11} + 9p^2 + 2p^3 + 6p^4 + 4p^5$$
$$q^8 = +83p^{11} - 36p^2 \quad * \quad -15p^4 - 6p^5$$
$$q^7 = -\tfrac{329}{2}p^{11} + 84p^2 \quad * \quad +21p^4 + 4p^5$$

$q^6 =$

$$q^6 = +\tfrac{463}{2}p^{11} - 126p^2 \;*\; -21p^4$$
$$q^5 = -\tfrac{461}{2}p^{11} + 126p^2 \;*\; +21p^4 + p^5$$
$$q^4 = +\tfrac{331}{2}p^{11} - 84p^2 \;*\; -20p^4 - 4p^5$$
$$q^3 = -82p^{11} + 36p^2 + p^3 + 15p^4 + 6p^5$$
$$q^2 = +28p^{11} - 8p^2 - 2p^3 - 6p^4 - 4p^5.$$

31. Si has aequationes attentius contemplemur, in coefficientibus primi termini p^{11} haud difficulter ſequentem ordinem deprehendimus;

$m+n=11$	$m+n=9$	$m+n=7$	$m+n=5$
$6=\frac{11+1}{2}$	$5=\frac{9+1}{2}$	$4=\frac{7+1}{2}$	$3=\frac{5+1}{2}$
$2.27=10.6-6$	$2.\frac{35}{2}=8.5-5$	$2.10=6.4-4$	$2.\frac{9}{2}=4.3-3$
$3.83=9.27+6$	$3.\frac{85}{2}=7.\frac{35}{2}+5$	$3.18=5.10+4$	$3.\frac{11}{2}=3.\frac{9}{2}+3$
$4.\frac{329}{2}=8.83-6$	$4.\frac{125}{2}=6.\frac{85}{2}-5$	$4.17=4.18-4$	$4.2=2.\frac{11}{2}-3$
$5.\frac{463}{2}=7.\frac{329}{2}+6$	$5.\frac{127}{2}=5.\frac{125}{2}+5$	$5.11=3.17+4$	eſt enim
$6.\frac{461}{2}=6.\frac{463}{2}-6$	$6.\frac{83}{2}=4.\frac{127}{2}-5$	$6.3=2.11-4$	$q=2p^5+p+p^2$
$7.\frac{331}{2}=5.\frac{461}{2}+6$	$7.\frac{37}{2}=3.\frac{83}{2}+5$	eſt enim $q=-3p^7+p+p^2+p^3$	
$8.82=4.\frac{331}{2}-6$	$8.4=2.\frac{37}{2}-5$		
$9.28=3.82+6$	eſt enim $q=-4p^9+p+p^2+p^3+p^4$		
$10.5=2.28-6$			
eſt enim $q=-5p+p+p^2+p^3+p^4+p^5$			

32. Tentemus hinc aequationes pro ordine $m+n=13$ eruere, quandoquidem ſimul lex progreſſionis pro altioribus ordinibus imparibus perſpicua redditur:

$$
\begin{array}{l}
q^{12} = +Ap^{13} - \quad p^2 - p^3 - \quad p^4 - p^5 - p^6 \\
q^{11} = -Bp^{13} + \quad 11p^2 + 2p^3 + \quad 8p^4 + 4p^5 + \beta p^6 \\
q^{10} = +Cp^{13} - \quad 55p^2 \ * \ - \quad 28p^4 - 6p^5 - \gamma p^6 \\
q^9 = -Dp^{13} + 165p^2 \ * \ + (56+1)p^4 + 4p^5 + \delta p^6 \\
q^8 = +Ep^{13} - 330p^2 \ * \ - (70+8)p^4 \ * \ - \varepsilon p^6 \\
q^7 = -Fp^{13} + 462p^2 \ * \ + (56+28)p^4 \ * \ + \zeta p^6 \\
q^6 = +Gp^{13} - 462p^2 \ * \ - (28+56)p^4 \ * \ - \eta p^6 \\
q^5 = -Hp^{13} + 330p^2 \ * \ + (8+70)p^4 + p^5 + \theta p^6 \\
q^4 = +Ip^{13} - 165p^2 \ * \ - \quad 56p^4 - 4p^5 - \iota p^6 \\
q^3 = -Kp^{13} + \quad 55p^2 + p^3 + \quad 28p^4 + 6p^5 + \varkappa p^6 \\
q^2 = +Lp^{13} - (11-1)p^2 - 2p^3 - \quad 8p^4 - 4p^5 - \lambda p^6
\end{array}
$$

pro incognitis eſt

$$
\begin{array}{lll}
A = \frac{13+1}{2}; & A = 7 & \lambda = \beta \\
2B = 12A - 7; & B = \frac{77}{2} & \varkappa = \gamma \\
3C = 11B + 7; & C = \frac{287}{2} & \iota = \delta \\
4D = 10C - 7; & D = 357 & \theta = \varepsilon \\
5E = 9D + 7; & E = 644 & \eta = \zeta - 1 \\
6F = 8E - 7; & F = \frac{1715}{2} & \text{videturque eſſe} \\
7G = 7F + 7; & G = \frac{1717}{2} & \beta = 6; \quad \lambda = 6 \\
8H = 6G - 7; & H = 643 & \gamma = 15; \quad \varkappa = 15 \\
9I = 5H + 7; & I = 358 & \delta = 20; \quad \iota = 20 \\
10K = 4I - 7; & K = \frac{285}{2} & \varepsilon = 15; \quad \theta = 15 \\
11L = 3K + 7; & L = \frac{79}{2} & \zeta = 6+1; \quad \eta = 6.
\end{array}
$$

33. Quo ordo harum aequationum clarius perſpiciatur, atque anomaliae hic occurentes euaneſcant, ſecundum ſingulas ordines impares iſtas aequationes ita repraeſentemus:

Ordo

Ordo $m + n = 3$

$q^2 = A p^3$	$A = \frac{3+1}{2} = 2$
$q = - B p^3 + p$	$2 B = 2 A - 2$

Ordo $m + n = 5$

$q^4 = + A p^5 - p^2$	$A = \frac{5+1}{2} = 3$
$q^3 = - B p^5 + 3 p^2$	$2 B = 4 A - 3$
$q^2 = + C p^5 - 3 p^3 + p^2$	$3 C = 3 B + 3$
$q = - D p^5 + p^2 + p$	$4 D = 2 B - 3$

Ordo $m + n = 7$

$q^6 = + A p^7 - p^2 - p^3$	$A = \frac{7+1}{2} = 4$
$q^5 = - B p^7 + 5 p^2 + 2 p^3$	$2 B = 6 A - 4$
$q = + C p^7 - 10 p^2 \;*$	$3 C = 5 B + 4$
$q^3 = - D p^7 + 10 p^2 \;* \;\; + p^3$	$4 D = 4 C - 4$
$q^2 = + E p^7 - 5 p^2 - 2 p^3 + p^2$	$5 E = 3 D + 4$
$q = - F p^7 + p^2 + p^3 + p$	$6 F = 2 E - 4$

Ordo $m + n = 9$

$q^8 = + A p^9 - p^2 - p^3 \;\; - p^4$	$A = \frac{9+1}{2} = 5$
$q^7 = - B p^9 + 7 p^2 + 2 p^3 \;\; + 4 p^4$	$2 B = 8 A - 5$
$q^6 = + C p^9 - 21 p^2 \;\; * \;\; - 6 p^4$	$3 C = 7 B + 5$
$q^5 = - D p^9 + 35 p^2 \;\; * \;\; + (4+1) p^4$	$4 D = 6 C - 5$
$q^4 = + E p^9 - 35 p^2 \;\; * \;\; - (1+4) p^4 + p^4$	$5 E = 5 D + 5$
$q^3 = - F p^9 + 21 p^2 \;\; * \;\; + \;\; 6 p^4 + p^3$	$6 F = 4 E - 5$
$q^2 = + G p^9 - 7 p^2 - 2 p^3 \;\; - \;\; 4 p^4 + p^2$	$7 G = 3 F + 5$
$q^2 = - H p^9 + p^2 + p^3 \;\; + \;\; p^4 + p$	$8 H = 2 G - 5$

Ordo $m + n = 11$

$q^{10} = +Ap^{11} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5$	$A = \frac{11+1}{2} = 6$
$q^9 = -Bp^{11} + 9p^2 + 2p^3 + 6p^4 + 4p^5$	$2B = 10A - 6$
$q^8 = +Cp^{11} - 36p^2 \; * \; - 15p^4 - 6p^5$	$3C = 9B + 6$
$q^7 = -Dp^{11} + 84p^2 \; * \; +(20+1)p^4 + 4p^5$	$4D = 8C - 6$
$q^6 = +Ep^{11} - 126p^2 \; * \; -(15+6)p^4 \; *$	$5E = 7D + 6$
$q^5 = -Fp^{11} + 126p^2 \; * \; +(6+15)p^4 \; * \; + p^5$	$6F = 6E - 6$
$q^4 = +Gp^{11} - 84p^2 \; * \; -(1+20)p^4 - 4p^5 + p^4$	$7G = 5F + 6$
$q^3 = -Hp^{11} + 36p^2 \; * \; + 15p^4 + 6p^5 + p^3$	$8H = 4G - 6$
$q^2 = +Ip^{11} - 9p^2 - 2p^3 - 6p^4 - 4p^5 + p^2$	$9I = 3H + 6$
$q = -Kp^{11} + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p$	$10K = 2I - 6$

Ordo $m + n = 13$

$q^{12} = +Ap^{13} - p^2 - p^3 - p^4 - p^5 - p^6$	$A = \frac{13+1}{2} = 7$
$q^{11} = -Bp^{13} + 11p^2 + 2p^3 + 8p^4 + 4p^5 + 6p^6$	$2B = 12A - 7$
$q^{10} = +Cp^{13} - 55p^2 \; * \; - 28p^4 - 6p^5 - 15p^6$	$3C = 11B + 7$
$q^9 = -Dp^{13} + 165p^2 \; * \; +(56+1)p^4 + 4p^5 + 20p^6$	$4D = 10C - 7$
$q^8 = +Ep^{13} - 330p^4 \; * \; -(70+8)p^4 \; * \; - 15p^6$	$5E = 9D + 7$
$q^7 = -Fp^{13} + 462p^2 \; * \; +(56+28)p^4 \; * \; +(6+1)p^6$	$6F = 8E - 7$
$q^6 = +Gp^{13} - 462p^2 \; * \; -(28+56)p^4 \; * \; -(1+6)p^6 + p^6$	$7G = 7F + 7$
$q^5 = -Hp^{13} + 330p^2 \; * \; +(8+76)p^4 \; * \; + 15p^6 + p^5$	$8H = 6G - 7$
$q^4 = +Ip^{13} - 165p^2 \; * \; -(1+56)p^4 - 4p^5 - 20p^6 + p^4$	$9I = 5H + 7$
$q^3 = -Kp^{13} + 55p^2 \; * \; + 28p^4 + 6p^5 + 15p^6 + p^3$	$10K = 4I - 7$
$q^2 = +Lp^{13} + 11p^2 - 2p^3 - 8p^4 - 4p^5 - 6p^6 + p^2$	$11L = 3K + 7$
$q = -Mp^{13} + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + p$	$12M = 2L - 7$

34. Hic coëfficientes ipſius p^7 a lege ſequentium ordine parum recedere videntur, cum ii in ordine $m + n = 13$ ex binomii ad dignitatem 11 elevati coëfficientibus formentur, dum ſequentes ex digni-

dignitatibus 8, 6 formantur. At iidem illa coefficiente hoc modo repraeſentari poſſunt, vt cum ſequentium lege cohaereant:

$$-1+(10+1)-(45+10)+(120+45)-(210+120) \text{ etc.}$$

hac ergo ratione aequationes ordinis $m+n=15$ exhibebo.

Ordo $m+n=15$

$$\begin{array}{llllll}
q^{14}=+Ap^{15}-p^2 & -p^3-p^4 & & -p^5- & p^6-p^7 & \\
q^{13}=-Bp^{15}+(12+1)p^2 & +2p^3+ & 10p^4 & +4p^5+ & 8p^6+6p^7 & \\
q^{12}=+Cp^{15}-(66+12)p^2 & * & -45p^4 & -6p^5- & 28p^6-15p^7 & \\
q^{11}=-Dp^{15}+(220+66)p^2 & * & +(120+1)p^4 & +4p^5+ & 56p^6+20p^7 & \\
q^{10}=+Ep^{15}-(495+220)p^2 & * & -(210+10)p^4 & *- & 70p^6-15p^7 & \\
q^{9}=-Fp^{15}+(792+495)p^2 & * & +(252+45)p^4 & * & +(56+1)p^6+6p^7 & \\
q^{8}=+Gp^{15}-(924+792)p^2 & * & -(210+120)p^4 & * & -(28+8)p^6 & * \\
q^{7}=-Hp^{15}+(792+924)p^2 & * & +(120+210)p^4 & * & +(8+28)p^6 & *+p^7 \\
q^{6}=+Ip^{15}-(495+792)p^2 & * & -(45+252)p^4 & * & -(1+56)p^6-6p^7 & +p^8 \\
q^{5}=-Kp^{15}+(220+495)p^2 & * & +(10+210)p^4 & *+ & 70p^6+15p^7 & +p^8 \\
q^{4}=+Lp^{15}-(66+220)p^2 & * & -(1+120)p^4 & -4p^5- & 56p^6-20p^7 & +p^8 \\
q^{3}=-Mp^{15}+(12+66)p^2 & *+ & 45p^4 & +6p^5+ & 28p^6+15p^7 & +p^8 \\
q^{2}=+Np^{15}-(1+12)p^2 & -2p^3- & 10p^4 & -4p^5- & 8p^6-6p^7 & -p^8 \\
q=-Op^{15}+ & p^2+p^3+ & p^4 & +p^5+ & p^6+p^7 & +p
\end{array}$$

Atque nunc lex progreſſionis non nimis eſt complexa, eamque facile ad altiores ordines accommodare licet.

35. Cum autem haec lex, quatenus inductioni innititur, minus certa videri poſſet, omnia plane dubia tollentur, ſi loco poteſtatum parium ipſius p impares introducantur. Cum ſcilicet pro ordine vndecimo

decimo poteſtatibus p^2, p^4, aequiualeant impares p^3, et p^7. Deinde etiam coefficientes A, B, C, D etc. multo ſimpliciori lege exhiberi poſſunt, quae immediate ex coefficientibus binomii ad eandem dignitatem, cuius ordinis iſtae aequationes quaeruntur, eleuati, fluit, hoc modo:

Ordo $m + n = 11$

p^{11}	p^1	p^3	p^5	p^7	p^9	
$q^{10} = \frac{1}{2}(1+11)$	-1	-1	-1	-1	-1	$+p = p^{10}$
$q^9 = \frac{1}{2}(1-55)$	*	$+2$	$+4$	$+6$	$+8+1$	
$q^8 = \frac{1}{2})1+165)$	*	-1	-6	-15	$-28-8$	$+p^3 = p^8$
$q^7 = \frac{1}{2}(1-330)$	*	*	$+4$	$+20+1$	$+56+28$	
$q^6 = \frac{1}{2}(1+462)$	*	*	-1	$-15-6$	$-70-56$	$+p^5 = p^6$
$q^5 = \frac{1}{2}(1-462)$	*	*	$+1$	$+6+15$	$+56+70$	
$q^4 = \frac{1}{2}(1+330)$	*	*	-4	$-1-20$	$-28-56$	$+p^7 = p^4$
$q^3 = \frac{1}{2}(1-165)$	*	$+1$	$+6$	$+15$	$+8+28$	
$q^2 = \frac{1}{2}(1+55)$	*	-2	-4	-6	$-1-8$	$+p^9 = p^2$
$q^1 = \frac{1}{2}(1-11)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	

In qualibet ſcilicet columna verticali coefficientes binomii ad dignitatem vnitate inferiorem eleuati tum a ſummo deorſum quum ad imo ſurſum ſcribuntur, et vbi bini concurrunt in vnam ſummam colliguntur.

36. Hinc iam licebit pro omnibus ordinibus imparibus rem in genere definire; at quoniam hic coefficientes binomii poteſtatum occurrunt, vt breuitati conſulamus, ſcribamus

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots\nu} = n(\nu);$$

vt

vt ſit

$$n(0) = 1;\ n(1) = n;\ n(2) = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2};\ n(3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{etc.}$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, ſi ν fuerit maior quam n, eſſe ſemper $n(\nu) = 0$, at ſi $\nu = n$ fore $n(n) = 1$ et generatim: $n(\nu) = n(n-\nu)$. Hac igitur notandi ratione recepta aequationes generales ita ſe habebunt

Ordo $m + n = \lambda$

$$q^{\lambda-1} = p^{\lambda-1} + \tfrac{1}{2}(1+\lambda(1))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}+0(0)\\+0(\lambda-2)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}+2(0)\\+2(\lambda-2)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}+4(0)\\+4(\lambda-2)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}+6(0)\\+6(\lambda-2)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

$$q^{\lambda-2} = \ast \ + \tfrac{1}{2}(1-\lambda(2))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}-0(1)\\-0(\lambda-3)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}-2(1)\\-2(\lambda-3)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}-4(1)\\-4(\lambda-3)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}-6(1)\\-6(\lambda-3)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

$$q^{\lambda-3} = p^{\lambda-3} + \tfrac{1}{2}(1+\lambda(3))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}+0(2)\\+0(\lambda-4)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}+2(2)\\+2(\lambda-4)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}+4(2)\\+4(\lambda-4)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}+6(2)\\+6(\lambda-4)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

$$q^{\lambda-4} = \ast \ + \tfrac{1}{2}(1-\lambda(4))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}-0(3)\\-0(\lambda-5)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}-2(3)\\-2(\lambda-5)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}-4(3)\\-4(\lambda-5)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}-6(3)\\-6(\lambda-5)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

$$q^{\lambda-5} = p^{\lambda-5} + \tfrac{1}{2}(1+\lambda(5))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}+0(4)\\+0(\lambda-6)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}+2(4)\\+2(\lambda-6)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}+4(4)\\+4(\lambda-6)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}+6(4)\\+6(\lambda-6)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

vnde concludimus fore in genere

I. Si ν ſit numerus impar

$$q^{\lambda-\nu} = p^{\lambda-\nu} + \tfrac{1}{2}(1+\lambda(\nu))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}+0(\nu-1)\\+0(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}+2(\nu-1)\\+2(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}+4(\nu-1)\\+4(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}+6(\nu-1)\\+6(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

II. ſi ν ſit numerus par

$$q^{\lambda-\nu} = \ast \ + \tfrac{1}{2}(1-\lambda(\nu))p^{\lambda}\left.\begin{matrix}-0(\nu-1)\\-0(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}-2(\nu-1)\\-2(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{3} \left.\begin{matrix}-4(\nu-1)\\-4(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{5} \left.\begin{matrix}-6(\nu-1)\\-6(\lambda-\nu-1)\end{matrix}\right\} p^{7}\ \text{etc.}$$

Termini autem harum aequationum non vltra formulam $p^{\lambda-2}$, quae vltimum praebet terminum, continuari debent.

§ 7. Hae autem ſummationes locum non habent, niſi exponens ordinis $m+n=\lambda$ fuerit numerus impar: ideoque harum aequationum ope ſummas omnium ſerierum in hac forma contentarum

$$q^{m}=1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right) \text{ etc.}$$

exhibere licet, ſi modo $m+n=\lambda$ ſit numerus impar. Iſtae autem ſummae definiuntur per ſummas poteſtatum reciprocarum, quas littera p ſequenti modo repraeſento vt ſit

$$p^\lambda=1+\frac{1}{2^\lambda}+\frac{1}{3^\lambda}+\frac{1}{4^\lambda}+\frac{1}{5^\lambda}+\text{etc. atque}$$

$$p^m p^n=\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\text{etc.}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}\right)$$

Duos autem hic caſus diſtingui oportet, prout m fuerit numerus vel par vel impar; habebitur enim

I. Caſu quo m eſt numerus par

$$q^m=p^m+\tfrac{1}{2}(1+\lambda(n))p^\lambda \left.\begin{matrix}+0(n-1)\\+0(m-1)\end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix}+2(n-1)\\+2(m-1)\end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix}+4(n-1)\\+4(m-1)\end{matrix}\right\} p^5$$

$$\left.\begin{matrix}+6(n-1)\\+6(m-1)\end{matrix}\right\} p^7 \cdots\cdots \left.\begin{matrix}+(\lambda-3)(n-1)\\+(\lambda-3)(m-1)\end{matrix}\right\} p^{\lambda-2}$$

II.

II. Caſu quo m eſt numerus impar

$$q^m = * + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)(n) p^{\lambda} \left.\begin{matrix} -0(n-1) \\ -0(m-1) \end{matrix}\right\} p \left.\begin{matrix} -2(n-1) \\ -2(m-1) \end{matrix}\right\} p^3 \left.\begin{matrix} -4(n-1) \\ -4(m-1) \end{matrix}\right\} p^5$$

$$\left.\begin{matrix} -6(n-1) \\ -6(m-1) \end{matrix}\right\} p^7 \ldots\ldots \left.\begin{matrix} -(\lambda-3)(n-1) \\ -(\lambda-3)(m-1) \end{matrix}\right\} p^{\lambda-2}$$

Secundum hanc legem terminus vltimum ſequens fieret $\left.\begin{matrix} (\lambda-1)(n-1) \\ (\lambda-1)(m-1) \end{matrix}\right\} p^{\lambda}$, vbi notetur ſemper eſſe $(\lambda-1)(n-1) + (\lambda-1)(m-1) = \lambda(n) = \lambda(m)$.

38. At ſi ordinis exponens $m + n = \lambda$ fuerit numerus par, hae formulae neutiquam locum habere poſſunt, cum caſu imparitatis formae p, p^3, p^5, p^7 etc. ob $p^m = p^n$ etiam has pares p^2, p^4, p^6 etc in ſe complectantur, quod autem caſu quo $m + n$ eſt numerus par, non euenit. Tres autem methodi hic vſitatae ſummis ordinum parium definiendis non ſufficiunt, cum etiam tertia pro ordine octauo non omnes determinationes ſuppeditet. Etſi autem pro ordinibus quarto et ſexto ſummae ſupra ſunt aſſignatae, in iis tamen nulla lex perſpicitur, vnde pro ordinibus ſequentibus coniecturam deducere liceret. Ratio huius diſcriminis manifeſto in eo eſt ſita, quod pro ordinibus paribus, binae quaeuis harum formularum $p^{\lambda}, p^2, p^4, p^6$ etc. inter ſe comparari queant, haeque comparationes per methodos noſtras indicentur; quocirca eae determinationes, quibus indigemus, deficere ſunt cenſendae. Eo magis igitur eſt mirandum, quod in ordinibus imparibus

 nulla

nulla plane ratio aſſignalibis inter formulas p^λ, p^2, p^3 p^4 etc. inicrcedat. Interim tamen nullum eſt dubium, quin aliae dentur methodi, quibus ſeries ordinum parium ſummari queant, etiamſi tres hic expoſitae minime ſufficiant.

PHYSICO-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

FORMVLAE GENERALES PRO TRANSLATIONE QVACVNQVE CORPORVM RIGIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quando corporis cuiusque rigidi motum determinari oportet, tota inueſtigatio commode in duas partes diſtinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte ſola translatio corporis ex dato ſitu in alium quemcunque ſine vllo reſpectu habito ad motus principia per formulas analyticas repraeſentari debet, quarum ope poſitio ſingulorum punctorum poſt translationem ex earum poſitione initiali definiri queat; quae ergo inueſtigatio vnice ad Geometriam vel potius ad Stereometriam eſt referenda. Facile autem intelligitur, ſi iſta inueſtigatio ab altera, quae proprie ad Mechanicam pertinet, ſeparetur, tum ipſam motus determinationem ex principiis motus multo facilius expediri poſſe, quam ſi vtraque inueſtigatio coniunctim ſuſcipiatur. Cum igitur in tractatu meo de motu corporum rigidorum hanc vtramque inueſti-

gationem ſimul ſuſcepiſſem, vnde tota tractatio non parum moleſta et intricata eſt reddita: hoc loco ſolam partem geometricam accuratius euoluere conſtitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri poſſit.

§. 2. Vt igitur primo ſitum initialem corporis rigidi accurate definiam, poſitionem ſingulorum eius punctorum more ſolito per ternas coordinatas inter ſe normales repraeſentari conueniet. Hunc in finem conſtituo ternos axes fixos IA, IB et IC ſe inuicem in puncto I normaliter ſecantes, quorum bini IA et IB in ipſo plano tabulae ſint ſiti, tertius vero IC hinc plano perpendiculariter inſiſtat. Nunc conſidero punctum corporis quodcunque Z, ex quo ad planum AIB demittatur perpendiculum ZS; tum vero ex puncto S ad axes IA et IB ducantur normales SP et SQ, ac vocemus coordinatas $IP = QS = p$, $PS = IQ = q$ et ipſum perpendiculum $SZ = r$, cui in axe IC aequalis capiatur portio $IR = r$; ita vt punctum Z reperiatur in diagonali IZ parallelepipedi rectanguli, quod ex lateribus IP, IQ et IR formatur. Hoc igitur modo poſitio ſingulorum corporis punctorum commodiſſime per ternas coordinatas p, q, r, determinabitur.

Tab. II. Fig. 1.

§. 3. Quo autem deinceps facilius iſta repraeſentatio ad inueſtigationem mechanicam accommodari poſſit, punctum I aptiſſime accipitur in ipſo centro grauitatis ſeu potius inertiae corporis rigidi propo-

propoſiti; ſic enim iſtud inſigne commodum impetramus, vt poſita maſſula corporis in Z exiſtentis $= dM$, per totam corporis extenſionem fiat

$$1^\circ. \int p\,dM = 0. \quad 2^\circ. \int q\,dM = 0. \quad 3^\circ. \int r\,dM = 0$$

ſiquidem haec integralia per totum corpus extendantur. Praeterea vero maximam vtilitatem afferet, ſi terni axes I A, I B, I C in ipſis axibus corporis principalibus conſtituantur; tum enim etiam valores trium ſequentium formularum integralium pariter per totum corpus extenſi nihilo aequales reddentur, quippe quae ſunt

$$4^\circ. \int pq\,dM = 0. \quad 5^\circ. \int pr\,dM = 0. \quad 6^\circ. \int qr\,dM = 0$$

haecque tantum hic in tranſitu notaſſe iuuabit, quandoquidem pars geometrica ab iſtis aequationibus neutiquam pendet.

§. 4. Iam facta quacunque corporis translatione conſideremus primo locum i, in quem punctum corporis I fuerit translatum, pro quo vocemus coordinatas $If = f$, $fg = g$ et $gi = h$; tum vero punctum Z ex ſitu initiali translatum ſit in z, pro quo ſtatuamus coordinatas $Ix = x$, $xy = y$ et $yz = z$, ac primo quidem ſtatim manifeſtum eſt, diſtantiam iz etiamnunc aequalem eſſe debere diſtantiae I Z, qua, cum eſſet $\sqrt{pp + qq + rr}$, nunc vero ſit

$$iz = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}$$

habebimus hanc aequationem:

$$pp + qq + rr = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2.$$

Praeterea vero neceſſe eſt, vt diſtantiae inter bina corpo-

corporis puncta quaecunque in ſitu translato etiamnunc aequales ſint diſtantiis eorundem punctorum in ſitu initiali, cui conditioni ſequenti modo ſatisfaciemus.

§. 5. Sumamus punctum z in eo loco, in quem punctum P ex ſtatu initiali fuerit translatum: hic enim non conſultum videtur figuram noſtram tot nouis lineis ducendis onerare. Deinde etiam in ipſo ſtatu initiali punctum Z vbicunque libuerit accipi poteſt; vnde ſi punctum Z in puncto P accipiatur, etiam punctum z in ſitu translato locum ipſi P reſpondentem exhibebit.

§. 6. Cum igitur punctum Z in punctum P incidat, ſi fiat $q = 0$ et $r = 0$, quoniam in genere ternas coordinatas x, y, z tanquam certas functiones ipſarum p, q et r conſiderare licet, quomodocunque hae functiones fuerint comparatae, ſi in iis faciamus $q = 0$ et $r = 0$ hae coordinatae neceſſario tales formas accipere debebunt,

$$x = f + Fp, \; y = g + Gp, \; z = h + Hp.$$

Quia enim ponimus $q = 0$ et $r = 0$ ſpectata p vt variabili, coordinatae x, y, z oſtendere debent ſitum in quem linea recta IP fuerit translata; quae cum ſit recta, ea in ſitu translato erit linea recta ipſi aequalis, ideoque coordinatae x y, z poſitionem huius lineae rectae iz exprimere debent, vnde, cum ſumto $p = 0$ etiam punctum z in i incidere debeat, euidens eſt, quantitates x, y, z ita per variabilem p definiri debere, vt poſito $p = 0$ fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$. Tum vero quia aequatio debet eſſe pro

linea

linea recta, aliae formae locum habere nequeunt, niſi quas ſtatuimus: ſcilicet

$$x = f + Fp,\ y = g + Gp,\ z = h + Hp$$

vbi litterae F, G, H certas deſignant conſtantes ab indole translationis pendentes.

§. 7. Statim autem manifeſtum eſt, iſtas conſtantes ita comparatas eſſe debere, vt interuallum iz aequale ſit interuallo $IP = p$, vnde ſequitur iſta determinatio:

$$iz^2 = F^2p^2 + G^2p^2 + H^2p^2 = pp$$

quam ob rem neceſſe eſt vt ſit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$. Quod ſi ergo ſumamus $F = \text{ſin.}\,\zeta$, fieri debet $G^2 + H^2 = \text{coſ.}\,\zeta^2$; hanc ob rem ſtatuamus

$G = \text{coſ.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,\eta$ et $H = \text{coſ.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,\eta$, ita vt ſit

$F = \text{ſin.}\,\zeta$, $G\ \text{coſ.}\,\zeta\ \text{ſin.}\,\eta$ et $H = \text{coſ.}\,\zeta\ \text{coſ.}\,\eta$.

Hoc ergo modo tres litterae illae F, G, H ad duos tantum angulos ζ et η ſunt reductae.

§. 8. Simili modo ſumamus nunc punctum z in eo loco, in quem punctum Q ex ſitu initiali fuerit translatum; at vero punctum Z in punctum Q cadit ſumendo $p = 0$ et $r = 0$. Hoc ergo caſu ternae coordinatae x, y, z ita pendebunt a ſola variabili q, vt facto $q = 0$ iterum fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$; quamobrem, cum aequatio etiam debeat eſſe pro linea recta, coordinatae talem formam habebunt:

$$x = f + F'q,\ y = g + G'q,\ z = h + H'q$$

vbi ergo ob $iz = q$ etiam eſſe oportet

$$F'F' + G'G' + H'H' = 1$$

 cui

cui conditioni commode per binos angulos ζ' et η' ita ſatisfiet, vt ſit

$$F' = \sin.\zeta',\ G' = \cos.\zeta' \sin.\eta',\ H' = \cos.\zeta' \cos.\eta'.$$

§. 9. Sumamus nunc punctum Z in R, quod euenit ſtatuendo $p = 0$ et $q = 0$, vnde ſi iam punctum z exhibeat locum, in quem punctum R erit translatum, pro coordinatis eodem modo quo ante adipiſcemur tales formas:

$$x = f + F'' r,\ y = g + G'' r,\ z = h + H'' r.$$

Et quia eſſe oportet

$$F'' F'' + G'' G'' + H'' H'' = 1$$

per binos nouos angulos ζ'' et η'' ſtatuere poterimus

$$F'' = \sin.\zeta'',\ G'' = \cos.\zeta'' \sin.\eta''\ \text{et}\ H'' = \cos.\zeta'' \cos.\eta''.$$

§. 10. Quoniam igitur coordinatarum x, y et z valores nacti ſumus, quos inducere debent tribus caſibus euolutis, vbi trium quantitatum p, q, r duae euaneſcebant, perſpicuum hinc eſt, quomodo coorditae x, y, z a ſingulis quantitatibus p, q, r pendent. Quamobrem, ſi omnes iſtae litterae ſimul in computum ingrediantur, ita vt iis punctum corporis quodcunque Z indicetur, cui in ſitu tranſlato reſpondeat punctum z, coordinatae x, y, z ſequentes habere debebunt valores:

$$x = f + F p + F' q + F'' r$$
$$y = g + G p + G' q + G'' r$$
$$z = h + H p + H' q + H'' r$$

has autem nouem litteras vidimus reduci ad ſex angulos ζ, η, ζ' η', ζ'', η''.

§. 11.

§. 11. Sumamus nunc punctum Z in ipſo puncto s ita vt ſit $r = 0$, ac ſi in ſitu translato iſti puncto reſpondeat punctum z, poſito $r = 0$ ternae coordinatae ita ſe habebunt:

$$x = f + Fp + F'q,\; y = g + Gp + G'q,\; z = h + Hp + H'q.$$

Vbi neceſſe eſt, vt fiat diſtantia iz diſtantiae IS aequalis, quae cum ſit $\sqrt{pp + qq}$, hinc naſcetur iſta aequatio:

$$pp + qq = (Fp + F'q)^2 + (Gp + G'q)^2 + (Hp + H'q)^2$$

et facta euolutione fiet

$$pp + qq = pp(FF + GG + HH) + qq(F'F' + G'G' + H'H') + 2pq(FF' + GG' + HH').$$

Cum igitur ſit

$$FF + GG + HH = 1 \text{ et } F'F' + G'G' + H'H' = 1$$

ſupereſt, vt euadat $FF' + GG' + HH' = 0$.

§. 12. Eodem modo patebit, ſi ſumamus $q = 0$, tum iſtam proprietatem locum habere debere, vt ſit $FF'' + GG'' + HH'' = 0$: at ſi ſtatuamus $p = 0$, inde reſultabit iſta aequatio $F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$. Quibus tribus conditionibus cum fuerit ſatisfactum, tota translatio erit determinata; ac noſtrae formulae pro omnibus corporis punctis easdem exhibebunt diſtantias in ſitu translato, quas tenuerunt in ſitu initiali.

§. 13. Subſtituamus nunc in his aequationibus valores ante inuentos, ac prima

$FF' + GG' + HH' = 0$ dabit

$$\sin.\zeta \sin.\zeta' + \cos.\zeta \cos.\zeta' \sin.\eta \sin.\eta' + \cos.\zeta \cos.\zeta' \cos.\eta \cos.\eta' = 0 \text{ ſiue}$$

$$\sin.\zeta \sin.\zeta' + \cos.\zeta \cos.\zeta' \cos.(\eta - \eta') = 0 \text{ ob } \cos.\eta \cos.\eta' + \sin.\eta \sin.\eta' = \cos.(\eta - \eta')$$

quae aequatio per $\mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta\,\mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta'$ diuiſa praebet

$$\mathrm{tang.}\,\zeta\;\mathrm{tang.}\,\zeta' = -\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta - \eta').$$

Eodem modo binae reliquae aequationes dabunt

$$\mathrm{tang.}\,\zeta'\,\mathrm{tang.}\,\zeta'' = -\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta' - \eta'') \text{ et } \mathrm{tang.}\,\zeta''\,\mathrm{tang.}\,\zeta = -\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta'' - \eta).$$

Ex his igitur tribus aequationibus ternos angulos ζ, ζ' et ζ'' determinare licebit, ita vt omnia per ternos angulos η, η', η'' definiri queant.

§ 14. Quod quo facilius fieri poſſit, multiplicemus has tres aequationes in ſe inuicem, vt fiat

$$\mathrm{tang.}\,\zeta^2\,\mathrm{tang.}\,\zeta'^2\,\mathrm{tang.}\,\zeta''^2 = -\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta - \eta')\,\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta' - \eta'')\,\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta'' - \eta).$$

Vnde ſtatim patet, niſi productum horum trium coſinuum fuerit negatiuum, caſum eſſe impoſſibilem; quocirca ante omnia neceſſe eſt, vt horum coſinuum vel vnus vel omnes tres ſint negatiui. Statuamus igitur breuitatis gr.

$$\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta - \eta')\,\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta' - \eta'')\,\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta'' - \eta) = -\Delta\Delta,$$

vt nanciſcamur $\mathrm{tang.}\,\zeta\;\mathrm{tang.}\,\zeta'\;\mathrm{tang.}\,\zeta'' = \Delta$, quae aequatio per ſingulas praecedentes diuiſa nobis ſuppeditat hos valores:

$$\mathrm{tang.}\,\zeta'' = \frac{-\Delta}{\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta - \eta')};\quad \mathrm{tang.}\,\zeta = \frac{-\Delta}{\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta' - \eta'')};\quad \mathrm{tang.}\,\zeta' = \frac{-\Delta}{\mathrm{co\text{ſ}.}\,(\eta'' - \eta)}$$

hoc igitur modo omnes nouem coefficientes initio aſſumti F, G, H, F', G', H', F'', G'', H'', per ſolos ternos angulos η, η', η'' determinantur hoc modo:

$$F = \mathrm{\text{ſ}in.}\,\zeta,\quad G = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta\;\mathrm{\text{ſ}in.}\,\eta,\quad H = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta\;\mathrm{co\text{ſ}.}\,\eta$$
$$F' = \mathrm{\text{ſ}in.}\,\zeta',\quad G' = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta'\;\mathrm{\text{ſ}in.}\,\zeta',\quad H' = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta'\;\mathrm{co\text{ſ}.}\,\eta'$$
$$F'' = \mathrm{\text{ſ}in.}\,\zeta'',\quad G'' = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta''\;\mathrm{\text{ſ}in.}\,\eta'',\quad H'' = \mathrm{co\text{ſ}.}\,\zeta''\;\mathrm{co\text{ſ}.}\,\eta''.$$

§. 15 Omnes igitur translationes, quibus ſitus corporis rigidi mutari poteſt, per ſex elementa deter-

determinari poſſint. Primo enim ternae coordinatae f, g, h determinant translationem puncti I in i, quae ergo penitus a noſtro arbitrio pendeat. Deinde, quomodocunque corpus circa hoc punctum i fuerit interea conuerſum, eius ſitus per ternos angulos η, η', η'', penitus determinatur; ſumto enim in ſitu initiali elemento corporis quocunque Z, cuius poſitio per ternas coordinatas p, q, r, definitur, id in ſitu translato reperietur in puncto z, cuius poſitio per iſtas ternas coordinatas definietur:

$$x = f + \mathrm{F}p + \mathrm{F}'q + \mathrm{F}''r$$
$$y = g + \mathrm{G}p + \mathrm{G}'q + \mathrm{G}''r$$
$$z = h + \mathrm{H}p + \mathrm{H}'q + \mathrm{H}''r.$$

§. 16. Quo autem magis conuincamur, per has formulas omnia quae ad translationem pertineat perfecte determinari, totum negotium etiam ſequenti modo abſolui poteſt. Concipiamus in ſtatu initiali praeter punctum Z aliud quodcunque Z′, in figura quidem non expreſſum, cuius locus his coordinatis definiatur p', q', r'. Hoc autem punctum translatum ſit in z', cui reſpondeant coordinatae x', y', z', quarum ergo valores ita exprimentur

$$x' = f + \mathrm{F}p' + \mathrm{F}'q' + \mathrm{F}''r'$$
$$y' = g + \mathrm{G}p' + \mathrm{G}'q' + \mathrm{G}''r'$$
$$z' = h + \mathrm{H}p' + \mathrm{H}'q' + \mathrm{H}''r'.$$

Quibus poſitis natura corporum rigidorum poſtulat, vt interuallum in ſitu translato zz' aequale ſit interuallo ZZ′ in ſitu initiali, quandoquidem in his corporibus omnia interualla inter bina eorum pun-

ĉta quaecunque perpetuo eandem quantitatem ſeruare debent.

§. 17. Iam vero diſtantiae punctorum Z et Z′ in ſtatu initiali quadratum eſt

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2$$

in ſtatu autem tranſlato quadratum diſtantiae inter puncta z et z' eſt

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

quod ergo ex tribus ſequentibus quadratis componitur

$$\begin{aligned}&(F(p'-p)+F'(q'-q)+F''(r'-r))^2\\+&(G(p'-p)+G'(q'-q)+G''(r'-r))^2\\+&(H(p'-p)+H'(q'-q)+H''(r'-r))^2\end{aligned}$$

quorum ergo ſumma aequalis eſſe debet illi formulae

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2.$$

§. 18. Euolutis autem ternis illis quadratis ſequens expreſſio reſultabit

$$\begin{aligned}&(p'-p)^2(FF+GG+HH)\\+&(q'-q)^2(F'F'+G'G'+H'H')\\+&(r'-r)^2(F''F''+G''G''+H''H'')\\+&2(p'-p)(q'-q)(FF'+GG'+HH')\\+&2(p'-p)(r'-r)(FF''+GG''+HH'')\\+&2(q'-q)(r'-r)(F'F''+G'G''+H'H'')\end{aligned}$$

quamobrem, vt iſta expreſſio priori

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2$$

reddatur aequalis, quomodocunque coordinatae p, q,

r,

r, p', q', r', fuerint aſſumtae ſex ſequentibus conditionibus ſatisfieri oportet

I. $FF + GG + HH = 1$

II. $F'F' + G'G' + H'H' = 1$

III. $F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1$

IV. $FF' + GG' + HH' = 0$

V. $FF'' + GG'' + HH'' = 0$

VI. $F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0.$

§. 19. At vero omnes iſtas ſex conditiones iam in ſuperioribus adimpleuimus, vbi oſtendimus, quemadmodum omnes hi nouem coefficientes per ternos angulos η, η', η'' determinari queant. Ex quo eo clarius intelligitur, ſolutionem noſtram quaeſtionis circa translationem quamcunque corporum rigiderum penitus eſſe determinatam et adaequatam, ita vt in parte geometrica, quam motus talium corporum determinatio poſtulat, nihil amplius deſiderari poſſit.

§. 20. Quomodocunque autem translatio corporis fuerit facta, qua punctum corporis I in punctum *i* eſt translatum; notum eſt ſi translatio fuerit infinite parua, tum ſemper in ſitu translato dari quaedam recta *i z*, cuius ſitus parallelus erit ei, quem eadem recta in ſtatu initiali habuit, ita vt, ſi punctum I quieuiſſet, iſta recta penitus immota manſiſſet. Euidens autem eſt, iſtam rectam repraeſentare axem corporis circa quem gyratio fuerit facta, dum corpus in ſitum translatum peruenit.

Quam-

Quamobrem maximi momenti erit inueſtigare, vtrum, ſi translatio fuerit finita, etiam detur talis axis.

§ 21. *Manifeſtum* autem eſt, vt recta iz etiam nunc parallela ſit rectae IZ, ad hoc requiri tres iſtas conditiones:

$$1^\circ.\ x - f = p,\quad 2^\circ.\ y - g = q,\quad 3^\circ.\ z - h = r$$

vnde naſcuntur hae aequationes:

$$p = Fp + F'q + F''r$$
$$q = Gp + G'q + G''r$$
$$r = Hp + H'q + H''r$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipſius p hinc deducti erunt $\frac{F'q + F''r}{1 - F}$, $\frac{(1 - G')q + G''r}{G}$, $\frac{(1 - H'')r - H'q}{H}$.

Horum valorum primus ſecundo aequatus iſtam dabit rationem inter q et r, ſcilicet

$$\frac{q}{r} = \frac{G''(F - 1) - F''G}{GF' - (1 - F)(1 - G')}$$

ac primus valor tertio aequatus perducit ad hanc relationem:

$$\frac{q}{r} = \frac{(1 - F)(1 - H'') - F''H}{F'H + H'(1 - F)}.$$

Hos igitur duos valores reuera inter ſe aequari neceſſe eſt, ſiquidem talis axis gyrationis datur.

§. 22. Quod ſi autem hos duos valores inter ſe aequales ponamus, perueniemus ad iſtam aequationem:

$$(1-F)F''GH' + (1-F)F'G''H + (1-F)(1-G')F''H + (1-F)(1-H'')F'G$$
$$+ (1-F)^2 G''H' (1-F)^2 (1-G')(1-H'') = 0$$

cuius

cuius aequationis omnia membra factore communi gaudent $(1-F)$; hoc ergo per diuiſionem ſublato remanebit iſta aequatio:

$$F''GH'+F'G''H+(1-G')F''H+(1-H'')F'G+(1-F)G''H' \\ -(1-F)(1-G')(1-H'')=0$$

quae ſingulis membris euolutis dat hanc aequationem

$$\begin{aligned} 0 = -1 &+ F - FG' + FG'H'' \\ &+ G' - FH'' - FG''H' \\ &+ H'' + F'G - F'GH'' \\ &\quad - G'H'' - F''G'H \\ &\quad + G''H' \\ &\quad + F'H. \end{aligned}$$

Hic autem non liquet, quomodo iſta expreſſio ad nihilum redigatur; ac nimis taedioſum foret loco litterarum F, G, H, eorum valores penitus euolutos ſubſtituere.

§. 23. Miſſa igitur hac inueſtigatione, quoniam pro translatione quacunque formulas dedimus, quarum ope ex data cuiusque puncti poſitione in ſtatu initiali eiusdem poſitio in ſtatu translato aſſignari poteſt, ſcopo quem nobis propoſueramus plene ſatisfecimus, ita vt in hac parte nihil amplius deſiderari queat, cum tota haec inueſtigatio in determinatione 9 coefficientium $F, G, H, F', G', H', F'', G'', H''$ contineatur.

Additamentum.

§. 24. Cum formulae, quas ſupra pro quouis ſitu translato dedimus, maxime ſint generales, et omnes

 trans-

translationes in ſe complectantur, mirum videri debet, quod ex illis haud pateat, vtrum in omni ſitu translato talis detur recta iz, quae eandem directionem teneat, quam in ſitu initiali habuit. Aequatio enim §. 22. inuenta tantopere eſt implicata, vt nimis moleſtum foret, loco ſingularum litterarum valores quos ipſis aſſignauimns ſubſtituere. Interim tamen aliunde certum eſt, quomodocunque corpus rigidum ex vno ſitu in alium transferatur, ſemper dari eiusmodi rectam iz, cuius directio nullam mutationem patiatur. Ad hoc enim demonſtrandum concipiamus corpori rigido, cuiuscunque fuerit figurae, ſphaeram circumſcribi cum ipſo connexam ſimulque mobilem, quae centrum habeat in puncto I, quo facilius iſtam inueſtigationem ad doctrinam ſphaericam traducere liceat.

Theorema.

Quomodocunque ſphaera circa centrum ſuum conuertatur, ſemper aſſignari poteſt diameter, cuius directio in ſitu translato conueniat cum ſitu initiali.

Demonſtratio.

Tab. II. Fig. 2. §. 25. Referat circulus A,B,C circulum ſphaerae maximum quemcunque, in ſtatu initiali, qui facta translatione peruenerit in ſitum a, b, c, ita vt puncta A, B, C ranslata ſint in puncta a, b, c; punctum autem A ſit ſimul interſectio horum duorum circulorum. Quo poſito demonſtrandum eſt, ſemper dari punctum O, quod pari modo referetur tam ad circu-

circulum A, B, C quam ad circulum *a*, *b*, *c*. Ad hoc igitur neceſſe eſt, vt primo diſtantiae O A et O *a* ſint inter ſe aequales; deinde vero, vt etiam arcus O A et O *a* ad illos duos circulos aequaliter ſint inclinati, ſiue vt ſit angulus O *a b* = angulo O A B: erunt ergo etiam complementa ad duos rectos, hoc eſt anguli O *a* A et O A *α* inter ſe aequales. Quoniam autem arcus O *a* et O A ſunt aequales, erit quoque angulus O *a* A = angulo O A *a*, ideoque O A *a* = O A *α*; vnde patet, ſi angulus *a* A *α* biſecetur arcu O A, tum punctum quaeſitum O alicubi in iſto arcu A O fore ſitum; quod igitur reperietur ſi arcus *a* O ita ducatur, vt angulus A *a* O aequalis euadat angulo O A *a*. Interſectio enim horum arcuum dabit punctum O, per quod ſi ducatur diameter Sphaerae, eius poſitio in ſitu translato etiamnunc eadem erit, quae fuerat in ſitu initiali.

§. 26. Ad hoc punctum O facilius definiendum, biſecari poteſt arcus A *a* in puncto M, vbi conſtituatur arcus M O ad A *a* normalis; tum vero ducatur arcus A O, ita vt angulum *a* A *α* biſecet; atque interſectio horum arcuum O monſtrabit punctum quaeſitum. Hic obſeruatur, ſi arcus *a α* aequalis capiatur arcui *a* A, fore *α* punctum Sphaerae, quod facta translatione peruenerit in punctum A, quamobrem iſte angulus *a* A *α* biſecari debet, non vero eius deinceps poſitus *a* A B.

§. 27. Vulgo quidem punctum I (fig. 1.) ad quod poſitio corporis initialis refertur, ſumi ſolet Tab. II Fig. 1.

 in

in eius centro grauitatis. Verum ex demonſtratione data apparet, veritatem theorematis etiam ſubſiſtere, quodcunque aliud punctum pro centro Sphaerae fuerit aſſumtum. Quamobrem, ſi in corpore rigido loco I accipiatur punctum quodcunque, per id ſemper duci poterit linea recta, cuius poſitio in ſitu translato non erit immutata; quin etiam nihil impedit, quo minus iſtud punctum I adeo extra corpus accipiatur. Quamobrem cauendum eſt, ne iſta inſignis proprietas tanquam centro grauitatis propria ſpectetur: ideo enim tantum punctum illud I in ipſo centro grauitatis corporis conſtitui ſolet, quo formulae analyticae, quibus motus talium corporum definitur, fiunt ſimpliciores.

§. 28. Cum igitur ſolidiſſimis rationibus ſit euictum, in omni ſitu translato ſemper dari eiusmodi lineam rectam iz, cuius directio non diſcrepet a directione, quam eadem recta IZ in ſitu initiali tenuit, etiam certi eſſe poſſumus, aequationem §. 22. datam ſemper locum eſſe habituram, poſtquam ſcilicet loco omnium litterarum valores aſſignati fuerint ſubſtituti; hoc enim facto neceſſario euenire debet, vt omnes plane termini ſponte ſe mutuo tollant, etiamſi hoc ex ſex illis conditionibus principalibus, quibus ſatisfieri oportuit neutiquam appareat. Quamobrem iſta eximia preprietas, cuius veritas geometrice tam facile eſt oſtenſa ratione formularum analyticarum pro maxime abſcondita eſt habenda; atque ob hanc ipſam rationem ex

ea

ea pulcherrima incrementa per totam mechanicam merito expectare poſſumus.

§. 29. Interim tamen formulas, quas pro illis litteris maiuſculis ſupra inuenimus, diligentius euoluamus, quo inde forſitan facilius perſpici queat, quemadmodum aequatio illa §. 22. data adimpleatur. Introductis autem ſex angulis ζ, ζ', ζ''; η, η', η'' per quos illas §. 14. expreſſimus, ternos priores per poſteriores ita determinauimus, vt poſito

$-\text{coſ.}(\eta-\eta').\text{coſ.}(\eta'-\eta'').\text{coſ.}(\eta''-\eta) = \Delta\Delta$ eſſet

$\text{tang.}\zeta'' = \frac{-\Delta}{\text{coſ.}(\eta-\eta')}$; $\text{tang.}\zeta = \frac{-\Delta}{\text{coſ.}(\eta'-\eta'')}$; $\text{tang.}\zeta' = \frac{-\Delta}{\text{coſ.}(\eta''-\eta)}$

vnde ergo tam ſinus quam coſinus illorum angulorum deduci oportet.

§. 30 Quod quo facilius fieri poſſit, loco angulorum η, η' et η'' introducamus alios angulos $\theta, \theta', \theta''$, ita vt ſit $\eta - \eta' = \theta''$; $\eta' - \eta'' = \theta$ et $\eta'' - \eta = \theta'$, vnde patet fore $\theta + \theta' + \theta'' = 0$, ita vt hi tres noui anguli tantum duobus aequiualeant; ideoque hinc ex angulis η, η' et η'' vnus manebit indefinitus, qui ſi fuerit η erit $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$. His igitur angulis introductis erit $\Delta\Delta = -\text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\theta'\,\text{coſ.}\,\theta''$, hocque valore adhibito habebimus

$$\text{tang.}\,\zeta'' = -\sqrt{-\frac{\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}{\text{coſ.}\,\theta''}},$$

$$\text{tang.}\,\zeta = -\sqrt{-\frac{\text{coſ.}\,\theta'\,\text{coſ.}\,\theta''}{\text{coſ.}\,\theta}},$$

$$\text{tang.}\,\zeta' = -\sqrt{-\frac{\text{coſ.}\,\theta''\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\theta'}}.$$

§. 31. Ex his formulis pro tangentibus inventis colligamus formulas pro ſinibus et coſinibus,

ac pro primo quidem erit

$$\text{ſin.}\,\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}}{\sqrt{\text{coſ.}\,\theta'' - \text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\zeta'' = \frac{\sqrt{\text{coſ.}\,\theta''}}{\sqrt{\text{coſ.}\,\theta'' - \text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}}.$$

Cum autem ſit $\theta'' = -\theta - \theta'$ erit

$$\text{coſ.}\,\theta'' = \text{coſ.}\,(\theta + \theta') = \text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta' - \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'$$

quo valore ſubſtituto fiet

$$\text{ſin.}\,\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}}{\sqrt{-\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'}} = -\sqrt{\frac{\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'}} = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta'}$$

ſimilique modo

$$\text{coſ.}\,\zeta'' = \frac{\sqrt{\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta' - \text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'}}{\sqrt{-\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'}} = \sqrt{\frac{-\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta'}{\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\theta'} + 1} = \sqrt{(1 - \text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta')}$$

Atque hinc iam perſpicuum eſt, pro binis reliquis angulis fore

$$\text{ſin.}\,\zeta = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta'\,\text{cot.}\,\theta''} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\zeta = +\sqrt{1 - \text{cot.}\,\theta'\,\text{cot.}\,\theta''}$$

$$\text{ſin.}\,\zeta' = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta''\,\text{cot.}\,\theta} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\zeta' = +\sqrt{1 - \text{cot.}\,\theta''\,\text{cot.}\,\theta}$$

$$\text{ſin.}\,\zeta'' = -\sqrt{\text{cot}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta'} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\zeta'' = +\sqrt{1 - \text{cot}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta''}.$$

§. 32. Quod ſi nunc iſti valores euoluti ſubſtituantur loco angulorum ζ, ζ' et ζ'', formulae pro nouem litteris F, G, H, F', G', H' etc. ſupra inventae ſequenti modo exprimentur, poſtquam ſcilicet breuitatis gratia poſuerimus

$$\text{cot.}\,\theta = t\,;\ \text{cot.}\,\theta' = t' \ \text{et}\ \text{cot.}\,\theta'' = t''$$

$$F = -\sqrt{t't''};\ G = \text{ſin.}\,\eta\,\sqrt{1 - t't''};\ H = \text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{1 - t't''}$$

$$F' = -\sqrt{t''t};\ G' = \text{ſin}\,\eta'\,\sqrt{1 - t''t};\ H' = \text{coſ.}\,\eta'\,\sqrt{1 - t''t}$$

$$F'' = -\sqrt{tt'};\ G'' = \text{ſin.}\,\eta''\sqrt{1 - tt'};\ H'' = \text{coſ.}\,\eta''\sqrt{1 - tt'}.$$

§. 33 Verum etiamſi hos valores in aequatione §. 22. ſubſtituamus, nullo tamen modo perſpicitur,

citur, quomodo ſingula eius membra ſe mutuo deſtruere queant. Quamobrem neceſſe erit, inſuper eius conditionis rationem habere, quod ſit $\theta + \theta' + \theta'' = 0$; vnde inter litteras t, t', t'' iſta relatio naſcitur, vt ſit $tt' + t't'' + tt'' = 1$, ſiue vt ſumma productorum ex binis vnitate aequatur. Praeterea vero etiam ad eam conditonem eſt attendenda, qua erat $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$, atque his conditionibus rite obſeruatis et per calculum euolutis nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin iſta aequatio adimpleatur. At vero nemo facile ſtupendum hunc laborem in ſe ſuſcipere volet; quamobrem egregia iſta proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua eſt cenſenda, et Geometris pulcherrimam occaſionem praebere poteſt, vires ſuas in iſta proprietate penitus enucleanda exercendi.

NOVA

NOVA METHODVS MOTVM CORPORVM RIGIDORVM DETERMINANDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quanquam in tractatu meo de motu corporum rigidorum iſtam Theoriam ſatis felici ſucceſſu expediui: tamen fateri cogor, ſolutiones quas dedi non ſolum nimis eſſe intricatas, ſed etiam applicationem ad quosuis caſus particulares maxime eſſe moleſtam et plurimis difficultatibus implicatam. Poſtquam enim motum centri grauitatis determinaſſem, quod quidem nulla laborabat difficultate, ad quoduis tempus tam poſitionem axis gyrationis quam celeritatem diſiniri oportebat; deinde vero imprimis ſitum ternorum axium principalum aſſignare neceſſe erat, ad quod ingens multitudo quantitatum variabilium in calculum introduci debebat.

Haec tanta incommoda etiam ſagaciſſimus Geometra *la Grange* animaduertiſſe videtur, dum hoc argumentum in Commentariis Academiae Boruſſicae pro Anno 1773 alia methodo tractandum ſuſceperit,

ſuſcepit; cuius quidem profundiſſimas meditationes maxima cum auiditate perluſtrare ſum conatus, veruntamen a me impetrare non potui, vt omnes eius calculos penetrarem. Statim enim primum Lemma ita me deterruit, vt ob defectum oculorum nullo modo ſperare potuerim, omnia artificia analytica, quibus eſt vſus, perſcrutari.

§. 2. Cum autem nuper, dum partem geometricam, cui iſta inueſtigatio innititur, accuratius euoluendam ſuſcepi, hanc inſignem proprietatem demonſtraſſem, quod, quomodocunque corpus rigidum ex ſtatu initiali in alium quemcunque ſtatum fuerit translatum, in eo ſemper talis axis aſſignari poſſit, cuius directio in vtroque ſtatu maneat inuariata: haec pulcherrima proprietas mihi ſtatim viſa eſt, eximium ſubſidium ſuppeditare, vnde omnia, quae ad motum huiusmodi corporum pertinent, multo facilius et ſine tanta farragine tot quantitatum variabilium definiri poſſent. Poſtquam enim motus centri grauitatis fuerit definitus, in ſtatu initiali ille quaeratur axis, qui in ſtatu translato etiamnunc eandem ſeruat directionem; tum vero quaeratur angulus, quo corpus interea circa hunc axem fuerit conuerſum. Hocque modo ad quoduis tempus ſitus corporis perfecte cognoſcetur, ita vt tota inueſtigatio ad determinationem iſtius axis pro quouis tempore cum angulo conuerſionis reducatur, quamobrem iſtam ideam hic adcuratius ſum perſecuturus.

§. 3. Conſideremus igitur corpus in ſtatu ſuo initiali, in quo pro lubitu accipiamus punctum

 quod-

quodcunque, per quod ducamus ternos axes fixos inter ſe normales, quorum reſpectu ſitus ſingulorum elementorum corporis more ſolito per ternas coordinatas definiri queat. Illud quidem punctum in tractatu meo in ipſo centro grauitatis corporis conſtitui; verum nunc nihil referre obſeruaui, ſi in alio quocunque loco conſtituatur. Deinde etiam neceſſe non eſt, vt terni illi axes ſint ſimul axes principales corporis, ſed perinde ac ipſum illud punctum penitus arbitrio relinquuntur. Id tantum hic notaſſe iuuabit, calculos ſequentes multo fore faciliores et concinniores, ſi illud punctum in ipſo centro inertiae accipiatur ſimulque terni axes fuerint principales, pro ſtatu ſcilicet corporis initialis. Tum vero ex illo puncto tanquam centro corpori Sphaera circumſcribi concipiatur, cum ipſo corpore firmiter cohaerens et cum ipſo ſimul mobilis, cuius radius vnitate indicetur, vt hoc modo omnes inueſtigationes ad doctrinam ſphaericam reuocari queant, quandoquidem hoc pacto omnes calculi multo facilius expediri poterunt.

Tab. II. Fig. 3. §. 4. Repraeſentet igitur triangulum ſphaericum A B C octantem ſphaerae, cuius centro adſcripta intelligatur littera I, vnde rectae eductae I A, I B et I C referant ternos illos axes fixos, ita vt arcus A B, B C, C A ſint quadrantes inter ſe angulos rectos A, B, C conſtituentes. Tum vero ad ſitum ſingulorum elementorum corporis cognoſcendum, per quoduis eorum ductus intelligatur radius I Z, et ex puncto Z agantur terni arcus Z A, Z B, Z C, qui vocentur $ZA = \zeta$, $ZB = \eta$ et $ZC = \theta$; tum enim ſi diſtantia

ſtantia elementi corporis a centro I dicatur $= s$, ternae coordinatae axibus I A, I B, I C parallelae erunt $s\,\text{coſ.}\,\zeta$, $s\,\text{coſ.}\,\eta$, $s\,\text{coſ.}\,\theta$; quibus ergo ſitus cuiusque elementi in ſtatu initiali more ſolito determinabitur. Semper autem ex natura trianguli Sphaerici A B C erit

$$\text{coſ.}\,\zeta^2 + \text{coſ.}\,\eta^2 + \text{coſ.}\,\theta^2 = 1\,;$$

praeterea vero ex ſphaericis notentur ſequentes determinationes

$$\text{coſ. BAZ} = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\zeta}\,;\quad \text{coſ. ABZ} = \frac{\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\eta}\,;\quad \text{coſ. BCZ} = \frac{\text{coſ.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\theta}$$

$$\text{ſin BAZ} = \frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta}\,;\quad \text{ſin. ABZ} = \frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta}\,;\quad \text{ſin. BCZ} = \frac{\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\theta}.$$

Porro vero erit

$$\text{coſ. AZB} = -\frac{\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta};\ \text{coſ. BZC} = -\frac{\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta};\ \text{coſ. CZA} = -\frac{\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}$$

$$\text{ſin. AZB} = +\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\eta};\ \text{ſin. BZC} = +\frac{\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta};\ \text{ſin. CZA} = +\frac{\text{coſ.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}$$

§. 5. His pro ſtatu initiali definitis conſideremus ſtatum corporis, in quo elapſo tempore $= t$ reperietur; ac primo quidem in quemcunque locum centrum I fuerit translatum, quandoquidem eius determinatio nulla difficultate laborat, eius locus cogitatione ſaltem in punctum I transferatur, ſimulque cum eo totum corpus, motu ſcilicet ſibi parallelo. Et quoniam in ſitu translato ſemper datur talis radius, cuius directio eadem eſt atque in ſtatu initiali, ſit O in ſuperficie ſphaerica id punctum, quod tam in ſtatu initiali quam in translato poſt tempus t eundem locum occupat, ita vt radius eandem directionem obtineat pro vtroque corporis ſtatu. Pro eius ergo ſitu ducantur ad angulos arcus O A, O B et O C, qui vocentur $\text{OA} = \alpha$, $\text{OB} = \beta$ et $\text{OC} = \gamma$,

 quos

quos ergo tanquam certas functiones temporis t ſpectari oportet, atque ex his nanciſcemur ſequentes determinationes:

$$\text{coſ. } OAB = \frac{\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha};\ \text{coſ. } ABO = \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\beta};\ \text{coſ. } BCO = \frac{\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\gamma}$$

$$\text{ſin. } OAB = \frac{\text{coſ.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,\alpha};\ \text{ſin. } ABO = \frac{\text{coſ.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,\beta};\ \text{ſin. } BCO = \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\gamma}.$$

Porro vero erit

$$\text{coſ. } AOB = -\frac{\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta};\ \text{coſ. } BOC = -\frac{\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\gamma};\ \text{coſ. } COA = -\frac{\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\gamma}$$

$$\text{ſin. } AOB = -\frac{\text{coſ.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta};\ \text{ſin. } BOC = -\frac{\text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\gamma};\ \text{ſin. } COA = -\frac{\text{coſ.}\,\beta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\gamma}.$$

Inſuper vero erit vt ante

$$\text{coſ.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\beta^2 + \text{coſ.}\,\gamma^2 = 1.$$

§. 6. Sit iam Φ ille angulus, per quem totum corpus tempore $= t$ circa radium I O fuerit conuerſum, ita vt angulus Φ etiam ſpectandus ſit tanquam functio temporis t, dum arcus primum introducti ζ, η, θ, tantum a variabilitate cuiusque elementi corporis ad quod referuntur pendent. Punctum igitur ſphaerae, quod initio erat in Z, nunc elapſo tempore $= t$ ita translatum erit in z, vt ductis arcubus O Z et O z futurus ſit angulus Z O $z = \Phi$ exiſtente O z = O Z. Hinc ergo ſi iſtius puncti z quaerantur diſtantiae ab angulis A B C, cognoſcetur verus ſitus, in quem radius corporis I Z a ſitu initiali elapſo tempore $= t$ erit translatus. Quamobrem pro motu corporis perfecte cognoſcendo totum negotium eo reducitur, vt pro quouis tempore elapſo $= t$ tam ſitus puncti O ſiue arcus α, β, γ quam angulus Z O $z = \Phi$ determinentur; quandoquidem hoc

hoc modo ad quoduis tempus verus ſitus ſingulorum corporis elementorum aſſignari poterit.

§. 7. Cum igitur diſtantiae puncti z ab angulis A B C ante omnia debeant indagari, inueſtigemus primo diſtantiam A z; quod quo facilius fieri poſſit, in figura nullas alias lineas repraeſentemus praeter eas, quae ad hunc ſcopum referuntur. Ac primo quidem quaeri debebit quantitas arcus O Z ex triangulo O A Z, in quo habentur arcus $OA = \alpha$ et arcus $ZA = \zeta$. Praeterea vero definiri poterimus angulum O A Z ex angulis B A O et B A Z, cum ſit $OAZ = BAO - BAZ$ ideoque Tab. II. Fig. 4.

$$\text{ſin.}\, OAZ = \text{ſin.}\, BAO \,\text{coſ.}\, BAZ - \text{coſ.}\, BAO \,\text{ſin.}\, BAZ = \frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta} \text{ et}$$

$$\text{coſ}\, OAZ = \text{coſ.}\, BAO \,\text{coſ.}\, BAZ + \text{ſin.}\, BAO \,\text{ſin.}\, BAZ = \frac{\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta} \text{ et tang.}\, OAZ = \frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\theta}$$

quibus notatis per ſphaerica fiet

$$\text{coſ.}\, OZ = \text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\theta \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, AOZ = \frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\alpha^2\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\alpha\,(\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\theta)}.$$

§. 8. Ponamus autem ad abbreuiandum angulum $OAZ = A$, ita vt ſit

$$\text{ſin.}\, A = \frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\vartheta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta};\quad \text{coſ.}\, A = \frac{\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\vartheta}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta}$$

$$\text{et tang.}\, A = \frac{\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\eta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\vartheta}{\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\eta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\vartheta};$$

pro quaeſitis autem ſit arcus $OZ = Z$ et angulus $AOZ = O$, atque integrale O A Z erit

$$\text{coſ.}\, Z = \text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\, A \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, O = \frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\, A}{\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\, A},$$

 vnde

vnde ſi loco A valor inuentos ſcribatur, prodibit vti iam inuenimus

$$\text{coſ.}\, Z = \text{coſ.}\, \alpha \,\text{coſ.}\, \zeta + \text{coſ.}\, \beta \,\text{coſ.}\, \eta + \text{coſ.}\, \gamma \,\text{coſ.}\, \vartheta$$ et

$$\text{tang.}\, O = \frac{\text{coſ.}\, \gamma \,\text{coſ.}\, \eta - \text{coſ.}\, \beta \,\text{coſ.}\, \vartheta}{\text{ſin.}\, \alpha^2 \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \alpha\, (\text{coſ.}\, \beta \,\text{coſ.}\, \eta + \text{coſ.}\, \gamma \,\text{coſ.}\, \vartheta)}.$$

§. 9. His iam inuentis aggrediamur triangulum ſphaericum A O z, in quo cognoſcimus bina latera O A $= \alpha$ et O z $= Z$, vna cum angulo intercepto A O z $= O + \Phi$, vnde colligimus

$$\text{coſ.}\, A z = \text{coſ.}\, \alpha \,\text{coſ.}\, Z + \text{ſin.}\, \alpha \,\text{ſin.}\, Z \,\text{coſ.}\, (O + \Phi).$$

quae ergo expreſſio reducitur ad hanc:

$$\text{coſ.}\, A z = \text{coſ.}\, \alpha \,\text{coſ.}\, Z + \text{ſin.}\, \alpha \,\text{ſin.}\, Z \,\text{coſ.}\, O \,\text{coſ.}\, \Phi - \text{ſin.}\, \alpha \,\text{ſin.}\, Z \,\text{ſin.}\, O \,\text{ſin.}\, \Phi$$

vbi iam definiuimus coſ. Z. Verum tam ſin. Z quam ſin. O et coſ. O non habentur euoluti; neque vero conducit has quantitates immediate ex inventis deriuare, quoniam perueniremus ad ſigna radicalia, quae, vtrum poſitiue an negatiue capi debeant incertum maneret. Quamobrem hanc euolutionem ſequenti modo inſtitui conueniet.

§. 10. Ex triangulo A O Z ſtatim deducimus hanc proportionem:

ſin. A : ſin. Z $=$ ſin. O : ſin. ζ, vnde colligitur

$\text{ſin.}\, O = \frac{\text{ſin.}\, A \,\text{ſin.}\, \zeta}{\text{ſin.}\, Z}$, qui diuiſus per tang. O praebet

$$\text{coſ.}\, O = \frac{\text{ſin.}\, \alpha \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \alpha \,\text{ſin.}\, \zeta \,\text{coſ.}\, A}{\text{ſin.}\, Z}.$$

Ex quibus ergo formulis ſponte ſe produnt illae ipſae formulae, quibus indigemus: ſcilicet ſin. Z ſin. O et ſin. Z coſ. O; quare, ſi pro coſ. Z inuentum valorem

rem ſubſtituamus, perueniemus ad iſtam expreſſionem:

$$\cos. Az = \cos.\alpha^2 \cos.\zeta + \sin.\alpha \cos.\alpha \sin.\zeta \cos. A + \sin.\alpha^2 \cos.\Phi \cos.\zeta, - \sin.\alpha \cos.\alpha \cos.\Phi \sin.\zeta \cos. A - \sin.\alpha \sin.\Phi \sin.\zeta \sin. A.$$

Eliſo igitur angulo A iſta expreſſio ſequentem induet formam:

$$\cos. Az = \cos.\alpha^2 \cos.\zeta + \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\eta + \cos.\alpha \cos.\gamma \cos.\vartheta + \sin.\alpha^2 \cos.\Phi \cos.\zeta - \cos.\alpha \cos.\Phi \cos.\beta \cos.\eta - \cos.\alpha \cos.\Phi \cos.\gamma \cos.\vartheta - \sin.\Phi \cos.\gamma \cos.\eta + \sin.\Phi \cos.\beta \cos.\vartheta.$$

§. 11. Iſta expreſſio eo magis eſt notatu digna, quod non ſolum nullis inquinata ſit fractionibus, ſed etiam in ſingulis terminis tantum occurrant coſinus trium angulorum ζ, η et ϑ ſinibus penitus excluſis. Hanc ob cauſſam ſingulos hos terminos ſecundum iſtos ternos coſinus ordinemus, ſicque impetrabimus ſequentem formam:

$$\cos. Az = \cos.\zeta(\cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2 \cos.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\alpha \cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\beta \cos.\Phi - \cos.\gamma \sin.\Phi) + \cos.\vartheta(\cos.\alpha \cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\gamma \cos.\Phi + \cos.\beta \sin.\Phi)$$

vbi meminiſſe iuuabit, angulos ζ, η, ϑ tantum ad ſitum initialem ſpectare, iisque locum cuiuslibet elementi corporis definiri, neque igitur a tempore pendere; dum contra reliqui anguli α, β, γ, Φ ſunt functiones ipſius temporis t tantum.

§. 12. Facta hac euolutione pro arcu Az ſuperfluum plane foret, ſi ſimilem inueſtigationem pro duobus reliquis arcubus Bz et Cz inſtituere vellemus. Cum enim tria puncta A, B, C ſint inter ſe

ſe permutabilia, tantum opus erit, vt tam anguli ζ, η, ϑ, quam α, β, γ ſecundum ordinem promoveantur, dum interea angulus Φ idem conſeruatur. Hoc igitur modo reperiemus ſequentes expreſſiones

$$\cos.Bz = \cos.\eta(\cos.\beta^2 + \sin.\beta^2\cos.\Phi) + \cos.\vartheta(\cos.\beta\cos.\gamma - \cos.\beta\cos.\gamma\cos.\Phi - \cos.\alpha\sin.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\beta\cos.\alpha - \cos.\beta\cos.\alpha\cos.\Phi + \cos.\gamma\sin.\Phi)$$

$$\cos.Cz = \cos.\vartheta(\cos.\gamma^2 + \sin.\gamma^2\cos.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\gamma\cos.\alpha - \cos.\gamma\cos.\alpha\cos.\Phi - \cos.\beta\sin.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\gamma\cos.\beta - \cos.\gamma\cos.\beta\cos.\Phi + \cos.\alpha\sin.\Phi).$$

§. 13. Statuamus nunc breuitatis gratia pro ſitu translato puncti Z

$$Az = \zeta',\ Bz = \eta',\ Cz = \vartheta',$$

ex quorum valoribus coordinatae pro iſto puncto deinceps formabuntur. Coſinus ergo horum trium arcuum hic iunctim aſpectui exponamus

$$\cos.\zeta' = \cos.\zeta(\cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2\cos.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\alpha\cos.\beta(1-\cos.\Phi) - \cos.\gamma\sin.\Phi) + \cos.\vartheta(\cos.\alpha\cos.\gamma(1-\cos.\Phi) + \cos.\beta\sin.\Phi)$$

$$\cos.\eta' = \cos.\eta(\cos.\beta^2 + \sin.\beta^2\cos.\Phi) + \cos.\vartheta(\cos.\beta\cos.\gamma(1-\cos.\Phi) - \cos.\alpha\sin.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\alpha\cos.\beta(1-\cos.\Phi) + \cos.\gamma\sin.\Phi)$$

$$\cos.\vartheta' = \cos.\vartheta(\cos.\gamma^2 + \sin.\gamma^2\cos.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\alpha\cos.\gamma(1-\cos.\Phi) - \cos.\beta\sin.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\beta\cos.\gamma(1-\cos.\Phi) + \cos.\alpha\sin.\Phi).$$

§. 14. Operae pretium hic erit nonnullos ſitus principales puncti Z contemplari. Sumamus igitur primo punctum Z in ipſo puncto A, ita vt ſit $\zeta = 0$ et $\eta = \vartheta = 90°$; vnde pro ſitu puncti z erit

coſ.

$$\cos.\zeta' = \cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2 \cos.\Phi = 1 - \sin.\alpha^2 (1 - \cos\Phi)$$
$$\cos.\eta' = \cos.\alpha \cos.\beta (1 - \cos.\Phi) + \cos.\gamma \sin.\Phi$$
$$\cos.\vartheta' = \cos.\alpha \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) - \cos\beta \sin.\Phi$$

Simili modo ſi punctum Z capiatur in puncto B, ita vt ſit $\zeta = \vartheta = 90°$ et $\eta = 0$, tum erit pro ſitu puncti z

$$\cos.\zeta' = \cos.\alpha \cos.\beta (1 - \cos.\Phi) - \cos.\gamma \sin.\Phi$$
$$\cos.\eta' = \cos.\beta^2 + \sin.\beta^2 \cos.\Phi = 1 - \sin.\beta^2 (1 - \cos.\Phi)$$
$$\cos.\vartheta' = \cos.\beta \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) + \cos.\alpha \sin.\Phi.$$

Sin autem denique punctum Z capiatur in puncto C tum locus puncti z ita determinabitur, vt ſit

$$\cos.\zeta' = \cos.\alpha \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) + \cos.\beta \sin.\Phi$$
$$\cos.\eta' = \cos.\beta \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) - \cos.\alpha \sin.\Phi$$
$$\cos.\vartheta' = 1 - \sin.\gamma^2 (1 - \cos.\Phi).$$

§. 15. Iſtae nouem formulae ideo omni attentione ſunt dignae, quod ex iis formulae generales pro $\cos.\zeta'$, $\cos.\eta'$, $\cos.\vartheta'$ ex illis tam pulchre componuntur. Manifeſtum enim eſt, formulam generalem pro $\cos.\zeta'$ compoſitam eſſe ex tribus formulis ſpecialibus pro $\cos.\zeta'$ modo inuentis. Simili modo formula generalis pro $\cos.\eta'$ componitur ex ternis formulis ſpecialibus eiusdem nominis. Tandem etiam formula generalis $\cos.\vartheta'$ componitur ex ternis ſpecialibus pro eodem angulo.

§. 16. Haec inſignis proprietas, quae inter translationes punctorum A, B, C et alius cuiusuis puncti Z intercedit, maxime eſt memoratu digna;

atque omnino meretur, vt diligentius perpendatur; quam ob rem eam in ſequenti Theoremate generaliſſimo complecti conueniet, cuius veritas ex calculis, quos modo abſoluimus ſatis elucet, dum alias profundiſſimas indagationes poſtularet.

Theorema.

§. 17. Si ſphaera circa centrum ſuum fixum Tab. II. Fig. 5. vtcunque de ſitu ſuo deturbetur, vt terna eius puncta A, B, C in eius ſuperficie quadrantibus a ſe inuicem diſtantia transferantur in puncta a, b, c; tum aliud punctum quodcunque Z ita transferetur in z vt ſit

I. $\text{coſ.}\, zA = \text{coſ.}\, ZA\, \text{coſ.}\, aA + \text{coſ.}\, ZB\, \text{coſ.}\, aB + \text{coſ.}\, ZC\, \text{coſ.}\, aC$

II. $\text{coſ.}\, zB = \text{coſ.}\, ZB\, \text{coſ.}\, bB + \text{coſ.}\, ZC\, \text{coſ.}\, bC + \text{coſ.}\, ZA\, \text{coſ.}\, bA$

III. $\text{coſ.}\, zC = \text{coſ.}\, ZC\, \text{coſ.}\, cC + \text{coſ.}\, ZA\, \text{coſ.}\, cA + \text{coſ.}\, ZB\, \text{coſ.}\, cB.$

§. 18. Quoniam puncta litteris maiusculis et minuſculis deſignata inter ſe permutare licet, ita vt minuſculae pertineant ad ſtatum initialem, maiuſculae vero ad ſtatum mutatum: aequationes etiam ſequentes veritati erunt conſentaneae

I. $\text{coſ.}\, Za = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Aa + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Ab + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Ac$

II. $\text{coſ.}\, Zb = \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Bb + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Bc + \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Ba$

III. $\text{coſ.}\, Zc = \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Cc + \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Ca + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Cb.$

Applicatio horum ſymptomatum ad coordinatas orthogonales.

§. 19. Applicemus nunc omnes formulas, quas hactenus inuenimus, ad ternas coordinatas, directionibus

bus fixis I A, I B, I C parallelas. Ac primo quidem pro ſtatu initiali conſideremus elementum corporis quodcunque in Z, pro cuius loco ſtatuamus coordinatas I X = X, X Y = Y et Y Z = Z; vnde ſi diſtantia iſtius puncti Z a centro I vocetur $= s$, euidens eſt, ſi iſtud punctum Z in eo ſphaerae radio accipiatur, qui ante per punctum Z tranſibat, fore $X = s \cos. \zeta$, $Y = s \cos. \eta$, $Z = s \cos. \vartheta$. Hinc igitur erit $s^2 = XX + YY + ZZ$. Simili modo pro radio illo I O, cuius directio in ſtatu translato non mutatur, ternae coordinatae inter ſe erunt vt coſinus angulorum α, β, γ, quas autem in figura exprimere non eſt opus. Tab. II. Fig. 6.

§. 20. Iam elapſo tempore $= t$, quod perpetuo in minutis ſecundis exprimi aſſumimus translatum ſit centrum corporis I in punctum i, pro quo vocemus coordinatas $If = f$, $fi = g$, $ig = h$. Punctum autem, quod ante fuerat in Z nunc reperiatur in z, pro quo vocemus coordinatas $Ix = x$, $xy = y$, $yz = z$, et quoniam iſtud punctum z perinde ſe habet reſpectu puncti i, vt in praecedentibus figuris punctum Z ad centrum I, ita vt ſit diſtantia $iz = s$: vt ante manifeſtum eſt eſſe debere

$$x - f = s \cos. \zeta', \quad y - g = s \cos. \eta', \quad z - h = s \cos. \vartheta'.$$

§. 21. Quod ſi iam loco horum coſinuum, valores ſupra inuentos ſubſtituamus, ob $s \cos. \zeta = X$, $s \cos. \eta = Y$, $s \cos. \vartheta = Z$ nanciſcemur ſequentes valores:

$$x = f + X(\text{coſ}.\alpha^2 + \text{ſin}.\alpha^2 \text{coſ}.\Phi) + Y(\text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\beta(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\gamma\, \text{ſin}.\Phi)$$
$$+ Z(\text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\beta\, \text{ſin}.\Phi)$$
$$y = g + Y(\text{coſ}.\beta^2 + \text{ſin}.\beta^2 \text{coſ}.\Phi) + Z(\text{coſ}.\beta \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\alpha\, \text{ſin}.\Phi)$$
$$+ X(\text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\beta(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\gamma\, \text{ſin}.\Phi)$$
$$z = h + Z(\text{coſ}.\gamma^2 + \text{ſin}.\gamma^2 \text{coſ}.\Phi) + X(\text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\beta\, \text{ſin}.\Phi)$$
$$+ Y(\text{coſ}.\beta \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\alpha\, \text{ſin}.\Phi).$$

§. 22. Quoniam autem iſtae expreſſiones nimis ſunt complicatae, ponamus breuitatis gratia

$$x = f + F X + F' Y + F'' Z$$
$$y = g + G X + G' Y + G'' Z$$
$$z = h + H X + H' Y + H'' Z$$

ita vt ſit

$$F = \text{coſ}.\alpha^2 + \text{ſin}.\alpha^2 \text{coſ}.\Phi$$
$$G = \text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\beta(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\gamma\, \text{ſin}.\Phi$$
$$H = \text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\beta\, \text{ſin}.\Phi$$

$$F' = \text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\beta(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\gamma\, \text{ſin}.\Phi$$
$$G' = \text{coſ}.\beta^2 + \text{ſin}.\beta^2 \text{coſ}.\Phi$$
$$H' = \text{coſ}.\beta \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\alpha\, \text{ſin}.\Phi$$

$$F'' = \text{coſ}.\alpha \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) + \text{coſ}.\beta\, \text{ſin}.\Phi$$
$$G'' = \text{coſ}.\beta \text{coſ}.\gamma(1 - \text{coſ}.\Phi) - \text{coſ}.\alpha\, \text{ſin}.\Phi$$
$$H'' = \text{coſ}.\gamma^2 + \text{ſin}.\gamma^2 \text{coſ}.\Phi.$$

§. 23. Cum iam diſtantia puncti iz etiamnunc aequalis eſſe debeat diſtantiae I Z, ideoque

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

calculum inſtituendo comperietur reuera fore

$$FF + GG + HH = 1 \qquad FF' + GG' + HH' = 0$$
$$F'F' + G'G' + H'H' = 1 \qquad F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0$$
$$F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1 \qquad FF'' + GG'' + HH'' = 0.$$

Atque

Atque de hoc ſatis ſumus certi, etiamſi calculus non parum fieret moleſtus.

Formulae generales pro motu corporum rigidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum.

§. 24. Conſideremus igitur corpus quodcunque rigidum, inquo pro lubitu certum punctum pro centro I fuerit aſſumtum, et cuius ternae directiones fixae I A, I B, I C in ſitu initiali, ſe inuicem normaliter decuſſent, quorum reſpectu ſingulorum corporis elementorum loca per ternas coordinatas X, Y et Z determinentur. Deſignetur autem elementum corporis in puncto Z conſtituti charactere d M ita vt littera M, denotet maſſam totius corporis; vbi ergo probe notetur, has tres variabiles X, Y, Z tantum ad ſtatum corporis initialem pertinere, neque vllo modo a tempore t pendere.

§. 25. His igitur pro ſtatu initiali conſtitutis, vbi corpori motus quicunque impreſſus fuiſſe eſt concipiendus. Hunc in finem ponamus elapſo tempore t centrum corporis I perueniſſe in i, elementum vero d M, quod in puncto Z conſiderauimus translatum fuiſſe in punctum z, cuius locus per coordinatas x, y, z ſupra aſſignatas definiatur; locum autem centri i per coordinatas f, g, h exhiberi. Hic igitur non ſolum tres quantitates f, g, h certae erunt functiones temporis, tam ex motu corpori impreſſo quam ex viribus ſollicitantibus determinandae, ſed etiam litterae F, G, H cum ſuis deriuatis tanquam tales functiones

 nes

nes erunt ſpectandae; quandoquidem per angulos α, β, γ et Φ, qui ſunt functiones temporis, exprimuntur. Totum negotium enim eo redit, vt tam ex motu corpori initio impreſſo, quam viribus ſollicitantibus ad quoduis tempus tam valores litterarum f, g, h quam angulorum α, β, γ et Φ eliciantur, quippe quibus inuentis motus corporis perfecte cognoſcetur.

§. 26. Cum nunc elementum corporis quodcunque in genere conſideratum verſetur in puncto z, cuius locus per dupplicis generis quantitates variabiles exprimitur, quarum tres X, Y, Z referuntur ad locum Z, quem in ſtatu initiali obtinuit: reliquae vero ſunt functiones temporis. Ex harum poſteriorum igitur variabilitate tam motus huius elementi quam eius acceleratio determinari poterit, id quod commodiſſime fiet, ſi eius motum ſecundum ternas directiones fixas I A, I B et I C reſoluamus, vnde primo ternas celeritates eiusdem elementi, hincque porro etiam accelerationes ſecundum easdem directiones definire licebit. Sumto igitur ſolo tempore t pro variabili, formulae $(\frac{dx}{dt})$, $(\frac{dy}{dt})$, $(\frac{dz}{dt})$ dabunt illas ternas celeritates, differentialia autem ſecunda $(\frac{ddx}{dt^2})$, $(\frac{ddy}{dt^2})$, $(\frac{ddz}{dt^2})$ accelerationes.

§. 27 Quod ſi nunc ſimili modo omnes vires, quibus corpus hoc tempore ſollicitatur etiam ſecundum iſtas ternas directiones reſoluantur, atque ex omnibus coniunctis pro directionibus I A, I B, I C vires oriantur P, Q et R, per principia motus neceſſe

ceſſe eſt, vt iſtae vires aequentur ſummis omnium virium acceleratricium, quae ex omnibus corporis elementis dM iunctim ſumtis naſcuntur. Scilicet ſi g denotet altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, loco $2g$ autem ſcribamus litteram i, quoniam littera g iam tanquam functio temporis in calculum ingreditur impetrabimus tres aequationes ſequentes:

$$\int dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = iP$$
$$\int dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = iQ$$
$$\int dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = iR$$

vbi ſignum integrationis ſolas variabiles X, Y et Z reſpicit, ita vt in his integrationibus tempus t tanquam conſtans ſpectari debeat, etiamſi in formulis differentialibus id ſolum pro variabili eſt habitum. Praeterea vero etiam omnia momenta virium acceleratricium reſpectu ternorum axium fixorum ſimul ſumta aequari debent momentis, quae ex omnibus viribus ſollicitantibus reſpectu eorundem axium deducuntur; quamobrem deſignemus iſta momenta, quae ex omnibus viribus ſollicitantibus pro ternis axibus I A, I B, I C naſcuntur, litteris S, T, V, ita vt his quantitatibus per i multiplicatis ſummae omnium momentorum elementarium, quas ſingulae vires acceleratrices ſuppeditant aequari debeant.

§. 28. Cum igitur elemento dM, quod in puncto z concipimus, primo applicata ſit vis $= dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ ſecundum directionem I A agens, ex

ea

ea nullum naſcitur momentum pro hoc axe ; pro axe autem I B naſcetur momentum $= z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right)$ et pro axe I C momentum $= y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right)$. Simili modo ex vi acceleratrice ſecundum directionem I B, quae eſt $d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right)$ naſcitur momentum pro axe I A $= z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right)$, at pro axe I C momentum $= x\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right)$. Denique ex vi acceleratrice ſecundum I C, quae eſt $d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right)$ naſcitur momentum pro axe I A $= y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right)$ et pro axe I B momentum $= x\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right)$. Hinc igitur pro quolibet axe habemus bina momenta elementaria, quae in partes contrarias vergunt ; vnde pro axe I A ſumma omnium momentorum elementarium erit

$$+\int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) - \int y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right) = i\, S.$$

Eodem modo pro axe I B obtinebimus hanc aequationem:

$$\int x\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right) - \int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) = i\, T.$$

Tertia vero aequatio erit pro axe I C

$$\int y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) - \int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) = i\, U.$$

§. 29. Hac igitur ratione ſex nacti ſumus aequationes, quas hic coniunctim conſpectui exponamus

I. $\int d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) = i\, P$	IV. $\int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) - \int y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right) = i\, S$
II. $\int d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) = i\, Q$	V. $\int x\, d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right) - \int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) = i\, T$
III. $\int d\, M \left(\frac{d\, d\, z}{d\, t^2}\right) = i\, R$	VI. $\int y\, d\, M \left(\frac{d\, d\, x}{d\, t^2}\right) - \int z\, d\, M \left(\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}\right) = i\, U.$

In

In quibus formulis integralibus ſolae litterae maiuſculae X, Y et Z pro variabilibus habentur, dum contra in formulis differentialibus ſolae quantitates a tempore t pendentes tanquam variabiles ſpectantur.

§. 30. Vt nunc iſtas formulas rite euoluamus, pro ternis coordinatis x, y, z valores contractos §. 22. datos adhibeamus, et quoniam in formulis differentialibus quantitates X, Y, Z vt conſtantes ſpectantur habebimus

$$\frac{ddx}{dt^2} = \left(\frac{ddf}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddF}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddF'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)$$
$$\frac{ddy}{dt^2} = \left(\frac{ddg}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddG}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddG'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)$$
$$\frac{ddz}{dt^2} = \left(\frac{ddh}{dt^2}\right) + X\left(\frac{ddH}{dt^2}\right) + Y\left(\frac{ddH'}{dt^2}\right) + Z\left(\frac{ddH''}{dt^2}\right)$$

Facile autem intelligitur, ſi iſtos valores in ſuperioribus ſex aequationibus ſubſtituere vellemus, formas maxime diffuſas eſſe prodituras, quas tamen operae pretium erit hic adhibuiſſe.

§. 31. Subſtituamus ergo actu loco litterarum x, y, z et formularum $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ valores ante euolutos, et ſex aequationes noſtrae ſequenti modo exprimentur:

$$\text{I.}\quad iP = \left(\frac{ddf}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddF}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{ddF'}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{ddF''}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$\text{II.}\quad iQ = \left(\frac{ddg}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddG}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{ddG'}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{ddG''}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$\text{III.}\quad iR = \left(\frac{ddh}{dt^2}\right)\int dM + \left(\frac{ddH}{dt^2}\right)\int X\,dM + \left(\frac{ddH'}{dt^2}\right)\int Y\,dM + \left(\frac{ddH''}{dt^2}\right)\int Z\,dM$$

$$\text{IV. } iS = \left(\frac{hddg - gddh}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+\left(\frac{hddG - Gddh}{dt^2}\right)\int XdM + \left(\frac{Hddg - gddH}{dt^2}\right)\int XdM$$

$$+\left(\frac{hddG' - G'ddh}{dt^2}\right)\int YdM + \left(\frac{H'ddg - gddH'}{dt^2}\right)\int YdM$$

$$+\left(\frac{hddG'' - G''ddh}{dt^2}\right)\int ZdM + \left(\frac{H''ddg - gddH''}{dt^2}\right)\int ZdM$$

$$+\left(\frac{HddG - GddH}{dt^2}\right)\int X^2dM + \left(\frac{H'ddG' - G'ddH'}{dt^2}\right)\int Y^2dM$$

$$+\left(\frac{H''ddG'' - G''ddH''}{dt^2}\right)\int Z^2dM$$

$$+\left(\frac{H'ddG' - G'ddH'}{dt^2}\right)\int XYdM + \left(\frac{H'ddG - G'ddH}{dt^2}\right)\int XYdM$$

$$+\left(\frac{H'ddG'' - G''ddH'}{dt^2}\right)\int YZdM + \left(\frac{H''ddG' - G'ddH''}{dt^2}\right)\int YZdM$$

$$+\left(\frac{HddG'' - G''ddH}{dt^2}\right)\int XZdM + \left(\frac{H''ddG - GddH}{dt^2}\right)\int XZdM$$

$$\text{V. } iT = \left(\frac{fddh - hddf}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+\left(\frac{fddH - Hddf}{dt^2}\right)\int XdM + \left(\frac{Fddh - hddF}{dt^2}\right)\int XdM$$

$$+\left(\frac{fddH' - H'ddf}{dt^2}\right)\int YdM + \left(\frac{F'ddh - hddF'}{dt^2}\right)\int YdM$$

$$+\left(\frac{fddH'' - H''ddf}{dt^2}\right)\int ZdM + \left(\frac{F''ddh - hddF''}{dt^2}\right)\int ZdM$$

$$+\left(\frac{FddH - HddF}{dt^2}\right)\int X^2dM + \left(\frac{F'ddH' - H'ddF'}{dt^2}\right)\int Y^2dM$$

$$+\left(\frac{F''ddH'' - H''ddF''}{dt^2}\right)\int Z^2dM$$

$$+\left(\frac{FddH' - H'ddF}{dt^2}\right)\int XYdM + \left(\frac{F'ddH - HddF'}{dt^2}\right)\int XYdM$$

$$+\left(\frac{F'ddH'' - H''ddF'}{dt^2}\right)\int YZdM + \left(\frac{F''ddH' - H'ddF''}{dt^2}\right)\int YZdM$$

$$+\left(\frac{FddH'' - H''ddF}{dt^2}\right)\int XZdM + \left(\frac{F''ddH - HddF''}{dt^2}\right)\int XZdM$$

$$\text{VI. } iU = \left(\frac{gddf - fddg}{dt^2}\right)\int dM$$

$$+\left(\frac{gddF - Fddg}{dt^2}\right)\int XdM + \left(\frac{Gddf - fddG}{dt^2}\right)\int XdM$$

$$+\left(\frac{gddF' - F'ddg}{dt^2}\right)\int YdM + \left(\frac{G'ddf - fddG'}{dt^2}\right)\int YdM$$

$$+\left(\frac{gddF'' - F''ddg}{dt^2}\right)\int ZdM + \left(\frac{G''ddf - fddG''}{dt^2}\right)\int ZdM$$

$$+$$

$$+\left(\frac{G\,ddF - F\,ddG}{dt^2}\right)\int X^2\,dM + \left(\frac{G'\,ddF' - F'\,ddG'}{dt^2}\right)\int Y^2\,dM$$
$$+\left(\frac{G''\,ddF'' - F''\,ddG''}{dt^2}\right)\int Z^2\,dM$$
$$+\left(\frac{G\,ddF' - F'\,ddG}{dt^2}\right)\int XY\,dM + \left(\frac{G'\,ddF - F\,ddG'}{dt^2}\right)\int XY\,dM$$
$$+\left(\frac{G'\,ddF'' - F''\,ddG'}{dt^2}\right)\int YZ\,dM + \left(\frac{G''\,ddF' - F'\,ddG''}{dt^2}\right)\int YZ\,dM$$
$$+\left(\frac{G\,ddF'' - F''\,ddG}{dt^2}\right)\int XZ\,dM + \left(\frac{G''\,ddF - F\,ddG''}{dt^2}\right)\int XZ\,dM.$$

§. 32. In his ſex aequationibus formulae integrales, quae tantum ad ſtatum corporis initialem referuntur ante omnia per totam corporis maſſam ſunt extendendae; vnde earum loco in calculum ingredientur certae quantitates conſtantes, quas ex figura et indole cuiusque corporis definiri oportet. Veluti pro primis membris ſtatim prodit $\int dM = M$ vbi M maſſam totius corporis denotat. His igitur conſtantibus loco formularum integralium in noſtras aequationes introductis, aliae variabiles non amplius inerunt, niſi quae a ſolo tempore t pendent: ſemper enim aſſumi poteſt, omnes vires, quibus corpus ſollicitari ponimus, ad quoduis tempus eſſe datas. Quoniam vero hae ſex aequationes tantopere ſunt complicatae, praecipue ſi loco litterarum F, G, H etc. ſuos valores ſubſtituere vellemus, in genere nihil praeterea hinc concludere licebit.

§. 33. Ratio autem, cur iſtae aequationes tam prolixae euaſerunt manifeſto in eo eſt ſita, quod tam punctum I quam ternos axes I A, I B, I C in ſtatu initiali prorſus pro lubitu aſſumſimus. Si enim punctum I in ipſo centro grauitatis ſeu potius

 tius

tius inertiae collocamus, ob naturam huius centri ſtatim iſtae tres formulae integrales euaneſcunt

$$\int X\,dM = 0,\ \int Y\,dM = 0,\ \int Z\,dM = 0.$$

Si deinde praeterea ternos axes I A, I B, I C in ipſis axibus corporis principalibus conſtituamus, tum etiam tres ſequentes formulae integrales in nihilum abeunt

$$\int XY\,dM = 0,\ \int XZ\,dM = 0,\ \int YZ\,dM = 0$$

quibus igitur omnibus membris deletis noſtrae aequationes iam mirifice contrahentur.

§. 34. Remanebunt autem tantum iſtae tres formulae integrales

$$\int XX\,dM,\ \int YY\,dM \text{ et } \int ZZ\,dM,$$

quorum valores per totum corpus extenſos, ſi ponamus

$$\int XX\,dM = A,\ \int YY\,dM = B,\ \int ZZ\,dM = C$$

ſex noſtrae aequationes ad ſequentes formas reducentur

$$\text{I. } iP = M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right). \quad \text{II. } iQ = M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right). \quad \text{III. } iR = M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)$$

$$\text{IV. } iS = M\left(\frac{hddg - gddh}{dt^2}\right) + A\left(\frac{HddG - GddH}{dt^2}\right) + B\left(\frac{H'ddG' - G'ddH'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{H''ddG'' - G''ddH''}{dt^2}\right)$$

$$\text{V. } iT = M\left(\frac{fddh - hddf}{dt^2}\right) + A\left(\frac{FddH - HddF}{dt^2}\right) + B\left(\frac{F'ddH' - HddF'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{F''ddH'' - H''ddF''}{dt^2}\right)$$

$$\text{VI. } iU = M\left(\frac{gddf - fddg}{dt^2}\right) + A\left(\frac{GddF - FddG}{dt^2}\right) + B\left(\frac{G'ddF' - F'ddG'}{dt^2}\right) + C\left(\frac{G''ddF'' - F''ddG''}{dt^2}\right).$$

Plus autem hinc in genere pro viribus ſollicitantibus quibuscunque concludere non licet.

Appli-

Applicatio harum Formularum ad caſum quo corpus nullis plane viribus ſollicitatur.

§. 35. Conſtituto igitur puncto I in ipſo corporis centro grauitatis, ternae autem rectae I A, I B, I C ſimul corporis axes principales referant, dum ſcilicet in ſtatu initiali verſabatur; atque elapſo tempore $= t$ ob omnes vires P, Q, R et S, T, U euaneſcentes habebimus primo iſtas tres aequationes:

$$\text{I. } M\left(\frac{ddf}{dt^2}\right)=0, \quad \text{II. } M\left(\frac{ddg}{dt^2}\right)=0, \quad \text{III. } M\left(\frac{ddh}{dt^2}\right)=0$$

quae ſemel integratae praebent

$$\frac{df}{dt}=\mathfrak{a}, \quad \frac{dg}{dt}=\mathfrak{b} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dt}=\mathfrak{c}$$

ex quibus formulis cognoſcitur, motum centri grauitatis eſſe aequabilem, ideoque illi aequalem, qui ipſi initio fuerit impreſſus. Hinc autem porro integrando colligitur

$$f=\mathfrak{a}t, \quad g=\mathfrak{b}t \quad \text{et} \quad h=\mathfrak{c}t$$

ſicque via a centro grauitatis deſcripta erit linea recta I *i*.

§. 36. Tres autem reliquae aequationes ita ſe habebunt

$$\text{IV. } 0=A\frac{(HddG-GddH)}{dt^2}+B\frac{(H'ddG'-G'ddH')}{dt^2}+C\frac{(H''ddG''-G''ddH'')}{dt^2}$$

$$\text{V. } 0=A\frac{(FddH-HddF)}{dt^2}+B\frac{(F'ddH'-H'ddF')}{dt^2}+C\frac{(F''ddH''-H''ddF'')}{dt^2}$$

$$\text{VI. } 0=A\frac{(GddF-FddG)}{dt^2}+B\frac{(G'ddF'-F'ddG')}{dt^2}+C\frac{(G''ddF''-F''ddG'')}{dt^2}.$$

Vnde per integrationem ſtatim deducimus ſequentes

$$\mathfrak{A}dt=A(HdG-GdH)+B(H'dG'-G'dH')+C(H''dG''-G''dH'')$$

$$\mathfrak{B}dt=A(FdH-HdF)+B(F'dH'-H'dF')+C(F''dH''-H''dF'')$$

$$\mathfrak{C}dt=A(GdF-FdG)+B(G'dF'-F'dG')+C(G''dF''-F''dG'')$$

vbi conſtantes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ inuoluunt motum, qui corpori initio praeter motum centri grauitatis fuerit impreſſus.

§. 37. Tota igitur ſolutio perducta eſt ad iſtas tres aequationes differentiales primi gradus, quae cum praeter tempus t tantum continent tres variabiles: ſcilicet angulum Φ cum angulis α, β, γ, qui vti iam obſeruauimus duobus tantum aequiualent, quoniam eſt

$$\text{coſ.}\,\alpha^2 + \text{coſ.}\,\beta^2 + \text{coſ.}\,\gamma^2 = 1,$$

vnde patet, problema eſſe determinatum. Quod ſi enim integrationes ſucceſſerint, ad quod vis tempus iſtos angulos aſſignare licebit. Cognoſcetur enim per angulos α, β, γ poſitio illius axis corporis qui poſt tempus t eandem habet directionem, quam initio habuerat. Deinde vero angulus Φ oſtendet, quantam conuerſionem totum corpus circa iſtum axem IO ſubierit, quemadmodum in prima parte fuſius explicauimus.

§. 38. Quo autem facilius ipſos hos angulos in tres noſtras aequationes introducere queamus, quoniam omnia per coſinus angulorum α, β, γ commode exprimi poſſunt, ſtatuamus breuitatis gratia

$\text{coſ.}\,\alpha = p$, $\text{coſ.}\,\beta = q$ et $\text{coſ.}\,\gamma = r$, ita vt ſit
$pp + qq + rr = 1$ ideoque
$pdp + qdq + rdr = 0$.

Hinc igitur ſequentes habebimus determinationes pro litteris maiuſculis F, G, H etc. in noſtras aequationes ingredientibus

$F = p$

$F = pp(1-\text{coſ.}\Phi)+\text{coſ.}\Phi$; $F' = pq(1-\text{coſ.}\Phi)-r\,\text{ſin.}\Phi$;
$F'' = pr(1-\text{coſ.}\Phi)+q\,\text{ſin.}\Phi$

$G = pq(1-\text{coſ.}\Phi)+r\,\text{ſin.}\Phi$; $G' = qq(1-\text{coſ.}\Phi)+\text{coſ.}\Phi$;
$G'' = qr(1-\text{coſ.}\Phi)-p\,\text{ſin.}\Phi$

$H = pr(1-\text{coſ.}\Phi)-q\,\text{ſin.}\Phi$; $H' = qr(1-\text{coſ.}\Phi)+p\,\text{ſin.}\Phi$;
$H'' = rr(1-\text{coſ.}\Phi)+\text{coſ.}\Phi$.

§. 39. Videamus igitur, quomodo hos valores commodiſſime in noſtris aequationibus ſubſtituere queamus; vbi ſtatim intelligitur, formulam primam $H\,dG - G\,dH$ oriri ex differentiatione fractionis $\frac{G}{H}$ omiſſa diuiſione per quadratum denominatoris. Cum igitur ſit

$$\frac{G}{H} = \frac{pq(1-\text{coſ.}\Phi)+r\,\text{ſin.}\Phi}{pr(1-\text{coſ.}\Phi)-q\,\text{ſin.}\Phi}$$

differentiationem more ſolito inſtituendo prodibit ſequens forma:

$$pp(1-\text{coſ.}\Phi)^2(rdq-qdr)-prrd\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)-qqd\,\text{ſin.}\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)$$
$$-pqqd\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)-\text{ſin.}\Phi^2(qdr-rdq)-rrdp\,\text{ſin.}\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)$$

quae contrahitur in hanc formam:

$$(rdq-qdr)(pp(1-\text{coſ.}\Phi)^2+\text{ſin.}\Phi^2)-dp(1-pp)\text{ſin.}\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)$$
$$-p(1-pp)d\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)$$

quae expreſſio ergo eſt valor formulae $H\,dG - G\,dH$.

§. 40. Secunda formula $H'dG' - G'dH'$, deducitur ex differentiatione fractionis

$$\frac{G'}{H'} = \frac{qq(1-\text{coſ.}\Phi)+\text{coſ.}\Phi}{qr(1-\text{coſ.}\Phi)+p\,\text{ſin.}\Phi}$$

vnde oritur ſequens expreſſio:

$$qq(1-\text{coſ.}\Phi)^2(rdq-qdr)-\text{coſ.}\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)(qdr+rdq)$$
$$-qrd\Phi\,\text{ſin.}\Phi+\text{ſin.}\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)(2pqdq-qqdp)$$
$$+pqqd\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)-pd\Phi-dp\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\Phi$$ quae

quae reducitur ad ſequentem formam:

$$\begin{aligned}&-dp\sin\Phi(qq(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)+dq(1-\cos\Phi)(rqq\\&-r\cos\Phi(1+qq)+2pq\sin\Phi)-qdr(1-\cos\Phi)(qq(1-\cos\Phi)\\&+\cos\Phi)-d\Phi(qr\sin\Phi-pqq(1-\cos\Phi)+p).\end{aligned}$$

§. 41. Tertia denique formula $H''ddG''-G''ddH''$ formabitur ex fractione

$$\frac{G''}{H''}=\frac{qr(1-\cos\Phi)-p\sin\Phi}{rr(1-\cos\Phi)+\cos\Phi}$$

Sufficiet enim has tres formulas euoluiſſe, quoniam ſequentes per analogiam inde deducere licebit; at differentiatione inſtituta prodit iſta forma:

$$\begin{aligned}&rr(1-\cos\Phi)^2(rdq-qdr)-prrd\Phi\cos\Phi(1-\cos\Phi)\\&+prrd\Phi\sin\Phi^2+(qdr+rdq)\cos\Phi(1-\cos\Phi)\\&+qrd\Phi\sin\Phi\cos\Phi+qrd\Phi\sin\Phi(1-\cos\Phi)-dp\sin\Phi\cos\Phi\\&-pd\Phi\cos\Phi^2-pd\Phi\sin\Phi^2+2prdr\sin\Phi(1-\cos\Phi)\\&-rrdp\sin\Phi(1-\cos\Phi)\end{aligned}$$

quae contrahitur in iſtam

$$\begin{aligned}&-dp\sin\Phi(rr(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)+rdq(1-\cos\Phi)(rr(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)\\&+dr(1-\cos\Phi)(2pr\sin\Phi-qrr+q\cos\Phi(1+rr))\\&+d\Phi(qr\sin\Phi+prr(1-\cos\Phi)-p).\end{aligned}$$

§. 42. Subſtituantur nunc hi valores in aequatione $\mathfrak{A}dt$, ac prodibit ſequens aequatio:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}dt=&-Adp(1-pp)\sin\Phi(1-\cos\Phi)+Ardqpp(1-\cos\Phi)^2\\&+\sin\Phi)^2-Aqdr(pp(1-\cos\Phi)^2+\sin\Phi)^2\\&-Ad\Phi(p(1-pp)(1-\cos\Phi)-Bdp\sin\Phi(qq(1-\cos\Phi)\\&+\cos\Phi)+Bdq(1-\cos\Phi)(rqq-r\cos\Phi(1+qq)+2pq\sin\Phi)\\&-Bqdr(1-\cos\Phi)(qq(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)-Bd\Phi(qr\sin\Phi\\&-pqq(1-\cos\Phi)+p)-Cdp\sin\Phi(rr(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)\\&+Crdq(1-\cos\Phi)(rr(1-\cos\Phi)+\cos\Phi)\\&+Cdr(1-\cos\Phi)(2pr\sin\Phi-qrr+q\cos\Phi(1+rr))\\&+Cd\Phi(qr\sin\Phi+prr(1-\cos.)-p).\end{aligned}$$

Ex

Ex hac autem aequatione binae reliquae formabuntur, ſi littere

A, B, C, p, q, r promouentur primo in

B, C, A, q, r, p, ſecundo in

C, A, B, r, p, q.

Forma autem illa etiam ſequenti modo commodius exhiberi poteſt

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}dt = &+dp\,\sin.\Phi(1-\cos.\Phi)(App-Bqq-Crr)\\ &+dp\sin\Phi\cos\Phi(A-B-C)-A\,dp\,\sin.\Phi+rdq(1-\cos\Phi)^2(App\\ &+Bqq+Crr)+rdq\cos.\Phi(1-\cos.\Phi)(A-B+C)\\ &+Ardq(1-\cos.\Phi)+2Bpqdq\sin.\Phi(1-\cos.\Phi)\\ &-qdr(1-\cos.\Phi)^2(App+Bqq+Crr)\\ &-qdr\cos.\Phi(1-\cos.\Phi)(A+B-B)-Aqdr(1-\cos.\Phi)\\ &+2Cprdr\sin.\Phi(1-\cos.\Phi)+pd\Phi(1-\cos\Phi)(App+Bqq\\ &+Crr)-qrd\Phi\sin.\Phi(B-C)-pd\Phi(A+B+C)+Apd\Phi\cos.\Phi.\end{aligned}$$

§ 43. Quia autem in his aequationibus iam per ſe valde prolixis variabiles p, q, r et Φ nimis inter ſe ſunt permixtae, quam vt reſolutio generalis ſuſcipi queat, euoluamus ante omnia caſum, quo corpus circa axem fixum gyrari poteſt; qui cum conuenire debeat cum axe ſupra conſiderato I O, anguli α, β, γ ideoque etiam litterae p, q, r pro conſtantibus ſunt habendae, vnde deletis membris, quae differentialia dp, dq, dr implicant, ternae aequationes ad hunc caſum erunt

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}dt = pd\Phi(1-\cos.\Phi)(App+Bqq+Crr)-qrd\Phi(B-C)\\ -pd\Phi(A+B+C)+Apd\Phi\cos.\Phi\\ \mathfrak{B}dt = qd\Phi(1-\cos.\Phi)(App+Bqq+Crr)-rpd\Phi(C-A)\\ -qd\Phi(A+B+C)+Bqd\Phi\cos.\Phi\end{aligned}$$

$$\mathfrak{C}dt = rd\Phi(1-\text{coſ.}\Phi)(App+Bqq+Crr) - pqd\Phi\,\text{ſin.}\Phi(A-B)$$
$$-rd\Phi(A+B+C)+Crd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

§. 44. Cum igitur corpus tali motu gyrari poſſit, ſi axis gyrationis incidat in aliquem axem principalem, ponamus eum incidere in axem I A ita vt ſit $p=1$, $q=0$, et $r=0$, vnde tres noſtrae aequationes euadent

$$\mathfrak{A}dt = Ad\Phi(1-\text{coſ.}\Phi) - d\Phi(A+B+C) + Ad\Phi\,\text{coſ.}\Phi$$

ſiue

$$\mathfrak{A}\,dt = -d\Phi(B+C)$$
$$\mathfrak{B}\,dt = 0$$
$$\mathfrak{C}\,dt = 0.$$

Hinc igitur ſtatim patet, hunc caſum vtique locum habere poſſe, ſumtis conſtantibus $\mathfrak{B}=0$ et $\mathfrak{C}=0$; tum vero $d\Phi = \frac{-\mathfrak{A}\,dt}{B+C}$, quamobrem angulus Φ tempori erit proportionalis, ſeu motus erit vniformis, vti per ſe eſt manifeſtum.

§. 45. Porro vero etiam notum eſt, corpus circa omnes axes libere gyrari poſſe, ſi omnia momenta fuerint aequalia, hoc eſt $A=B=C$, vnde hae produnt aequationes

$$\frac{\mathfrak{A}\,dt}{A} = -2pd\Phi;\ \frac{\mathfrak{B}\,dt}{A} = -2qd\Phi;\ \frac{\mathfrak{C}\,dt}{A} = -2rd\Phi$$

vnde manifeſtum eſt fore $\frac{d\Phi}{dt}$ quantitatem conſtantem, ideoque motum gyratorium aequabilem. Quod ſi ergo ſtatuatur $\frac{d\Phi}{dt}=\Delta$, hinc reperiemus ipſas quantitates p, q, r; erit enim

$$p = -\frac{\mathfrak{A}}{2A\Delta};\ q = -\frac{\mathfrak{B}}{2A\Delta};\ r = -\frac{\mathfrak{C}}{2A\Delta},$$

quare

quare cum ſit $pp + qq + rr = 1$ erit

$$\Delta = \frac{1}{2A} \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2},$$

ſicque omnia per ternas conſtantes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ſunt determinata.

§. 46. Iidem valores prodire debent ex tribus noſtris aequationibus, ſi etiam quantitates p, q, r vt variabiles ſpectantur; pro caſu $A = B = C$; tum autem aequatio prima erit

$$\frac{\mathfrak{A}dt}{A} = +2dp \sin.\Phi(pp(1-\cos.\Phi)-1) + 2dq(1-\cos.\Phi)(r+pq\sin\Phi)$$
$$-2dr(1-\cos.\Phi)(q-pr\sin.\Phi) - 2pd\Phi$$

quae ob $pdp + qdq + rdr = 0$ reducitur ad hanc formam:

I. $\frac{\mathfrak{A}dt}{A} = -2dp\sin.\Phi + 2(1-\cos.\Phi)(rdq - qdr) - 2pd\Phi$

vnde duae reliquae per analogiam erunt

II. $\frac{\mathfrak{B}dt}{A} = -2dq\sin.\Phi + 2(1-\cos.\Phi)(pdr - rdp) - 2qd\Phi$

III. $\frac{\mathfrak{C}dt}{A} = -2dr\sin.\Phi + 2(1-\cos.\Phi)(qdp - pdq) - 2rd\Phi$

atque iam certi eſſe poſſumus, his aequationibus aliter ſatisfieri non poſſe niſi modo ante expoſito, quo p, q, r ſint quantitates conſtantes, angulus vero Φ tempori proportionalis.

§. 47. Ad hoc oſtendendum eliminemus primo elementum $d\Phi$, ac I. q — II. p praebet

$$\frac{\mathfrak{A}qdt - \mathfrak{B}pdt}{A} = -2\sin.\Phi(qdp - pdq) - 2dr(1-\cos.\Phi)$$

Similimodo II. r — III. q dat

$$\frac{\mathfrak{B}rdt - \mathfrak{C}qdt}{A} = -2\sin.\Phi(rdq - qdr) - 2dp(1-\cos.\Phi)$$

 quibus

quibus adiungi poteſt haec combinatio: III. p − I. r quae dat

$$\frac{\mathfrak{C}pdt - \mathfrak{A}rdt}{A} = -2\,\text{ſin.}\Phi(pdr - rdp) - 2dq(1 - \text{coſ}\,\Phi)$$

Atque nunc quidem euidens eſt, his aequationibus ſatisfieri, ſtatuendo quantitates p, q, r conſtantes. Interim tamen hinc non liquet, quod nulla alia ſolutio locum habere poſſit. Quam ob rem hinc enaſcitur inſigne Problema analyticum, quomodo haec ſolutio ex iſtis formulis deriuari debeat, id quod Geometris imprimis commendari meretur.

§. 48. Ob has igitur difficultates, quae in caſu facillimo, vbi A = B = C, moram faceſſunt, multo minus euolutionem generalem tentare licebit; quare, cum aliunde certi ſimus, etiam in genere ſuccedere debere, quandoquidem eam ope prioris methodi, qua olim ſum vſus ad finem perducere contigit, nullum eſt dubium, quin certa dentur artificia analytica nobis adhuc incognita, quae ad hunc ſcopum perducere valeant. Quia vero talia artificia non ſolum maximam ſagacitatem, ſed etiam aciem oculorum poſtulant, hanc inueſtigationem aliis relinquere ſum coactus; quandoquidem hoc argumentum ſumma attentione Geometrarum dignum eſt iudicandum.

§. 49. Fortaſſe etiam non parum ad felicem ſucceſſum conferre poterit, ſi, antequam loco litterarum primo introductarum F, G, H valores ſuos ſubſtituamus, earum relationes mutuas accuratius perpen-

pendamus: forſitan enim hinc iam via commodior ſeſe offeret hoc negotium conficiendi. Cum igitur illarum litterarum valores inuenti ſint iſti

$F = pp(1-\text{coſ.}\Phi) + \text{coſ}\,\Phi$; $F' = pq(1-\text{coſ.}\Phi) - r\,\text{ſin.}\Phi$;
$F'' = pr(1-\text{coſ.}\Phi) + q\,\text{ſin.}\Phi$

$G = pq(1-\text{coſ.}\Phi) + r\,\text{ſin.}\Phi$; $G' = qq(1-\text{coſ.}\Phi) + \text{coſ.}\Phi$;
$G'' = qr(1-\text{coſ.}\Phi) - p\,\text{ſin.}\Phi$

$H = pr(1-\text{ſin.}\Phi) - q\,\text{coſ.}\Phi$; $H' = qr(1-\text{coſ.}\Phi) + p\,\text{ſin.}\Phi$;
$H'' = rr(1-\text{coſ.}\Phi) + \text{coſ}\,\Phi$

ob $pp + qq + rr) = 1$ erit $F + G' + H'' = 1 + 2\,\text{coſ.}\Phi$.

Tum vero inter reliquas ſex harum litterarum binae egregiae inter ſe conueniunt, vnde ſequuntur ſequentes relationes

$$G + F' = 2\,p\,q\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$G - F' = 2\,r\,\text{ſin.}\,\Phi$$
$$H + F'' = 2\,p\,r\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$- H + F'' = 2\,q\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$H' + G'' = 2\,q\,r\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$H' - G'' = 2\,p\,\text{ſin.}\,\Phi$$

hinc igitur porro erit

$$GG - F'F' = F''F'' - HH = H'H' - G''G'' = 4pqr\,\text{ſin.}\Phi(1 - \text{coſ.}\Phi)$$

Praeterea vero hinc eiusmodi combinationes formari poterunt, in quibus ſolus angulus Φ inſit, cuiusmodi ſunt

$$\frac{(F'' - H)(H' - G'')}{G + F'} = 2\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$\frac{(G - F')(H' - G'')}{H + F''} = 2\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi)$$
$$\frac{(G - F')(F'' - H)}{H' + G''} = 2\,(1 + \text{coſ.}\,\Phi).$$

 Caete-

Caeterum hoc argumentum digniſſimum videtur, quod omni ſtudio excolatur; cum inde non ſolum in Mechanica ſed etiam in Analyſi egregia incrementa expectari queant.

§. 50. Antequam hoc argumentum penitus deſeram fortaſſe haud abs re erit annotaſſe, ternas aequationes §. 46. ſatis commode ad duas reuocari poſſe, dum variabilis t, cuius differentiale tantum ingreditur penitus eliminatur, id quod facillime effici poterit primam aequationem per p, ſecundam per q et tertiam per r multiplicando; tum enim prodibit ſequens aequatio ſatis concinna:

$$\frac{\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}r}{A}\, dt + 2\, d\Phi = 0,$$

vnde ſtatim fit

$$dt = -\frac{2\, A\, d\Phi}{\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}r},$$

qui valor in duabus tantum aequationibus ſubſtitutus ſuppeditabit duas nouas aequationes, in quibus tantum tres variabiles inſunt; quarum bina per tertiam determinari oporteret: interim tamen nulla via patet, quomodo hoc commode praeſtari poſſit; praecipue hac ratione ſolutio illa ſimplex, quae iam a priori conſtat, prorſus excluderetur. Quia enim quantitates p, q, r ſunt conſtantes, angulus vero Φ tempori proportionalis, neutiquam fieri poteſt, vt iſte angulus per quantitates p, q, r, exprimatur. Hanc igitur ob cauſſam iſta inueſtigatio omnino deſerenda videtur, praecipue cum huius quaeſtionis ope methodi olim vſitatae iam completam ſolutionem elicuerim, qua igitur acquieſcere debemus.

THEORE-

THEOREMATA NONNVLLA GENERALIA DE TRANSLATIONE CORPORVM RIGIDORVM.

Auctore

A. I. LEXELL.

I.

Cum Illuſtr. *Eulerus* de translatione corporum rigidorum nuper agens, elegantiſſimam hanc detexiſſet proprietatem, quod in quacunque translatione corporis rigidi, ſemper detur linea recta, quae ſitum teneat parallelum ei, quem in ſtatu initiali habuit; ſimulque oſtendiſſet vt hoc locum inueniat, expreſſionem quandam Analyticam ad nihilum redigi debere, quod tamen quomodo fiat, ob terminos qui hanc expreſſionem ingrediuntur complicatiores, aliis penitius enucleandum relinquere eſt coactus; admonitione itaque Illuſtr. Viri incitatus in animum induxi, vt demonſtrationem inueſtigarem, qua perſpicue oſtendi poſſet, aequationi iſti Analyticae in omni translatione corporis rigidi ſatisfieri, ſicque etiam ex principiis Analyticis egregiam iſtam veritatem prorſus extra dubium poni, quod in ſitu translato detur talis recta, quae parallelum teneat ſitum

ſitum ei, quem in ſtatu initiali habuit. Dum igitur hanc demonſtrationem heic explicandam conſtitui, e re eſſe duxi nonnullas quoque alias meditationes de translatione corporum praemittere; partim quia ad iſtam demonſtrationem inueniendam viam mihi praepararerunt, tum etiam quod inſeruire poterunt, ad vberius confirmanda, quae Illuſtr. *Eulerus* de hac translatione docuit.

Lemma I.

2. *Sumtis in ſuperficie ſphaerica tribus punctis* A, B, C *quadrantibus a ſe inuicem diſtantibus, ſi bina quaecunque alia puncta* M, N *in eadem ſuperficie aſſumta, tam inter ſe, quam cum illis punctis* A, B, C *arcubus circulorum maximorum iungantur, erit:*

Tab. III. Fig. 1. et 2.

$$\cos. MN = \cos. AM \cos. AN + \cos. BM \cos. BN + \cos. CM \cos. CN.$$

Demonſtratio.

Concipiantur arcus AM, AN producti vsque dum circulo maximo BC occurrant in P et Q. Quum igitur ſit

$$\cos. MN = \cos. AM . \cos. AN + \sin. AM \sin. AN \cos. MAN,$$

Fig. 1. angulus autem MAN ſit vel $= MAC - NAC$, vel $MAC + NAC$ vtrumque hunc caſum ſeorſim conſiderabimus. Sit igitur *primo*

$MAN = MAC - NAC$, eritque

$$\cos. MAN = \cos. MAC . \cos. NAC + \sin. MAC \sin. NAC,$$

hoc igitur valore pro cos. MAN ſubſtituto, conſequemur

quemur

$$\text{coſ. } MN = \text{coſ. } AM \text{ coſ. } AN + \text{ſin. } AM.\ \text{ſin. } AN$$
$$(\text{coſ. } MAC.\ \text{coſ. } NAC + \text{ſin } MAC.\ \text{ſin } NAC).$$

Eſt vero,

$$\text{ſin. } AM \text{ coſ. } MAC = \text{coſ. } MP.\ \text{coſ. } PC = \text{coſ. } MC$$
$$\text{ſin. } AN \text{ coſ. } NAC = \text{coſ. } NQ.\ \text{coſ. } QC = \text{coſ. } NC$$
$$\text{ſin } AM.\ \text{ſin. } MAC = \text{coſ. } MP.\ \text{coſ. } BP = \text{coſ. } BM$$
$$\text{ſin. } AN.\ \text{ſin. } NAC = \text{coſ. } NQ.\ \text{coſ. } BQ = \text{coſ. } BN$$ Tab. III. Fig. 2.

ex quo euidenter colligitur,

$$\text{coſ. } MN = \text{coſ. } AM.\ \text{coſ. } AN + \text{coſ. } BM \text{ coſ. } BN + \text{coſ. } CM \text{ coſ. } CN.$$

Secundo ſi ſit $MAN = MAC + NAC$ erit,

$$\text{coſ. } MAN = \text{coſ. } MAC \text{ coſ. } NAC - \text{ſin. } MAC \text{ ſin } NAC,$$ hinc

$$\text{coſ. } MN = \text{coſ. } AM \text{ coſ. } AN + \text{ſin. } AM.\ \text{ſin. } AN (\text{coſ. } MAC.$$
$$\text{coſ. } NAC - \text{ſin. } MAC \text{ ſin. } NAC),$$

tum vero erit

$$\text{ſin. } AM.\ \text{coſ. } MAC = \text{coſ. } MP \text{ coſ } CP = \text{coſ. } CM$$
$$\text{ſin. } AN.\ \text{coſ. } NAC = \text{coſ. } NQ \text{ coſ. } CQ = \text{coſ. } CN$$
$$\text{ſin. } AM.\ \text{ſin. } MAC = \text{coſ. } MP \text{ coſ } BP = \text{coſ. } BM$$
$$\text{ſin } AN.\ \text{ſin. } NAC = -\text{coſ. } NQ \text{ coſ. } BQ = -\text{coſ } BN$$

ex quo etiam nunc ſit

$$\text{coſ. } MN = \text{coſ. } AM.\ \text{coſ. } AN + \text{coſ. } BM \text{ coſ. } BN + \text{coſ. } CM \text{ coſ. } CN.$$

Theorema 1.

3. *Si ſphaera circa centrum ſuum fixum vtcunque conuertatur, vt puncta* A, B, C *quadrantibus inter ſe diſtantia perueniant in puncta* a, b, c, *tum punctum quodcunque* Z *ita transferetur in* z, *vt ſit*

$$\text{coſ. } zA = \text{coſ. } ZA \text{ coſ. } Aa + \text{coſ. } ZB \text{ coſ. } Ab + \text{coſ. } ZC \text{ coſ. } Ac$$
$$\text{coſ. } zB = \text{coſ. } ZA \text{ coſ. } Ba + \text{coſ. } ZB \text{ coſ. } Bb + \text{coſ. } ZC.\ \text{coſ } Bc$$
$$\text{coſ. } zC = \text{coſ. } ZA \text{ coſ. } Ca + \text{coſ. } ZB \text{ coſ. } Cb + \text{coſ. } ZC.\ \text{coſ. } Cc.$$

 Demon-

Demonſtratio.

Quia ſitus puncti z reſpectu punctorum a, b, c idem eſt, ac ſitus puncti Z reſpectu punctorum A, B, C, erit $za = ZA$; $zb = ZB$; $zc = ZC$. Per Lemma autem modo demonſtratum conſtat eſſe

$$\text{coſ.}\, zA = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Aa + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Ab + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Ac$$
$$\text{coſ.}\, zB = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Ba + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Bb + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Bc$$
$$\text{coſ.}\, zC = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, Ca + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, Cb + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, Cc$$

vnde ſi pro za, zb, zc ſubſtituantur ZA, ZB, ZC, prodibunt aequalitates in Theoremate noſtro expreſſae.

4. Conſimili quoque ratione oſtendi poteſt eſſe:

$$\text{coſ.}\, Za = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, aA + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, aB + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, aC$$
$$\text{coſ.}\, Zb = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, bA + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, bB + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, bC$$
$$\text{coſ.}\, Zc = \text{coſ.}\, za\, \text{coſ.}\, cA + \text{coſ.}\, zb\, \text{coſ.}\, cB + \text{coſ.}\, zc\, \text{coſ.}\, cC$$

per quas formulas puncti Z in ſtatu initiali ſitus, ad puncta a, b, c determinatur.

5. Si punctum z in ipſum Z incidat, ideoque Z ſit punctum quod poſt conuerſionem ſphaerae eundem tenet ſitum, ac in ſtatu initiali, aequationes ſupra in Theoremate allatae, in has transformabuntur:

$$\text{coſ.}\, ZA(\text{coſ.}\, Aa - 1) + \text{coſ.}\, ZB\, \text{coſ.}\, Ab + \text{coſ.}\, ZC\, \text{coſ.}\, Ac = 0$$
$$\text{coſ.}\, ZA\, \text{coſ.}\, Ba + \text{coſ.}\, ZB(\text{coſ.}\, Bb - 1) + \text{coſ.}\, ZC\, \text{coſ.}\, Bc = 0$$
$$\text{coſ.}\, ZA\, \text{coſ.}\, Ca + \text{coſ.}\, ZB\, \text{coſ.}\, Cb + \text{coſ.}\, ZC(\text{coſ.}\, Cc - 1) = 0.$$

Nunc ſi breuitatis gratia, loco harum aequationum ſequentes adhibeantur:

$$\text{I.}\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0;\quad \text{II.}\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0;$$
$$\text{III.}\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma' z = 0$$

vbi

vbi $x = \text{coſ. A Z}$; $y = \text{coſ. B Z}$; $z = \text{coſ. C Z}$
$\alpha = \text{coſ.}\,Aa - 1$; $\beta = \text{coſ.}\,Ab$; $\gamma = \text{coſ.}\,Ac$; $\alpha' = \text{coſ.}\,Ba$; $\beta' = \text{coſ.}\,Bb - 1$; $\gamma' = \text{coſ.}\,Bc$; $\alpha'' = \text{coſ.}\,Ca$; $\beta'' = \text{coſ.}\,Cb$; $\gamma'' = \text{coſ.}\,Cc - 1$,

ex prima et ſecunda inter ſe comparatis, obtinemus

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta'}{\alpha'}\right) y + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma'}{\alpha'}\right) z = 0,$$

tumque ex prima et tertia

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta''}{\alpha''}\right) y + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma''}{\alpha''}\right) z = 0,$$

vnde per priorem colligitur

$\frac{y}{z} = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\beta\alpha' - \beta'\alpha}$ et per poſteriorem $\frac{y}{z} = \frac{\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma}{\beta\alpha'' - \alpha\beta''}$, quibus valoribus inter ſe aequatis, prodit haec aequatio:

$$(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') = (\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma)(\beta\alpha' - \beta'\alpha),$$

quae euolutione facta in ſequentem contrahitur:

$$\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma + \alpha''\beta\gamma' + \alpha'\beta''\gamma = 0.$$

Introductis vero nunc pro α, β, γ etc. valoribus quibus aequales ſupponebantur, aequatio noſtra ſic habebitur expreſſa:

$$(\text{coſ}\,Aa - 1)(\text{coſ.}\,Bb - 1)(\text{coſ.}\,Cc - 1) - \text{coſ.}\,Bc\,\text{coſ.}\,Cb(\text{coſ.}\,Aa - 1)$$
$$- \text{coſ.}\,Ba\,\text{coſ.}\,Ab(\text{coſ.}\,Cc - 1) - \text{coſ.}\,Ca\,\text{coſ.}\,Ac(\text{coſ.}\,Bb - 1)$$
$$+ \text{coſ.}\,Ca\,\text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Bc + \text{coſ.}\,Ba\,\text{coſ.}\,Ac\,\text{coſ.}\,Cb = 0.$$

Haec autem aequatio perfecte congruit cum illa expreſſione Analytica, quam Illuſtr. *Eulerus* in Diſſertatione de translatione corporum rigidorum §. 22. adfert, modo obſeruetur quantitates per F, G, H etc. ibi expreſſas, heic ita indigitari, vt ſit:

$$F = \text{coſ.}\,Aa;\ G = \text{coſ.}\,Ba;\ H = \text{coſ.}\,Ca$$
$$F' = \text{coſ.}\,Ab;\ G' = \text{coſ.}\,Bb;\ H' = \text{coſ.}\,Cb$$
$$F'' = \text{coſ.}\,Ac;\ G'' = \text{coſ.}\,Bc;\ H'' = \text{coſ.}\,Cc.$$

Quamuis autem ex ipſa Diſſertatione modo allata haec identitas non perfecte innoteſcat, infra occaſio dabitur oſtendendi, quod illa omnino locum habeat. Interim obſeruare iuuat, relationes illas pro litteris F, G, H etc. ab Illuſtr. *Eulero* allatas in §. 18. Diſſertationis ſuae, omnino locum habere, ſi his litteris valores mox aſſignati tribuantur. Eſt enim

$$\text{I.}\quad \text{coſ.}\,Aa^2 + \text{coſ.}\,Ba^2 + \text{coſ.}\,Ca^2 = 1$$
$$\text{II.}\quad \text{coſ.}\,Ab^2 + \text{coſ.}\,Bb^2 + \text{coſ.}\,Cb^2 = 1$$
$$\text{III.}\quad \text{coſ.}\,Ac^2 + \text{coſ.}\,Bc^2 + \text{coſ.}\,Cc^2 = 1,$$

tumque per Lemma noſtrum I:

$$\text{IV.}\ \text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Ab + \text{coſ.}\,Ba\,\text{coſ.}\,Bb + \text{coſ.}\,Ca\,\text{coſ.}\,Cb = \text{coſ.}\,ab = 0$$
$$\text{V.}\ \text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Ac + \text{coſ.}\,Ba\,\text{coſ.}\,Bc + \text{coſ.}\,Ca\,\text{coſ.}\,Cc = \text{coſ.}\,ac = 0$$
$$\text{VI.}\ \text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Ac + \text{coſ.}\,Bb\,\text{coſ.}\,Bc + \text{coſ.}\,Cb\,\text{coſ.}\,Cc = \text{coſ.}\,bc = 0.$$

6. Quod ſi iam demonſtrari queat, in omni conuerſione ſphaerae circa centrum ſuum fixum, expreſſionem iſtam

$$(1-\text{coſ.}\,Aa)(1-\text{coſ.}\,Bb)(1-\text{coſ.}\,Cc) + \text{coſ.}\,Bc\,\text{coſ.}\,Cb(1-\text{coſ.}\,Aa)$$
$$+ \text{coſ.}\,Ac\,\text{coſ.}\,Ca(1-\text{coſ.}\,Bb) + \text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Ba(1-\text{coſ.}\,Cc)$$
$$- \text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Bc\,\text{coſ.}\,Ca - \text{coſ.}\,Ac\,\text{coſ.}\,Cb\,\text{coſ.}\,Ba$$

ad nihilum redigi; patebit omnino exiſtere in eius ſuperficie aliquod punctum Z, quod poſt conuerſionem in eodem ſit loco, ac in ſtatu initiali reperiebatur. Verum antequam hanc demonſtrationem ſuſcipia-

cipiamus, operae pretium erit explicare, quomodo formulae Theorematis noſtri primi ad exprimendam translationem puncti cuiuslibet in corpore rigido adhiberi queant. Heic autem obſeruamus, omnem translationem corporis rigidi duplicis eſſe generis, quorum prius eam complectitur loci mutationem, qua omnes corporis particulae ſecundum directiones inuicem parallelas feruntur, quae translatio alioquin nomine motus progreſſiui venire ſolet. Poſterius vero translationis genus in ſe continet conuerſionem corporis circa punctum quoddam fixum, vbi quidem perinde eſt, ſiue hoc punctum intra ipſum corpus, ſeu extra id aſſumi concipiatur. Mentem igitur ſi primo abſtrahamus a motu progreſſiuo, ſolam conuerſionem circa punctum fixum conſiderantes, concipiamus punctum illud fixum eſſe in I et per hoc punctum duci ternos axes I A, I B, I C inter ſe normales, ad quos ſitus puncti cuiuslibet corporis Z, in ſtatu initiali referatur per ternas coordinatas I X, X Y, Y Z, tum vero ſupponamus conuerſione corporis facta circa punctum I, punctum Z perueniſſe in z, huiusque ſitum determinari per coordinatas I x, xy, yz, exiſtente diſtantia I z = I Z, quam diſtantiam littera s deſignemus. Si nunc intelligatur, ſphaeram cum corpore noſtro firmiter eſſe connexam, cuius centrum ſit in I et ſemidiameter aequalis ipſi s, axes vero I A, I B, I C occurrere huic ſphaerae in punctis A, B, C, haecque puncta conuerſione corporis facta circa I in puncta a, b, c perueniſſe; facile patet angulos A I z, B I z,

Tab. VI. Fig. 5.

Fig. 5. et 4.

B I z, C I z Fig. 5. reſpectiue aequales eſſe arcubus A z, B z, C z Fig. 4. Atqui eſt

$$\frac{\mathrm{I}\,x}{\mathrm{I}\,z} = \text{coſ. B I } z = \text{coſ. B} z;\ \frac{x\,y}{\mathrm{I}\,z} = \text{coſ. C I } z = \text{coſ. C} z;$$

$$\frac{z\,y}{\mathrm{I}\,z} = \text{coſ. A I } z = \text{coſ. A} z,$$

quare ſi dicantur,

$\mathrm{I}\,x = x$; $x\,y = y$; $y\,z = z$, conſequemur

$$\frac{x}{s} = \text{coſ. B } z;\ \frac{y}{s} = \text{coſ. C } z;\ \frac{z}{s} = \text{coſ. A } z.$$

Simili modo fiet

$$\frac{\mathrm{I\,X}}{\mathrm{I\,Z}} = \text{coſ B Z};\ \frac{\mathrm{X\,Y}}{\mathrm{I\,Z}} = \text{coſ. C Z};\ \frac{\mathrm{Z\,X}}{\mathrm{I\,Z}} = \text{coſ. A Z},$$

vnde ſi I X, X Y, Y Z reſpectiue exprimantur per litteras X, Y, Z obtinebimus:

$$\frac{\mathrm{X}}{s} = \text{coſ. B Z};\ \frac{\mathrm{Y}}{s} = \text{coſ. C Z};\ \frac{\mathrm{Z}}{s} = \text{coſ. A Z}.$$

Hinc ope formularum Theorematis noſtri primi, ſequentes pro x, y, z deducimus expreſſiones

$$z = \mathrm{Z}\ \text{coſ. A}\,a + \mathrm{X}\ \text{coſ. A}\,b + \mathrm{Y}\ \text{coſ. A}\,c$$
$$x = \mathrm{Z}\ \text{coſ. B}\,a + \mathrm{X}\ \text{coſ. B}\,b + \mathrm{Y}\ \text{coſ. B}\,c$$
$$y = \mathrm{Z}\ \text{coſ. C}\,a + \mathrm{X}\ \text{coſ. C}\,b + \mathrm{Y}\ \text{coſ. C}\,c,$$

vnde patet modo cognoſcantur coordinatae puncti Z pro ſtatu initiali, et translationes punctorum A, B, C in puncta a, b, c, etiam ſitum puncti Z translatum in z, facile determinari poſſe.

Tab. III. Fig. 6. 7. Iam ſi in translatione corporis, etiam motus progreſſiui rationem habere velimus; concipiamus interea dum corpus conuertitur circa I, ipſum hoc punctum perueniſſe in i, eiusque puncti ſitum determinari per ternas coordinatas I f, $f\,g$, $g\,i$, quas reſpectiue litteris f, g, h exprimamus. Deinde punctum

ctum Z translatione facta, iam in z eſſe concipiatur, et ſitus huius puncti z determinetur per coordinatas I x', $x'y'$, $y'z$, quas per litteras x', y', z' reſpectiue deſignemus; quo facto leui attentione adhibita patebit eſſe in Fig. 6. $\mathrm{I}x' - \mathrm{I}f = \mathrm{I}x$ Fig. 5, ſimili modo $x'y' - fg = xy$, tumque $zy' - ig = zy$; quod omnino rigoroſa demonſtratione firmari poterit, ſi modo per i ductae concipiantur tres lineae ia, ib, ic parallelae ipſis I A, I B, I C; quas tamen in noſtra figura, ne nimis euaderet complicata, non expreſſimus. Hinc igitur colligimus $x' = f + x$; $y' = g + y$; $z' = h + z$, quare ſi valores modo pro x, y, z inuenti adhibeantur, has expreſſiones pro x', y', z' conſequemur:

$$x' = f + \mathrm{X}\,\mathrm{coſ.\,B}b + \mathrm{Y}\,\mathrm{coſ.\,B}c + \mathrm{Z}\,\mathrm{coſ.\,B}a$$
$$y' = g + \mathrm{X}\,\mathrm{coſ.\,C}b + \mathrm{Y}\,\mathrm{coſ.\,C}c + \mathrm{Z}\,\mathrm{coſ.\,C}a$$
$$z' = h + \mathrm{X}\,\mathrm{coſ.\,A}b + \mathrm{Y}\,\mathrm{coſ.\,A}c + \mathrm{Z}\,\mathrm{coſ.\,A}a,$$

ita vt pro determinandis x', y', z', translationem tam puncti I per ordinatas f, g, h expreſſam, quam conuerſionem corporis circa punctum I per arcus A a, B b, C c determinatam, cognoſcere oporteat. Formulae autem hae allatae ſi conferantur cum illis, quas Illuſtr. *Eulerus* inuenerat §. 10. Diſſertationis ſaepius commemoratae; nunc omnino euidenter conſtabit, litteris F, G, H etc. eos tribuendos eſſe valores, quos ipſis ſupra aſſignauimus. In formulis vero his pro x', y', z' licet nouem occurrant quantitates ad translationes punctorum A, B, C ſpectantes; tamen quum reliquae ex his tribus coſ. A a,

coſ.

coſ. B *b*, coſ. C *c*, vti mox videbimus, determinentur; ſitus puncti *z* per ſex elementa coordinatas ſcilicet, *f*, *g*, *h* et arcus A *a*, B *b*, C *c*, perfecte determinatus eſſe cenſebitur.

Problema.

8. *Pro quacunque conuerſione ſphaerae circa centrum ſuum fixum, inuenire punctum in eius ſuperficie, quod poſt conuerſionem in eodem reperiatur loco, ac quo erat ante conuerſionem.*

Solutio.

Tab. III. Fig. 7. In ſuperficie ſphaerae accipiatur arcus quicunque A B, qui per conuerſionem ſphaerae in *a b* perueniſſe ſupponitur, ita vt punctum A peruenerit in *a* et B in *b*, iungantur autem A *a*, B *b* arcubus circulorum maximorum. Biſecentur hi arcus A *a*, B *b* in punctis E et F, atque ducantur arcus E Z, F Z normales ad A *a*, B *b*, quorum mutuus occurſus in Z, dabit punctum, quod poſt conuerſionem in eodem reperitur loco, ac in ſitu initiali erat. Quum nimirum ſit A E $=$ *a* E, ang. A E Z $=$ ang. *a* E Z $= 90°$ et E Z communis triangulis A E Z, *a* E Z, fiet A Z $=$ *a* Z; ſimili modo erit B Z $=$ *b* Z. Iam in triangulis A Z B, *a* Z *b*, eſt A Z $=$ *a* Z, B Z $=$ *b* Z et A B $=$ *a b*, erit igitur ang. A B Z $=$ *a b* Z et B A Z $=$ *b a* Z; ex quo patet punctum Z reſpectu arcus *ab* perfecte eundem tenere ſitum, ac reſpectu arcus A B, ideoque

que hoc punctum in eodem eſſe loco, ac ante conuerſionem erat.

9. Mirum forſan alicui videbitur, quod huius Problematis reſolutionem adgreſſus ſim, antequam demonſtrauerim formulam iſtam §. 5. allatam ad nihilum redigi; quippe quum videatur hanc ſolutionem nequaquam in poteſtate eſſe, niſi expreſſio iſta in omni conuerſione ſphaerae locum habeat. At primum quidem obſeruandum eſt, licet Problema ipſum ſolutionem admittere non queat, niſi aequatio iſta §. 5. vera ſit; tamen ipſam ſolutionem Problematis independenter ab hac aequatione adornari poſſe, tumque ex ipſa indole ſolutionis facile perſpici, an ſemper et omni caſu locum habeat. In noſtra quidem ſolutione, nullum dubium eſt, quin arcus E Z et F Z normales ad A a et B b ſe interſecent, vnico excepto caſu, quo coincidunt; tum vero arcus iſte E Z F tranſibit per punctum in quo arcus A B, a b ſe interſecant, immo iſtud punctum interſectionis iam cum puncto Z coincidet; dubitare igitur non licet, quin Problema noſtrum ſemper veram et realem admittat ſolutionem. Deinde ea quidem de cauſſa praeprimis hanc ſolutionem heic adornandam cenſui, vt modum mihi patefaceret, quo ex datis arcubus A a, B b, C c determinationem puncti Z ſuſciperem, quae inueſtigatio mihi inſeruiret ad detegendas relationes, quae inter arcus A a, B b, C c et A b, A c, B a, B c, C a, C b intercedunt. Tab. III. Fig. 3.

10. Vt nunc intelligatur, quomodo punctum Z per arcus A a, B b, C c determinetur, ſupponamus hos arcus biſecari per arcus E Z, F Z, G Z ipſis reſpectiue normales, qui arcus E Z, F Z, G Z in eodem puncto Z concurrent; tum vero erit

$$\text{ſin.}\, AZ^2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AZa^2 = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2,\ \text{ſin.}\, BZ^2 . \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} BZb^2 = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\, CZ^2 . \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} CZc^2 = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2, \text{ ideoque ob } AZa = BZb = CZc,$$

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AZa^2 (\text{ſin.}\, AZ^2 + \text{ſin.}\, BZ^2 + \text{ſin.}\, CZ^2) = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2.$$

Hinc vero deducitur

$$\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AZa^2 (3 - \text{coſ.}\, AZ^2 - \text{coſ.}\, BZ^2 - \text{coſ.}\, CZ^2) = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2,$$

quae ob

$$\text{coſ.}\, AZ^2 + \text{coſ.}\, BZ^2 + \text{coſ.}\, CZ^2 = 1,$$

in ſequentem abit aequationem:

$$2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AZa^2 = \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2.$$

Cuius loco etiam haec adhiberi poteſt,

$$2\, \text{coſ.}\, AZa = \text{coſ.}\, Aa + \text{coſ.}\, Bb + \text{coſ.}\, Cc - 1.$$

Deinde vero colligitur

$$\text{ſin.}\, AZ^2 = \frac{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2}{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} AZa^2} = \frac{2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2}{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2},$$

$$\text{ſin.}\, BZ^2 = \frac{2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2}{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2};$$

$$\text{ſin.}\, CZ^2 = \frac{2\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2}{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Aa^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Bb^2 + \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Cc^2},$$

tumque omnino ſponte iſta conditio impletur, vt ſit

$$\text{ſin.}\, AZ^2 + \text{ſin.}\, BZ^2 + \text{ſin.}\, CZ^2 = 2.$$

Expreſſiones vero hae ſequenti quoque ratione transformari poterunt: quum ſit 2 ſin.

$$2\,\text{ſin.}\,AZ^2 = \frac{8\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Aa^2}{2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Aa^2 + 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Bb^2 + 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2},$$ ob

$$2\,\text{ſin.}\,AZ^2 = 1 - \text{coſ.}\,2\,AZ;\quad 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Aa^2 = 1 - \text{coſ.}\,Aa;$$
$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Bb^2 = 1 - \text{coſ.}\,Bb;\quad 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2 = 1 - \text{coſ.}\,Cc,$$

conſequimur

$$1 - \text{coſ.}\,2\,AZ = \frac{4\,(1 - \text{coſ.}\,Aa)}{3 - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc},$$ hincque

$$\text{coſ.}\,2\,AZ = \frac{3\,\text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc - 1}{3 - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc},$$

ſimilique modo

$$\text{coſ.}\,2\,BZ = \frac{3\,\text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Cc - 1}{3 - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc};\quad \text{coſ.}\,2\,CZ = \frac{3\,\text{coſ.}\,Cc - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - 1}{3 - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc}$$

ideoque

$$\text{coſ.}\,2\,AZ + \text{coſ.}\,2\,BZ + \text{coſ.}\,2\,CZ = \frac{\text{coſ.}\,Aa + \text{coſ.}\,Bb + \text{coſ.}\,Cc - 3}{3 - \text{coſ.}\,Aa - \text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc} = -1,$$

omnino vti eſſe oportet.

11. Vt vero iam quoque pateat, qua ratione arcus, Ab, Ac, Ba, Bc, Ca, Cb per Aa, Bb, Cc determinentur; primum hos arcus, per ipſos AZ, BZ, CZ et angulum AZa determinemus. Conſtat autem eſſe

$$\text{coſ.}\,Aa = \text{coſ.}\,AZ^2 + \text{ſin.}\,AZ^2\,\text{coſ.}\,AZa$$
$$\text{coſ.}\,Bb = \text{coſ.}\,BZ^2 + \text{ſin.}\,BZ^2\,\text{coſ.}\,BZb$$
$$\text{coſ.}\,Cc = \text{coſ.}\,CZ^2 + \text{ſin.}\,CZ^2\,\text{coſ.}\,CZc.$$

Porro eſt Tab. III.

$$\text{coſ.}\,Ab = \text{coſ.}\,AZ\,\text{coſ.}\,bZ + \text{ſin.}\,AZ\,\text{ſin.}\,bZ\,\text{coſ.}\,AZb,$$ Fig. 4.

vnde ob $bZ = BZ$ et angulum $AZb = AZB - BZb$, colligimus

$$\text{coſ.}\,Ab = \text{coſ.}\,AZ\,\text{coſ.}\,BZ + \text{ſin.}\,AZ.\,\text{ſin.}\,BZ\,(\text{coſ.}\,AZB\,\text{coſ.}\,BZb + \text{ſin.}\,AZB.\,\text{ſin.}\,BZb).$$

 Eſt

Eſt vero

Tab. III. Fig. 8. $\text{coſ. } AZB = -\text{cot. } AZ.\ \text{cot. } BZ,$

ex principiis Sphaericorum, hinc

$$\text{ſin. } AZ.\ \text{ſin. } BZ\ \text{coſ. } AZB = -\text{coſ. } AZ\ \text{coſ. } BZ.$$

Porro habetur quoque $\text{ſin. } AZB = \frac{\text{coſ. } CZ}{\text{ſin. } AZ\ \text{ſin. } BZ}$, id quod ſequentem in modum demonſtratur. Producatur arcus BZ, vsque dum circulo maximo AC in R occurrat, eritque

$$\text{ſin. } AZ.\ \text{ſin. } AZB = \text{ſin. } AR = \text{coſ. } CR = \frac{\text{coſ. } CZ}{\text{coſ. } ZR} = \frac{\text{coſ. } CZ}{\text{ſin. } BZ}.$$

Hinc itaque colligitur

$$\text{ſin. } AZ.\ \text{ſin. } BZ.\ \text{ſin. } AZB = \text{coſ. } CZ.$$

Subſtitutis vero his valoribus, prodit:

$$\text{coſ. } Ab = \text{coſ. } AZ\ \text{coſ. } BZ\,(1 - \text{coſ. } BZb) + \text{coſ. } CZ\ \text{ſin } BZb.$$

Simili modo, ob

$$\text{coſ. } Ba = \text{coſ. } BZ\ \text{coſ. } aZ + \text{ſin. } BZ\ \text{ſin. } aZ\ \text{coſ. } BZa,$$

quum ſit $aZ = AZ$ et $BZa = BZA + AZa$, colligitur

$$\text{coſ. } Ba = \text{coſ. } BZ\ \text{coſ. } AZ + \text{ſin. } BZ\ \text{ſin. } AZ\,(\text{coſ } AZB\ \text{coſ } AZa \\ - \text{ſin. } AZB.\ \text{ſin. } AZa),$$

quae ob

$$\text{ſin. } BZ\ \text{ſin. } AZ\ \text{coſ. } AZB = -\text{coſ. } AZ\ \text{coſ. } BZ \text{ et}$$
$$\text{ſin. } BZ\ \text{ſin. } AZ\ \text{ſin. } AZB = \text{coſ. } CZ,$$

reducitur ad hanc

$$\text{coſ. } Ba = \text{coſ. } AZ\ \text{coſ. } BZ\,(1 - \text{coſ. } AZa) - \text{coſ. } CZ\ \text{ſin. } AZa.$$

Simili modo has conſequemur expreſſiones:

$$\text{coſ. } Ac = \text{coſ. } AZ\ \text{coſ. } CZ\,(1 - \text{coſ. } CZc) - \text{coſ. } BZ.\ \text{ſin. } CZc$$
$$\text{coſ. } Ca = \text{coſ. } AZ.\ \text{coſ. } CZ\,(1 - \text{coſ. } CZc) + \text{coſ. } BZ.\ \text{ſin. } CZc$$
$$\text{coſ. } Bc = \text{coſ } BZ\ \text{coſ. } CZ\,(1 - \text{coſ } BZb) + \text{coſ } AZ\ \text{ſin. } BZb$$
$$\text{coſ. } Cb = \text{coſ. } BZ\ \text{coſ } CZ\,(1 - \text{coſ. } BZb) - \text{coſ. } AZ\ \text{ſin. } BZb,$$

vbi

vbi anguli AZa, BZb, CZc quia inter ſe aequales, promiſcue adhiberi poſſunt. Porro binas harum formularum inter ſe combinando obtinebimus:

$$\text{coſ.}\,Ab + \text{coſ.}\,Ba = 2\,\text{coſ.}\,AZ\,\text{coſ.}\,BZ(1 - \text{coſ.}\,AZa);$$
$$\text{coſ.}\,Ab - \text{coſ.}\,Ba = 2\,\text{coſ.}\,CZ\,\text{ſin.}\,AZa$$
$$\text{coſ.}\,Ac + \text{coſ.}\,Ca = 2\,\text{coſ.}\,AZ\,\text{coſ.}\,CZ(1 - \text{coſ.}\,AZa);$$
$$\text{coſ.}\,Ca - \text{coſ.}\,Ac = 2\,\text{coſ.}\,BZ\,\text{ſin.}\,AZa$$
$$\text{coſ.}\,Bc + \text{coſ.}\,Cb = 2\,\text{coſ.}\,BZ\,\text{coſ.}\,CZ(1 - \text{coſ.}\,AZa);$$
$$\text{coſ.}\,Bc - \text{coſ.}\,Cb = 2\,\text{coſ.}\,AZ.\,\text{ſin.}\,AZa.$$

Denique egregia iſta hinc colligitur proprietas, quod ſit

$$\text{coſ.}\,Ab^2 - \text{coſ.}\,Ba^2 = \text{coſ.}\,Bc^2 - \text{coſ.}\,Cb^2 = \text{coſ.}\,Ca^2 - \text{coſ.}\,Ac^2$$
$$= 4\,\text{coſ.}\,AZ.\,\text{coſ.}\,BZ\,\text{coſ.}\,CZ\,\text{ſin.}\,AZa(1 - \text{coſ.}\,AZa),$$

ſiue

$$\text{coſ.}\,2Ab - \text{coſ.}\,2Ba = \text{coſ.}\,2Bc - \text{coſ.}\,2Cb = \text{coſ.}\,2Ca - \text{coſ.}\,2Ac.$$

12. Si in valoribus ſupra pro coſ. Ab, coſ. Ba, coſ. Ac, coſ. Ca, coſ. Bc, coſ. Cb inuentis, loco coſ. AZ, coſ. BZ, coſ. CZ, coſ. AZa et ſin. AZa ſubſtituantur eorum valores per coſ. Aa, coſ. Bb, coſ. Cc expreſſi, coſinus priorum iſtorum arcuum, quoque per arcus Aa, Bb, Cc habebuntur definiti. Vt autem hoc facilius fiat, ponamus

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}Aa^2 = \alpha;\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}Bb^2 = \beta;\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}Cc^2 = \gamma,$$

ex quo colligitur

$$\text{coſ.}\,AZ = \sqrt{\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta+\gamma+\alpha}};\ \text{coſ.}\,BZ = \sqrt{\frac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}};\ \text{coſ.}\,CZ = \sqrt{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}},$$

tumque

$$1 - \text{coſ.}\,AZa = \alpha+\beta+\gamma;\ \text{ſin.}\tfrac{1}{2}AZa = \sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}},\ \text{hinc}$$
$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}BZb = \sqrt{\frac{2-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}}\ \text{et}$$
$$\text{ſin.}\,AZa = \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)}.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis, conſequemur:

$$\cos. Ab = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)} + \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\cos. Ba = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)} - \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\cos. Bc = \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)} + \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\cos. Cb = \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)} - \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\cos. Ca = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\alpha-\gamma)} + \sqrt{(\alpha+\gamma-\beta)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\cos. Ac = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\alpha-\gamma)} - \sqrt{(\alpha+\gamma-\beta)(2-\alpha-\beta-\gamma)}.$$

Vbi quidem obſeruare conuenit, hos valores figurae noſtrae eſſe accommodatos, caeterumque binos inter ſe eſſe permutabiles, ita vt ſi pro coſ. A b adhibeatur

$$\sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)} - \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)},$$

tum ſtatuendum eſſe

$$\cos. Ba = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)} + \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)};$$

vnde colligitur producta

coſ. A b. coſ. B a; coſ. B c. coſ. C b; coſ. C a. coſ. A c

ſemper rationaliter per α, β, γ exprimi. Fiet autem

$$\cos. A\,b. \cos. B\,a = 4\,\alpha\,\beta - 2\,(\alpha + \beta - \gamma),$$

quae valoribus debitis ſubſtitutis, in hanc abit

coſ. Ab.coſ.Ba=coſ.Aa coſ.Bb−coſ.Cc, ſimili modo colligetur eſſe,

coſ.Bc coſ.Cb=coſ.Bb.coſ.Cc−coſ.Aa et

coſ.Ca.coſ.Ac=coſ.Cc.coſ.Aa−coſ Bb,

quas aequationes infra independenter a conſideratione puncti Z, demonſtrabimus.

Lemma II.

Tab. III. Fig. 9. 13. *Si conuerſione ſphaerae circa centrum ſuum fixum; puncta* A, B, C *quadrantibus inter ſe diſtantia, per-*

peruenerint in puncta a, b, c *et arcuum* A B, a b; A C, a c; B C, b c *interſectiones ſint in punctis* γ, β, α; *erit arcus* $Bb = $ ang. $A\beta a = C\beta c$; $Aa = B\alpha b = C\alpha c$; $Cc = A\gamma a = B\gamma b$.

Demonſtratio.

Ducantur arcus $B\beta$, $b\beta$ et ob arcus $AB = BC = 90^\circ$, erit quoque $B\beta = 90^\circ$ et ang. $B\beta A = 90^\circ$, tum vero ob $ba = bc = 90^\circ$, erit item $b\beta = 90^\circ$ et ang. $b\beta A = 90$, vnde deducitur $B\beta A = b\beta a$ et $B\beta b = A\beta a$; atqui ob $B\beta = b\beta = 90^\circ$, menſura anguli $B\beta b$ eſt arcus Bb; hinc idem arcus aequabitur angulo $A\beta a$. Simili plane ratione oſtenditur eſſe $Aa = $ ang. $B\alpha b$ et $Cc = $ ang. $A\gamma a$.

Lemma III.

14. *In Tetragono* A C c b, *quod componitur ex arcubus circulorum maximorum in ſuperficie ſphaerica, ſi fuerit* $AC = bc = 90^\circ$, *erit:*

$$\text{coſ.}\, Ab = \text{ſin.}\, ACc.\, \text{ſin.}\, bcC - \text{coſ.}\, Cc.\, \text{coſ.}\, ACc.\, \text{coſ.}\, bcC.$$

Demonſtratio.

Ducatur arcus bC, eritque

$\text{coſ.}\, Ab = \text{ſin.}\, bC.\, \text{coſ.}\, ACb$, hincque ob $ACb = ACc - bCc$,

$\text{coſ.}\, Ab = \text{ſin.}\, bC (\text{coſ.}\, ACc.\, \text{coſ.}\, bCc + \text{ſin.}\, ACc.\, \text{ſin.}\, bCc)$.

Iam notetur eſſe:

$\text{ſin.}\, bC.\, \text{ſin.}\, bCc = \text{ſin.}\, bcC$ et

$\text{cot.}\, bCc = -\text{coſ.}\, Cc.\, \text{cot.}\, bcC$, hincque etiam

$\text{ſin.}\, Cb.\, \text{coſ.}\, bCc = -\text{coſ.}\, Cc\, \text{coſ.}\, bcC$,

his

his igitur valoribus ſubſtitutis, ſit

$$\cos. Ab = \sin. ACc. \sin. bcC - \cos. Cc \cos. ACc. \cos. bcC.$$

Theorema II.

15. *Si conuerſione ſphaerae circa centrum ſuum fixum, puncta* A, B, C *quadrantibus inter ſe diſtantia* Tab. III. Fig. 4. *peruenerint in puncta* a, b, c, *et ducti ſupponantur arcus circulorum maximorum*, A a, A b, A c B a, B b, B c, C a, C b, C c, *ſequens expreſſio ſemper ad nihilum redigetur*

$$(1-\cos. Aa)(1-\cos. Bb)(1-\cos. Cc)+\cos. Bc\cos. Cb(1-\cos. Aa)-\cos. Ab\cos. Bc\cos. Ca$$
$$+\cos. Ac\cos. Ca(1-\cos Bb)-\cos. Ac\cos. Cb\cos. Ba$$
$$+\cos. Cb\cos. Bc(1-\cos. Cc).$$

Demonſtratio.

Ex elementis Trigonometriae Sphaericae conſtat, eſſe in triangulo $A\beta a$

$$\cos. A\beta a = \cos. Aa \sin. \beta Aa \sin. \beta aA - \cos. \beta Aa \cos. \beta aA,$$

hinc ob

$$A\beta a = Bb;\ \beta Aa = BAa - 90^\circ;\ \beta aA = baA + 90^\circ,$$

ita vt ſit

$\sin. \beta Aa = -\cos. BAa$ et $\cos. \beta Aa = \sin. BAa$, tumque $\sin. \beta aA = \cos. baA$ et $\cos. \beta aA = -\sin. baA$, colligitur

$$\cos. Bb = \sin. BAa \sin. baA - \cos. Aa \cos. BAa. \cos. baA.$$

Simili ratione ex conſideratione trianguli $A\gamma a$ deducitur,

$$\cos. A\gamma a = \cos. Aa. \sin. BAa. \sin. baA - \cos. BAa. \cos. baA,$$

ſeu

ſeu ob

$$\text{ang. } A\gamma a = \text{arc. } Cc; \; \text{coſ. } Cc = \text{coſ. } Aa . \text{ſin. } BAa . \text{ſin. } baA - \text{coſ. } BAa . \text{coſ. } baA.$$

Si prior harum aequationum multiplicetur per coſ. Aa, obtinebimus

$$\text{coſ. } Aa \, \text{coſ. } Bb = \text{coſ. } Aa . \text{ſin. } BAa . \text{ſin. } baA - \text{coſ. } Aa^2 . \text{coſ. } BAa . \text{coſ. } baA,$$

hinc igitur ſubtracta poſteriori noſtra aequatione, colligitur

$$\text{coſ. } Aa . \text{coſ. } Bb - \text{coſ. } Cc = (1 - \text{coſ. } Aa^2) \text{coſ. } BAa \, \text{coſ. } baA = \text{ſin. } Aa^2 \, \text{coſ. } BAa . \text{coſ. } baA,$$

atqui eſt

$$\text{ſin. } Aa \, \text{coſ. } BAa = \text{coſ. } Ba, \text{ et ſin. } Aa \, \text{coſ. } baA = \text{coſ. } Ab,$$

fiet igitur

$$\text{coſ. } Aa . \text{coſ. } Bb - \text{coſ. } Cc = \text{coſ. } Ab . \text{coſ. } Ba.$$

Porro ex conſideratione trianguli $B\gamma\beta$ colligitur:

$$\text{coſ. } B\gamma b = \text{coſ. } Cc = \text{coſ. } Bb . \text{ſin. } ABb . \text{ſin } abB - \text{coſ. } ABb . \text{coſ. } abB,$$

tumque ex triangulo Bab

$$\text{coſ. } Aa = \text{coſ. } Bab = \text{coſ. } Bb . \text{ſin. } CBb . \text{ſin. } cbB . - \text{coſ } CBb . \text{coſ. } cbB.$$

Prior autem ob

$$ABb = CBb - 90^\circ \text{ et } abB = cbB + 90^\circ,$$

in iſtam transformatur,

$$\text{coſ. } Cc = \text{ſin. } CBb . \text{ſin. } cbB - \text{coſ. } Bb . \text{coſ. } CBb . \text{coſ. } cbB,$$

multiplicata hac aequatione per coſ. Bb, et ſubtracta inde illa pro coſ. Aa, colligimus demum:

$$\text{coſ. } Bb \, \text{coſ. } Cc - \text{coſ. } Aa = (1 - \text{coſ. } Bb^2) \text{coſ. } CBb . \text{coſ. } cbB = \text{ſin } Bb^2 . \text{coſ. } CBb . \text{coſ. } cbB.$$

Ex quo manifeſto deducitur

$$\text{coſ. } Bb \cdot \text{coſ. } Cc - \text{coſ. } Aa = \text{coſ. } Bc \cdot \text{coſ. } Cb.$$

Simili ratione quoque oſtenditur eſſe,

$$\text{coſ. } Aa \,\text{coſ. } Cc - \text{coſ. } Bb = \text{coſ. } Ac \,\text{coſ. } Ca.$$

Deinde pro quadrilatero $ACcb$, habemus per Lemma noſtrum III:

$$\text{coſ. } Ab = \text{ſin. } ACc \cdot \text{ſin. } bcC - \text{coſ. } Cc \cdot \text{coſ. } ACc \cdot \text{coſ. } bcC$$

et pro quadrilatero $aCcB$, vi eiusdem Lemmatis:

$$\text{coſ. } Ba = \text{ſin. } BCc \cdot \text{ſin. } acC - \text{coſ. } Cc \cdot \text{coſ. } BCc \cdot \text{coſ. } acC.$$

Quum nunc ſit $BCc = ACc - 90^\circ$; $acC = bcC - 90^\circ$, obtinebimus,

$$\text{coſ. } Ba = \text{coſ. } ACc \cdot \text{coſ. } bcC - \text{coſ. } Cc \cdot \text{ſin. } ACc \cdot \text{ſin. } bcC,$$

hincque

$$\text{coſ. } Ab \cdot \text{coſ. } Cc + \text{coſ. } Ba = (1 - \text{coſ. } Cc^2) \,\text{coſ. } ACc \cdot \text{coſ. } bcC$$
$$= \text{ſin. } Cc^2 \cdot \text{coſ. } ACc \cdot \text{coſ. } bcC,$$

ſiue ob

$$\text{coſ. } Ac = \text{ſin. } Cc \cdot \text{coſ. } ACc \quad \text{et} \quad \text{coſ. } Cb = \text{ſin. } Cc \cdot \text{coſ. } bcC,$$

$$\text{coſ. } Ab \,\text{coſ. } Cc + \text{coſ. } Ba = \text{coſ. } Ac \cdot \text{coſ. } Cb.$$

Simili ratione demonſtrabitur eſſe:

$$\text{coſ. } Ab \cdot \text{coſ. } Bc = \text{coſ. } Bb \cdot \text{coſ. } Ac + \text{coſ. } Ca,$$

multiplicata igitur priori aequatione per coſ. Ba et poſteriori per coſ. Ca, additisque productis, conſequemur:

1. $\text{coſ. } Ac \cdot \text{coſ. } Cb \cdot \text{coſ. } Ba = \text{coſ. } Ab \cdot \text{coſ. } Ba \cdot \text{coſ. } Cc + \text{coſ. } Ba^2$
2. $\text{coſ. } Ab \cdot \text{coſ. } Bc \cdot \text{coſ. } Ca = \text{coſ. } Ac \cdot \text{coſ. } Ca \cdot \text{coſ. } Bb + \text{coſ. } Ca^2$, hinc
3. $\text{coſ. } Ab \cdot \text{coſ. } Bc \cdot \text{coſ. } Ca + \text{coſ. } Ac \,\text{coſ. } Cb \cdot \text{coſ. } Ba =$

$$\cos. Ab \cos. Ba. \cos. Cc + \cos. Ac \cos. Ca \cos. Bb + \cos. Ba^2 + \cos. Ca^2 =$$
$$\cos. Ab. \cos. Ba. \cos. Cc + \cos. Ac. \cos. Ca. \cos. Bb + 1 - \cos. Aa^2, \text{ ob}$$
$$\cos. Aa^2 + \cos. Ba^2 + \cos. Ca^2 = 1.$$

Introducatur nunc hic valor pro

$$\cos. Ab. \cos. Bc. \cos. Ca + \cos. Ac. \cos. Cb. \cos. Ba,$$

in expreſſione noſtra ad nihilum redigenda, cuius reliquos quoque terminos euolutos ſtatuamus, vt eo melius appareat, quomodo ſinguli inuicem ſe deſtruant. Ad nihilum igitur redigi debebit haec expreſſio

$$1 - \cos. Aa + \cos. Bb \cos. Cc - \cos. Aa \cos. Bb \cos. Cc - \cos. Bc \cos. Cb + \cos. Bc \cos. Cb. \cos. Aa$$
$$- \cos. Bb + \cos. Aa \cos. Cc \qquad - \cos. Ac \cos. Ca + \cos. Ac \cos. Ca \cos. Bb$$
$$- \cos. Cc + \cos. Aa \cos. Bb \qquad - \cos. Ab \cos. Ba + \cos. Ab \cos. Ba. \cos. Cc$$
$$- \cos. Ab \cos. Ba. \cos. Cc$$
$$- 1 + \cos. Aa^2. \qquad - \cos. Ac \cos. Ca \cos. Bb$$

Deletis autem terminis, qui manifeſto ſe tollunt, obſeruemus etiam per demonſtrata eſſe:

$$- \cos. Aa + \cos. Bb. \cos. Cc - \cos. Bc. \cos. Cb = 0,$$
$$- \cos. Bb + \cos. Aa. \cos. Cc - \cos. Ac. \cos. Ca = 0,$$
$$- \cos. Cc + \cos. Aa. \cos. Bb - \cos. Ab. \cos. Ba = 0.$$

Denique etiam

$$\cos. Aa^2 - \cos. Aa \cos. Bb. \cos. Cc + \cos. Aa. \cos. Bc \cos. Cb = 0,$$

ita vt iam perfecte euictum ſit, formulam iſtam propoſitam nihilo aequari.

Alia Demonſtratio.

16. Quum prior demonſtratio Geometrica ſit et ex conſideratione figurae deducta, nunc aliam

 inſuper

inſuper addamus Analyticam, quippe quae aequationibus in §. 5. allatis innitetur. Ex aequatione igitur IV deducimus,

$$\text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Ab + \text{coſ.}\,Ba\,\text{coſ.}\,Bb = -\text{coſ.}\,Ca\,\text{coſ.}\,Cb$$

et ſumendo quadrata,

$$\text{coſ.}\,Aa^2\,\text{coſ.}\,Ab^2 + \text{coſ.}\,Ba^2\,\text{coſ.}\,Bb^2 + 2\,\text{coſ.}\,Aa.\,\text{coſ.}\,Bb.\,\text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Ba = \text{coſ.}\,Ca^2\,\text{coſ.}\,Cb^2 = (1-\text{coſ.}\,Aa^2-\text{coſ.}\,Ba^2)(1-\text{coſ.}\,Bb^2-\text{coſ.}\,Ab^2)$$

per aequationes I et II. Euolutione igitur facta poſterioris membri, et deletis terminis, qui ſe mutuo tollunt, conſequemur:

$$2\,\text{coſ}\,Aa\,\text{coſ}\,Bb\,\text{coſ.}\,Ab.\,\text{coſ.}\,Ba = 1-\text{coſ.}\,Aa^2-\text{coſ}\,Ba^2-\text{coſ.}\,Bb^2 - \text{coſ.}\,Ab^2 + \text{coſ.}\,Aa^2\,\text{coſ.}\,Bb^2 + \text{coſ.}\,Ab^2\,\text{coſ.}\,Ba^2 = \text{coſ.}\,Ca^2 + \text{coſ.}\,Cb^2 - 1 + \text{coſ.}\,Aa^2.\,\text{coſ.}\,Bb^2 + \text{coſ.}\,Ab^2.\,\text{coſ.}\,Ba^2.$$

Quum igitur ſit,

Tab. III. Fig. 4.

$$\text{coſ.}\,C\,a^2 + \text{coſ.}\,C\,b^2 - 1 = -\text{coſ.}\,C\,c^2,$$

habebimus

$$2\text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Bb\,\text{coſ.}\,Ab.\,\text{coſ}\,Ba = \text{coſ.}\,Aa^2\,\text{coſ.}\,Bb^2 + \text{coſ.}\,Ab^2\,\text{coſ.}\,Ba^2 - \text{coſ}\,Cc^2,$$

tumque

$$(\text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Ba - \text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Bb)^2 = \text{coſ.}\,Cc^2, \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,Ab\,\text{coſ.}\,Ba - \text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Bb = \pm\,\text{coſ.}\,Cc.$$

Fig. 4. Quum hic pro coſ. A b coſ. B a duplex reperiatur valor, ratio iſtius duplicitatis ita explicari poteſt, vt ſi concipiatur punctum c' quod ipſi c e diametro eſt oppoſitum, eſſe oporteat:

$$\text{coſ.}\,Ab.\,\text{coſ.}\,Ba = \text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,Ab.\,\text{coſ.}\,Ba = \text{coſ.}\,Ab.\,\text{coſ.}\,Bb + \text{coſ.}\,Cc'.$$

Ex

Ex meris autem iſtis principiis Analyticis minime demonſtrari poteſt, aſſumi debere

$$\cos. Ab.\ \cos. Ba = \cos. Aa.\ \cos. Bb - \cos. Cc,$$

non vero item

$$\cos. Ab.\ \cos. Ba = \cos. Aa \cos. Bb + \cos. Cc;$$

quicquid tamen ſit ſupponamus priorem aequationem locum habere. Tum vero quoque eundem in modum oſtendi poteſt, eſſe:

$$\cos. Ac \cos. Ca = \cos. Aa \cos. Cc - \cos. Bb \text{ et}$$
$$\cos. Bc \cos. Cb = \cos. Bb \cos. Cc - \cos. Aa.$$

Porro obſeruetur, praeter illas aequationes §. 5. allatas, etiam ſequentes locum habere:

$$\text{VII.}\quad \cos. Aa^2 + \cos. Ab^2 + \cos. Ac^2 = 1,$$
$$\text{VIII.}\quad \cos Ba^2 + \cos. Bb^2 + \cos. Bc^2 = 1,$$
$$\text{IX.}\quad \cos. Ca^2 + \cos. Cb^2 + \cos. Cc^2 = 1,$$
$$\text{X.}\quad \cos. Aa \cos. Ba + \cos. Ab \cos. Bb + \cos. Ac \cos. Bc = 0,$$
$$\text{XI.}\quad \cos. Ba. \cos. Ca + \cos. Bb. \cos. Cb + \cos. Bc \cos. Cc = 0,$$
$$\text{XII.}\quad \cos. Aa. \cos. Ca + \cos. Ab. \cos. Cb + \cos. Ac \cos. Cc = 0.$$

Nunc per aequationem X colligimus:

$$\cos. Ab^2. \cos. Bb^2 + \cos. Ac^2 \cos. Bc^2 + 2\cos. Ab. \cos. Bc \cos. Bb. \cos. Ac$$
$$= \cos. Aa^2 \cos. Ba^2 = (1 - \cos. Ab^2 - \cos. Ac^2)(1 - \cos. Bb^2 - \cos. Bc^2)$$

per aequat. VII et VIII. Hinc facta euolutione prodit:

$$2\cos. Ab. \cos. Bc \cos. Bb. \cos. Ac = 1 - \cos. Ab^2 - \cos. Ac^2$$
$$- \cos. Bb^2 - \cos. Bc^2. + \cos. Ab^2 \cos. Bc^2 + \cos. Bb^2. \cos Ac^2 = \cos Aa^2$$
$$+ \cos. Ba^2 - 1 + \cos. Ab^2. \cos. Bc^2 + \cos. Bb^2 \cos. Ac^2$$
$$= \cos. Ab^2. \cos. Bc^2 + \cos. Bb^2 \cos. Ac^2 - \cos. Ca^2,$$

per aequat. I. §. 5. Manifeſto autem hinc colligitur:

$$(\text{coſ. A } b.\ \text{coſ. B } c - \text{coſ. B } b.\ \text{coſ. A } c)^2 = \text{coſ. C } a^2,$$

ideoque

$$\text{coſ. A } b.\ \text{coſ. B } c - \text{coſ. B } b.\ \text{coſ. A } c = \pm\ \text{coſ. C } a,$$

vbi quidem ex aequationibus noſtris Analyticis minime decidi poteſt, quodnam ſignum pro coſ. C a valeat. Statuamus tamen eſſe,

$$\text{coſ. A } b.\ \text{coſ. B } c = \text{coſ. B } b.\ \text{coſ. A } c + \text{coſ. C } a,$$

ideoque

$$\text{coſ A } b.\text{coſ.B } c\ \text{coſ.C } a = \text{coſ B } b.\text{coſ A } c\ \text{coſ.C } a + \text{coſ.C} a^2.$$

Simili vero modo demonſtrari quoque poteſt eſſe:

$$\text{coſ.A } c.\text{coſ.C } b.\text{coſ.B } a = \text{coſ.C } c\ \text{coſ.A } b.\text{coſ.B} a + \text{coſ.B} a^2.$$

Tum vero reliquum operis in eo conſiſtet, vt hi valores in noſtra expreſſione ad nihilum redigenda, ſubſtituantur; quod negotium in priori demonſtratione iam exſecuti ſumus, ideoque hic repetere ſuperfluum foret.

17. Antequam vlterius progrediar, Geometris haud ingratum fore exiſtimo; ſi heic dilucide expoſuero, quibus ratiociniis ad demonſtrationem iſtam priorem perductus ſum. Primum igitur conſiderata iſta expreſſione ad nihilum redigenda, exiſtimaui in eo potiſſimum eſſe elaborandum, vt reliquae quantitates eam ingredientes, per tria Elementa nimirum coſ. A a, coſ. B b, coſ. C c exprimi poſſent. Eum vero in finem, bina iſta quadrilatera B A a b, C A a c, pro exquirendis valoribus ipſorum coſ. A b,

coſ.

coſ. B a, conſideranda aſſumſi. Quum enim in priori haberem quatuor latera cognita, A a, B b, A B $= 90^\circ$ et $a\,b = 90^\circ$, et in poſteriori item quatuor latera cognita Aa, Cc, AC$=90^\circ$ et $ac = 90^\circ$, iam cogitare coepi, quomodo anguli B A a, $b\,a$ A, C A a, $c\,a$ A, ope arcuum A a, B b, C c determinari poſſent; iſta ſcilicet relatione in vſum vocata, quod ſit C A a = B A $a - 90^\circ$ et $c\,a$ A = $b\,a$ A $+ 90^\circ$. Hoc igitur agens ad iſtas binas perductus ſum aequationes: Tab. III. Fig. 11.

$$\text{coſ.B}b = \text{ſin. B A}a.\text{ſin.}ba\text{A} - \text{coſ.A}a.\text{coſ.B A}a.\text{coſ.}ba\text{A}$$
$$\text{coſ.C}c = \text{coſ.A}a.\text{ſin.BA}a.\text{ſin.}ba\text{A} - \text{coſ.B A}a.\text{coſ.}ba\text{A},$$

quarum ope has binas alias collegi,

$$\text{coſ B}b.\text{coſ. A}a - \text{coſ.C}c = \text{ſin. A}a^2.\text{coſ. BA}a.\text{coſ}\,ba\text{A}$$
$$\text{coſ. B}b - \text{coſ A}a.\text{coſ. C}c. = \text{ſin. A}a^2.\text{ ſin. BA}a.\text{ſin.}ba\text{A}.$$

Si ex his aequationibus eliminetur angulus B A a, obtinebitur aequatio, quae praeter arcus A a, Bb, Cc, non continet niſi angulum $b\,a$ A, vnde ob coſ. A b = ſin. A a. coſ. $b\,a$ A, in procliui erat aequationem inuenire, quae praeter A a, B b, C c, non continet niſi A b. Verum, quum hac ratione ad aequationem perueniretur biquadraticam; leui adhibita attentione, perſpexi tanto molimine non eſſe opus, quia ex iſta aequatione:

$$\text{coſ. B}b.\text{coſ. A}a - \text{coſ. C}c = \text{ſin. A}a^2.\text{coſ. B A}a.\text{coſ.}ba\text{A},$$

ſtatim deducitur valor producti coſ. A b. coſ. B a. Simili ratione, quum producta coſ. A c. coſ. C a et coſ B c. coſ. C b determinentur, nunc id tantum reſtabat, vt quoque iſta producta

coſ.

$\mathrm{coſ.}\,A\,b\;\mathrm{coſ.}\,B\,c.\;\mathrm{coſ.}\,C\,a\,;\;\mathrm{coſ.}\,A\,c.\;\mathrm{coſ.}\,C\,b.\;\mathrm{coſ.}\,B\,a$, per elementa tria $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$ exprimerem; vbi quidem poſt aliquot tentamina, vidi rem perfici, quia prius aequatur ipſi

$$\mathrm{coſ.}\,A\,c.\;\mathrm{coſ.}\,C\,a.\;\mathrm{coſ.}\,B\,b + \mathrm{coſ.}\,C\,a^2,$$

et poſterius ipſi

$$\mathrm{coſ.}\,A\,b.\;\mathrm{coſ.}\,B\,a.\;\mathrm{coſ.}\,C\,c + \mathrm{coſ.}\,B\,a^2,$$

ideoque ambo coniunctim huic expreſſioni:

$$\mathrm{coſ.}\,A\,b.\;\mathrm{coſ.}\,B\,a\;\mathrm{coſ.}\,C\,c + \mathrm{coſ.}\,A\,c\;\mathrm{coſ.}\,C\,a\;\mathrm{coſ.}\,B\,b + \mathrm{coſ.}\,B\,a^2 + \mathrm{coſ.}\,C\,a^2 =$$
$$\mathrm{coſ.}\,A\,b.\;\mathrm{coſ.}\,B\,a.\;\mathrm{coſ.}\,C\,c + \mathrm{coſ.}\,A\,c.\;\mathrm{coſ.}\,C\,a\;\mathrm{coſ.}\,B\,b + 1 - \mathrm{coſ.}\,A\,a^2,$$

quae expreſſio iam ita comparata eſt, vt facili negotio per meros coſinus ipſorum $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$ exprimi queat; quod tamen pro demonſtratione ipſa exſequenda minime e re eſt, vti ex antecedentibus patet.

18. Videamus nunc, quomodo valores ipſorum $\mathrm{coſ.}\,A\,b$, $\mathrm{coſ.}\,B\,a$ etc. per elementa iſta, $\mathrm{coſ.}\,A\,a$, $\mathrm{coſ.}\,B\,b$, $\mathrm{coſ.}\,C\,c$ exprimantur. Hunc in finem, conſideremus formulas:

$$\mathrm{coſ.}\,B\,b.\;\mathrm{coſ.}\,A\,a - \mathrm{coſ.}\,C\,c = \mathrm{ſin.}\,A\,a^2\;\mathrm{coſ.}\,B\,A\,a.\;\mathrm{coſ.}\,b\,a\,A$$
$$\mathrm{coſ.}\,B\,b - \mathrm{coſ.}\,A\,a\;\mathrm{coſ.}\,C\,c = \mathrm{ſin.}\,A\,a^2\;\mathrm{ſin.}\,B\,A\,a\;\mathrm{ſin.}\,b\,a\,A,$$

ex quibus ſumendo quadrata colligitur:

$$\mathrm{coſ.}\,B\,b^2\,\mathrm{coſ.}\,A\,a^2 + \mathrm{coſ.}\,C\,c^2 - 2\,\mathrm{coſ.}\,A\,a\,\mathrm{coſ.}\,B\,b.\,\mathrm{coſ.}\,C\,c = \mathrm{ſin.}\,A\,a^4.\,\mathrm{coſ.}\,B\,A\,a^2\,\mathrm{coſ.}\,b\,a\,A^2$$
$$\mathrm{coſ.}\,B\,b^2 + \mathrm{coſ.}\,A\,a^2\,\mathrm{coſ.}\,C\,c^2 - 2\,\mathrm{coſ.}\,A\,a.\,\mathrm{coſ.}\,B\,b.\,\mathrm{coſ.}\,C\,c = \mathrm{ſin.}\,A\,a^4.\,\mathrm{ſin.}\,B\,A\,a^2\,\mathrm{ſin.}\,b\,a\,A^2.$$

Sumta igitur differentia harum aequationum fit:

$$\mathrm{ſin.}\,A\,a^2(\mathrm{coſ.}\,C\,c^2 - \mathrm{coſ.}\,B\,b^2) = \mathrm{ſin.}\,A\,a^4(\mathrm{coſ.}\,B\,A\,a^2.\,\mathrm{coſ.}\,b\,a\,A^2 - \mathrm{ſin.}\,B\,A\,a^2.\,\mathrm{ſin.}\,b\,a\,A^2)$$

et

et quum ſit

$$\cos.BAa^2 \cos.baA^2 - \sin.BAa^2 \sin.baA^2 = \cos.BAa^2 + \cos.baA^2 - 1,$$

obtinebimus

$$\cos.Cc^2 - \cos.Bb^2 = \sin.Aa^2(\cos.BAa^2 + \cos.baA^2 - 1),$$

hincque

$$\cos.Cc^2 - \cos.Bb^2 + \sin.Aa^2 = \sin.Aa^2(\cos.BAa^2 + \cos.baA^2)$$
$$= \cos.Ab^2 + \cos.Ba^2$$

Erat vero

$$\cos.Ab.\cos.Ba = \cos.Aa.\cos.Bb - \cos.Cc,$$

proinde

$$(\cos Ab + \cos.Ba)^2 = \cos Ab^2 + \cos Ba^2 + 2\cos Ab.\cos.Ba = \cos Cc^2 - \cos Bb^2 + \sin.Aa^2 + 2\cos Aa\cos.Bb - 2\cos Cc = 1 - 2\cos.Cc + \cos.Cc^2 - \cos.Bb^2 - \cos Aa^2 + 2\cos.Aa.\cos.Bb = (1 - \cos Cc)^2 - (\cos.Bb - \cos.Aa)^2.$$

Si iam vti §. 12. ponamus

$$1 - \cos.Cc = 2\gamma, \quad 1 - \cos.Bb = 2\beta \text{ et } 1 - \cos.Aa = 2\alpha,$$

conſequemur

$$(\cos.Ab + \cos.Ba)^2 = 4\gamma^2 - 4(\alpha - \beta)^2,$$

ideoque extrahendo radicem

$$\cos.Ab + \cos.Ba = 2\sqrt{(\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2)} = 2\sqrt{(\gamma - \alpha + \beta)(\gamma + \alpha - \beta)}.$$

Deinde habebitur

$$(\cos.Ab - \cos.Ba)^2 = 1 + 2\cos.Cc + \cos.Cc^2 - \cos.Bb^2 - \cos.Aa^2 - 2\cos.Aa\cos.Bb = (1 + \cos.Cc)^2 - (\cos Aa + \cos.Bb)^2.$$

Quum igitur nunc ſit

$$1 + \cos.Cc = 2(1 - \gamma) \text{ et } \cos.Aa + \cos.Bb = 2(1 - \alpha - \beta),$$

fiet

$$(\cos.Ab - \cos.Ba)^2 = 4(1 - \gamma)^2 - 4(1 - \alpha - \beta)^2,$$

hincque

$$\cos.Ab - \cos.Ba = 2\sqrt{((1-\gamma)^2 - (1 - \alpha - \beta)^2)} = 2\sqrt{(\alpha + \beta - \gamma)(2 - \alpha - \beta - \gamma)}.$$

Nunc igitur colligimus,

$$\text{coſ.}\,Ab = \sqrt{(\gamma-\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)} + \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\text{coſ.}\,Ba = \sqrt{(\gamma-\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)} - \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$

tumque ſimili modo:

$$\text{coſ.}\,Bc = \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)} + \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\text{coſ.}\,Cb = \sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)} - \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\text{coſ.}\,Ca = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)} + \sqrt{(\alpha+\gamma-\beta)(2-\alpha-\beta-\gamma)}$$
$$\text{coſ.}\,Ac = \sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)} - \sqrt{(\alpha+\gamma-\beta)(2-\alpha-\beta-\gamma)}.$$

Omnino vti ſupro §. 12. inuenimus. Praeterea heic quoque haud praeter rem erit, vt obſeruemus, ob $(\text{coſ.}\,Ab+\text{coſ.}\,Ba)^2 = (1-\text{coſ.}\,Cc)^2 - (\text{coſ.}\,Bb-\text{coſ.}\,Aa)^2$, fieri

$$\text{coſ.}\,Ab+\text{coſ.}\,Ba = 2\sqrt{(\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Cc^4 - \text{ſin.}\,\tfrac{(Aa+Bb)^2}{2}\,\text{ſin.}\,\tfrac{(Aa-Bb)^2}{2})}$$
$$= 2\sqrt{\begin{matrix}(\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2 + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(Aa+Bb)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(Aa-Bb))\\ (\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2 - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(Aa+Bb)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}(Aa-Bb))\end{matrix}},$$

eodemque modo

$$\text{coſ.}\,Ab-\text{coſ.}\,Ba = 2\sqrt{\begin{matrix}(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2 + \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(Aa+Bb)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(Aa-Bb))\\ (\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}Cc^2 - \text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(Aa+Bb)\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}(Aa\ Bb))\end{matrix}}.$$

19. Hac quoque occaſione, operae pretium erit, nonnullas notaſſe relationes, quae quidem ad inſtitutum noſtrum proprie non ſpectant, elegantia tamen ſua ſe valde commendant. Quum igitur ſupra inveniſſemus

$$\text{coſ.}\,BAa\ \text{coſ.}\,baA = \frac{\text{coſ.}\,Aa\,\text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Cc}{\text{ſin.}\,Aa^2} \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\,BAa.\,\text{ſin.}\,baA = \frac{\text{coſ.}\,Bb - \text{coſ.}\,Aa.\,\text{coſ.}\,Cc}{\text{ſin.}\,Aa^2},$$

hinc colligimus

$$\text{coſ.}\,(BAa+baA) = \text{coſ.}\,BAa.\,\text{coſ.}\,baA - \text{ſin.}\,BAa\,\text{ſin.}\,baA$$
$$= -(\text{coſ.}\,Bb+\text{coſ.}\,Cc)\frac{(1-\text{coſ.}\,Aa)}{\text{ſin.}\,Aa^2} = -\frac{(\text{coſ.}\,Bb+\text{coſ.}\,Cc)}{1+\text{coſ.}\,Aa}.$$

Simili

Simili ratione conſequemur

$$\cos.(BAa-baA) = \cos.BAa \cos.baA + \sin.BAa \sin.baA$$
$$= (\cos.Bb - \cos.Cc)\frac{(1+\cos.Aa)}{\sin.Aa^2} = \frac{\cos.Bb - \cos.Cc}{1-\cos.Aa}.$$

Quum vero ſit

$$(\cos.Bc+\cos.Cb)^2 = (1-\cos.Aa)^2 - (\cos.Bb-\cos.Cc)^2 \text{ et}$$
$$(\cos.Bc-\cos.Cb)^2 = (1+\cos.Aa)^2 - (\cos.Bb+\cos.Cc)^2,$$

hinc concludemus eſſe

$$(\cos.Bc+\cos.Cb)^2 = (1-\cos.Aa)^2(1-\cos.(BAa-baA)^2)$$
$$= (1-\cos.Aa)^2 \sin.(BAa-baA)^2,$$

vnde

$$\cos.Bc+\cos.Cb = (1-\cos.Aa)\sin.(BAa-baA),$$ ſimilique modo fiet

$$\cos.Bc-\cos.Cb = (1+\cos.Aa)\sin.(BAa+baA).$$

Similes expreſſiones pro

$$\cos.Ac+\cos.Ca,\quad \cos.Ca-\cos.Ac$$

inueniri poſſunt, quas hic exponere nihil eſt neceſſe.

20. Si Z ſit punctum, quod poſt conuerſionem ſphaerae eundem occupat locum ac in ſtatu initiali, ſupra vidimus, eſſe debere:

$$\cos.ZA = \cos.ZA.\cos.Aa + \cos.ZB\cos.Ab + \cos.ZC\cos.Ac$$
$$\cos.ZB = \cos.ZA.\cos.Ba + \cos.ZB\cos.Bb + \cos.ZC\cos.Bc$$
$$\cos.ZC = \cos.ZA.\cos.\;a + \cos.ZB.\cos.Cb + \cos.ZC.\cos.Cc.$$

In prima harum aequationum, loco $\cos.Aa$, $\cos.Ab$, $\cos.Ac$, introducantur eorum valores, qui ſunt:

$$\cos.Aa = \cos.AZ^2 + \sin.AZ^2\cos.AZa$$
$$\cos.Ab = \cos.AZ\cos.BZ + \sin.AZ\sin.BZ\cos.AZb$$
$$\cos.Ac = \cos.AZ\cos.CZ + \sin.AZ.\sin.CZ.\cos.AZc,$$

Ll 2 hocque

hocque facto fiet

$$\operatorname{coſ.} AZ = \operatorname{coſ.} AZ^3 + \operatorname{coſ.} AZ \operatorname{ſin.} AZ^2 \operatorname{coſ.} AZa$$
$$+ \operatorname{coſ.} AZ \operatorname{coſ.} BZ^2 + \operatorname{coſ.} BZ \operatorname{ſin.} AZ \operatorname{ſin} BZ \operatorname{coſ.} AZb$$
$$+ \operatorname{coſ.} AZ. \operatorname{coſ.} CZ^2 + \operatorname{coſ.} CZ \operatorname{ſin.} AZ \operatorname{ſin.} CZ \operatorname{coſ.} AZc,$$

quae ob $\operatorname{coſ.} AZ^2 + \operatorname{coſ.} BZ^2 + \operatorname{coſ.} CZ^2 = 1$,

reducitur ad hanc formam:

$$0 = \operatorname{ſin.} AZ. \operatorname{coſ.} AZ. \operatorname{coſ.} AZa + \operatorname{ſin.} BZ \operatorname{coſ} BZ \operatorname{coſ.} AZb$$
$$+ \operatorname{ſin.} CZ \operatorname{coſ.} CZ. \operatorname{coſ.} AZc, \text{ vel}$$

$$\operatorname{ſin.} 2AZ \operatorname{coſ.} AZa + \operatorname{ſin.} 2BZ \operatorname{coſ.} AZb + \operatorname{ſin.} 2CZ \operatorname{coſ.} AZc = 0.$$

Simili modo has obtinebimus aequationes:

$$0 = \operatorname{ſin.} 2AZ \operatorname{coſ.} BZa + \operatorname{ſin.} 2BZ \operatorname{coſ.} BZb + \operatorname{ſin.} 2CZ \operatorname{coſ.} BZc$$
$$0 = \operatorname{ſin.} 2AZ \operatorname{coſ.} CZa + \operatorname{ſin.} 2BZ \operatorname{coſ.} CZb + \operatorname{ſin.} 2CZ \operatorname{coſ.} CZc.$$

Tab. III. Fig. 11. 21. Si in ſuperficie ſphaerae, puncta A, B, C quadrantibus inter ſe diſtent, punctumque O ſit id ipſum, quod poſt conuerſionem ſphaerae in eodem reperiatur ſitu, ac in ſtatu initiali erat, tumque punctum quodcunque ſuperficiei ſphaericae Z poſt conuerſionem perueniſſe ſupponatur in z, quaeritur vt diſtantiae Az, Bz, Cz per diſtantias AO, BO, CO et angulum ZOz exprimantur. Heic igitur quum O idem deſignet punctum, quod §. 11. per Z indicauimus; facilitatis gratia, nunc ponamus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$ et angulum $ZOz = \Phi$, eritque vti §. 11:

$$\operatorname{coſ.} Aa = \operatorname{coſ.} \alpha^2 (1 - \operatorname{coſ.} \Phi) + \operatorname{coſ} \Phi$$
$$\operatorname{coſ.} Bb = \operatorname{coſ.} \beta^2 (1 - \operatorname{coſ} \Phi) + \operatorname{coſ.} \Phi$$
$$\operatorname{coſ.} Cc = \operatorname{coſ.} \gamma^2 (1 - \operatorname{coſ.} \Phi) + \operatorname{coſ.} \Phi$$
$$\operatorname{coſ.} Ab = \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{coſ.} \beta (1 - \operatorname{coſ.} \Phi) + \operatorname{coſ.} \gamma \operatorname{ſin.} \Phi$$

coſ.

$$\cos. Ba = \cos.\alpha \cos.\beta (1 - \cos.\Phi) - \cos.\gamma \sin.\Phi$$
$$\cos. Bc = \cos.\beta \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) + \cos.\alpha \sin.\Phi$$
$$\cos. Cb = \cos.\beta \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) - \cos.\alpha \sin.\Phi$$
$$\cos. Ca = \cos.\alpha \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) + \cos.\beta \sin.\Phi$$
$$\cos. Ac = \cos.\alpha \cos.\gamma (1 - \cos.\Phi) - \cos.\beta \sin.\Phi.$$

Quum igitur ſit

$$\cos. Az = \cos. AZ \cos. Aa + \cos. BZ \cos. Ab + \cos. CZ \cos. Ac$$
$$\cos. Bz = \cos. AZ \cos. Ba + \cos. BZ \cos. Bb + \cos. CZ \cos. Bc$$
$$\cos. Cz = \cos. AZ \cos. Ca + \cos. BZ \cos. Bb + \cos. CZ \cos. Cc;$$

ſi dicatur $AZ = \zeta$; $BZ = \eta$; $CZ = \theta$ tumque $Az = \zeta'$; $Bz = \eta'$; $Cz = \theta'$, conſequemur:

$$\cos.\zeta' = \cos.\zeta \cos.\Phi + (1 - \cos.\Phi)(\cos.\zeta \cos.\alpha^2 + \cos.\eta \cos.\alpha \cos.\beta + \cos.\theta \cos.\alpha \cos.\gamma) + \sin.\Phi (\cos.\eta \cos.\gamma - \cos.\theta \cos.\beta)$$
$$\cos.\eta' = \cos.\eta \cos.\Phi + (1 - \cos.\Phi)(\cos.\eta \cos.\beta^2 + \cos.\zeta \cos.\alpha \cos.\beta + \cos.\theta \cos.\beta \cos.\gamma) + \sin.\Phi (\cos.\theta \cos.\alpha - \cos.\zeta \cos.\gamma)$$
$$\cos.\theta' = \cos.\theta \cos.\Phi + (1 - \cos.\Phi)(\cos.\theta \cos.\gamma^2 + \cos.\zeta \cos.\alpha \cos.\gamma + \cos.\eta \cos.\beta \cos.\gamma) + \sin.\Phi (\cos.\zeta \cos.\beta - \cos.\eta \cos.\alpha),$$

quae etiam ſic exprimi poſſunt:

$$\cos.\zeta' = \cos.\zeta(\cos.\alpha^2 + \sin.\alpha^2 \cos.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\alpha \cos.\beta(1 - \cos.\Phi) + \cos.\gamma \sin.\Phi) + \cos.\theta(\cos.\alpha \cos.\gamma(1 - \cos.\Phi) - \cos.\beta \sin.\Phi)$$
$$\cos.\eta' = \cos.\eta(\cos.\beta^2 + \sin.\beta^2 \cos.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\alpha \cos.\beta(1 - \cos.\Phi) - \cos.\gamma \sin.\Phi) + \cos.\theta(\cos.\beta \cos.\gamma(1 - \cos.\Phi) + \cos.\alpha \sin.\Phi)$$
$$\cos.\theta' = \cos.\theta(\cos.\gamma^2 + \sin.\gamma^2 \cos.\Phi) + \cos.\zeta(\cos.\alpha \cos.\gamma(1 - \cos.\Phi) + \cos.\beta \sin.\Phi) + \cos.\eta(\cos.\beta \cos.\gamma(1 - \cos.\Phi) - \cos.\alpha \sin.\Phi).$$

22. Denique cum ſupra §. 7. locum tranſlatum puncti z per coordinatas x', y', z' ita definivimus, vt ſit

$$x' = f + X\,\text{coſ.}\,Bb + Y\,\text{coſ.}\,Bc + Z\,\text{coſ.}\,Ba$$
$$y' = g + X\,\text{coſ.}\,Cb + Y\,\text{coſ.}\,Cc + Z\,\text{coſ.}\,Ca$$
$$z' = h + X\,\text{coſ.}\,Ab + Y\,\text{coſ.}\,Ac + Z\,\text{coſ.}\,Aa;$$

ſi hic pro coſ. A a, coſ. A b etc., valores ipſorum ſubſtituantur, fiet

$$x' = f + X(\text{coſ.}\,\beta^2 + \text{ſin.}\,\beta^2\,\text{coſ.}\,\Phi) + Y(\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma(1 - \text{coſ.}\,\Phi) + \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$+ Z(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta(1 - \text{coſ.}\,\Phi) - \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$y' = g + X(\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi) - \text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi) + Y(\text{coſ.}\,\gamma^2 + \text{ſin.}\,\gamma^2\,\text{coſ.}\,\Phi)$$
$$+ Z(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\gamma(1 - \text{coſ.}\,\Phi) + \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$z' = h + X(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta(1 - \text{coſ.}\,\Phi) + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$+ Y(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\gamma(1 - \text{coſ.}\,\Phi) - \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}\,\Phi) + Z(\text{coſ.}\,\alpha^2 + \text{ſin.}\,\alpha^2\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

Hincque modo iam cognoſcantur, translatio puncti I per ordinatas f, g, h, et diſtantiae puncti O ab A, B, C, quae per α, β, γ exprimuntur, nec non angulus quo conuerſio facta eſt Z O $z = \Phi$, etiam translatio cuiuslibet puncti corporis z expedite aſſignari poteſt.

REGVLA

REGVLA FACILIS PRO DIIVDICANDA FIRMITATE PONTIS ALIVSVE CORPORIS SIMILIS EX COGNITA FIRMITATE MODVLI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Orta eſt nuper haec quaeſtio occaſione pontis perennis trans fluuium Neuam conſtruendi. Cum enim plures hoc opus aggredi fuiſſent conati, atque in hunc finem modulos confecerint, ad quorum ſimilitudinem ipſe pons exſtrui poſſet, plerique ſunt arbitrati, pontem ſatis firmitatis eſſe habiturum, ſi modo modulus certo firmitatis gradu fuiſſet praeditus. Putarunt ſcilicet, ſi modo modulus ſimile onus geſtare valeret, quale ipſe pons ſuſtinere debeat, tum nullum eſſe dubium, quin ipſe pons ſecundum ſimilitudinem moduli exſtructus ſatis roboris eſſet habiturus. Hanc autem concluſionem eſſe fallacem, exinde ſatis eſt manifeſtum, quod talis pons certe non ad quantumuis magnam diſtantiam, veluti vnius pluriumue milliarium extendi queat, quin proprio pondere corruat, quantumuis etiam roboris modulus habuiſſe videatur. Ex quo perſpicuum eſt, firmitatem

tatem pontis neutiquam ex firmitate moduli ſecundum principium ſimilitudinis definiri poſſe. Quam ob rem, quemadmodum ex firmitate moduli firmitas ipſius pontis quantumuis magni cognoſci queat, hic accuratius ſum inquiſiturus.

§. 2. Firmitas autem tam ipſius pontis quam moduli vtique componitur ex firmitate ſingularum partium et modo, quo inter ſe ſunt coniunctae, ac diiudicari debet ex viribus quas ſuſtinere valent, quin disrumpantur. Duplicis autem generis hic occurrunt vires, quibus tales machinae reſiſtere debent, quarum alterae tendunt ad partes a ſe inuicem diuellendas, alterae vero ad eas frangendas, ſeu a compage reliquarum abrumpendas. Prius genus potiſſimum habet locum, ſi funes adhibeantur, quorum tenacitate tota machina innitatur; quando autem machina trabibus inter ſe coniunctis conſtat, alterum genus potiſſimum locum habet, vt ſcilicet trabes fractioni ſatis reſiſtent, ne a viribus quas ſuſtinere debent abrumpantur. Vtrumque igitur hoc genus accuratius eſt perpendendum, vt diiudicare valeamus, quanta vi ſingulae partes tam diuulſioni quam fractioni reſiſtant.

§. 3. Quod igitur ad genus prius pertinet, conſideremus funem craſſitiei datae, ac videamus, quantam tenſionem ſuſtinere valeat, antequam rumpatur. Ac primo quidem manifeſtum eſt, iſtam vim a tenacitate filorum ex quibus funis componitur pendere, quae ſi in variis funibus fuerit eadem, quando

quando ſcilicet ſimili modo ex filamentis fuerint contorti, euidens eſt, eorum firmitatem eo ſore maiorem, quo fuerint craſſiores. Ita ſi craſſities talis funis vocetur $= cc$, vis quam ſuſtinere valebit, quin rumpatur proportionalis erit ipſi cc. Dabitur igitur certa quaedam longitudo L, vt productum Lcc pro menſura eius vis, quam funis ſuſtinere valet haberi poſſit; vbi manifeſtum eſt, quantitatem iſtam L a tenacitate filamentorum pendere. Quoniam igitur hoc productum Lcc maſſam ideoque pondus eiusdem funis refert, ſi eius longitudo eſſet $= L$, hinc patebit, quantam longitudinem funis habere debeat, vt verticaliter ſuſpenſus a proprio pondere diuellatur.

§. 4. Quoniam iſta longitudo L a vi, qua minimae particulae ſingulorum filorum inter ſe cohaerent, ſeu potius a quapiam cauſſa externa ad ſe inuicem comprimuntur, pendet, ſi haec compreſſio a ſolo pondere Atmoſphaerae oriretur, quo nouimus, duo marmora polita inter quae nullus aer reperiatur tanta vi ad ſe inuicem apprimi, quae reſpondeat altitudini Barometri, quam ponamus $= k$, pro craſſitie $= cc$ cohaeſio ſuperari poſſet a pondere columnae mercurii, cuius baſis eſſet $= cc$ et altitudo $= k$; vnde ſi mercurius n vicibus grauior ſtatuatur quam materia funis, foret vtique $L = nk$ ideoque $= 28$ dig. At vero experientia ſatis declarat, pleroſque funes multo maius pondus ſuſtinere poſſe, vnde patet, cauſſam cohaeſionis non in pondere Atmoſphaerae eſſe quaerendam, ſed potius in

vi elaſtica aetheris, qua omnia corpora in contactu, vbi Aether penitus excluditur ad ſe inuicem apprimuntur. Ac plura quidem experimenta oſtendunt, iſtam vim Aetheris propemodum millies maiorem ſtatui debere quam preſſionem Atmoſphaerae; ſicque facile intelligitur, dari eiusmodi materias, pro quibus longitudo L ad mille atque adeo plures pedes aſſurgere queat.

§. 5. Quaecunque autem fuerit cauſſa firmitatis et cohaeſionis corporum, pro praeſenti inſtituto plane non eſt opus illam longitudinem L abſolute noſſe, quoniam hic non de abſoluta firmitate cuiusque materiae, ex qua machinae componi ſolent, agitur, ſed tota praeſens quaeſtio tantum verſatur circa comparationem roboris, quo varii funes ex eadem materia confecti fuerint praediti. Quantacunque igitur fuerit iſta longitudo L, ſi duo funes ſimili modo confecti inter ſe comparandi occurrant, quorum alterius craſſities ſit cc, alterius vero $= CC$, quoniam vires, quas geſtare valent ſunt Lcc et LCC, eae vtique inter ſe erunt vt $cc : CC$, ideoque tenebunt rationem craſſitiei. Atque haec ratio ſufficit, ad comparationem inter firmitatem plurium funium inſtituendam, ſi modo ſimili ratione fuerint compoſiti, atque vires quibus tales funes tenduntur ſimili modo fuerint applicati; id quod tuto aſſumere poſſumus; quandoquidem in omnibus huius generis machinis moduli ad perfectam ſimilitudinem parari ſolent.

Tab. II. Fig. 7. et 8. §. 6. His praemiſſis conſideremus duos funes $a\ c\ b$ et $A\ C\ B$, non ſolum ex ſimili materia confectos

fectos ſed etiam ſimili modo tenſos, quorum minoris craſſities ſit $= c\,c$, maioris vero $= C\,C$; pro minore autem diſtantia $a\,b = a$, pro maiore diſtantia $A\,B = A$. Iam denotet v vim, quam minor funis geſtare valet quin rumpatur, V vero vim quam maior ſuſtinere valeat; ac dummodo hae vires ſimili modo fuerint applicatae, manifeſtum eſt fore $v : V = c\,c : C\,C$, ita vt ſit $V = \frac{C\,C}{c\,c}\,v$, vbi quidem dimenſiones a et A non aliter in cenſum veniunt, niſi quatenus ſimilitudinem craſſitiei ſequuntur.

§. 7. Vires v et V duabus partibus conſtare ſunt cenſendae, quarum altera continet ipſum pondus vtriusque funis, cum partibus quae ipſis vi compagis ſunt coniunctae, altera vero continet onera quae vterque funis geſtare debet, et quae ipſis deinceps vel imponuntur vel appenduntur, hunc ipſum in finem, vt firmitas maioris ex firmitate minoris concludi poſſit. Sit igitur p pondus funis minoris et P maioris, atque ob ſimilitudinem manifeſtum eſt fore $p : P = a\,b\,c : A\,B\,C$, ita vt ſit $P = \frac{A\,B\,C}{a\,b\,c}\,p$. Iam per experimentum exploretur, quantum onus minor funis ſuſtinere valeat quin rumpatur, ſitque hoc onus $= q$, atque hinc definire poterit onus Q, quod maior funis geſtare valebit ſine ruptione.

§. 8. Quoniam igitur totae vires v et V vtrinque ſuſtinendae aggregatis ex ipſo pondere et onere aequales ſunt cenſendae: habebimus $v = p + q$ et $V = P + Q$: vtrinque enim licebit ipſum pondus cum onere coniungere. Quare cum ſit $V = \frac{B\,C}{b\,c}\cdot v$

 erit

erit $P + Q = \frac{BC}{bc}(p+q)$. Vnde cum ſit $P = \frac{ABC}{abc}p$ reperietur onus, quod maior funis geſtare valebit

$$Q = \frac{BC}{bc}(p+q) - \frac{ABC}{abc}p = \frac{BC}{bc}(p+q - \frac{A}{a}p).$$

Ex quo ſtatim patet, niſi fuerit $p + q > \frac{A}{a}p$ ſiue $q > \frac{A-a}{a}p$ maiorem funem non ſolum nullum onus ſuſtinere poſſe, ſed etiam proprio pondere disruptum iri, etiamſi minor funis ſatis notabile onus geſtare potuerit. Sicque manifeſto iam eſt euictum, ad ſimilitudinem moduli ipſam machinam non ad quam vis magnitudinem augeri poſſe, ſed maximam longitudinem A, quam etiamnunc obtinere liceat eſſe $A = \frac{p+q}{p}.a$, quam ſi transgredi voluerimus, machinam plane conſiſtere non poſſe.

§. 9. Hinc iam haud difficulter diiudicare poterimus, vtrum ope funium pontem transfluuium Neuam, cuius latitudo eſt circiter 1000 ped. Rhenan. conſtruere liceat nec ne. Hunc infinem conficiatur modulus ad longitudinem quantumuis exiguam veluti 20 pedum, cui ipſe pons perfecte ſimilis eſſe debeat, ita vt ſit $\frac{A}{a} = 50$, ac niſi iſte modulus onus ſuſtinere queat, quod plus quam 49 vicibus ſuperet proprium pondus, pons plane ſubſiſtere non poterit. Ac ſi forte hoc ſucceſſerit: tamen certum eſt, ſi latitudo fluuii adhuc eſſet maior, talem pontem nullo modo locum habere poſſe. Praeterea vero non ſufficit, vt pons proprium pondus ſuſtinere queat, ſed etiam neceſſe eſt, vt inſignia onera geſtare valeat, ideoque valor ipſius Q ex noſtra formula reſultans debitum nanciſcatur valorem.

§. 10. His de firmitate funium expeditis, perpendamus, quomodo trabes aliaue corpora rigida ruptioni reſiſtant. Conſideremus igitur trabem A C E F, iam tantopere inflexum, vt tantum non in A C abrumpatur. Referat igitur angulus A C A′ maximam hanc inflexionem, quam ſuſtinere valet, ita vt fibrillae extremae A A′ non amplius elongari queant, ſitque l iſta extenſio maxima $= A A'$ et L vis, qua ſeſe contrahere conentur, atque manifeſtum eſt, hanc vim L eam ipſam eſſe vim, qua ante vidimus funes diuulſioni reſiſtere, ita vt, ſi tota trabs ſecundum longitudinem A E traheretur a vi, quae eius ponderi, ſi longitudinem haberet $= L$ eſſet aequalis, tum tantum non penitus diuelleretur. Tab. II. Fig. 9.

§. 11. Ponamus nunc craſſitiem trabis $AC = c$, dum ſcilicet trabs circa punctum C abrumpi concipitur, latitudinem vero trabis eſſe $= b$. Nunc in ſpatio A C capiamus abſciſſam indefinitam $C P = x$, vbi ergo fibrillarum longitudo erit $P P' = \frac{l x}{c}$, quarum ergo vis contrahendi in eadem ratione erit minor, quam in extremitate A A′, ita vt iſta vis futura ſit $\frac{L x}{c}$; haec igitur multiplicata per elementum $P p = d x$ dabit vim elementarem $\frac{L x d x}{c}$ quam denuo per latitudinem trabis multiplicari oportet, vt prodeat $\frac{L b x d x}{c}$. Quoniam vero motus quo abruptio peragitur fit circa axem C, momentum iſtius vis elementaris reſpectu huius axis erit $= \frac{L b x x d x}{c}$, cuius integrale $\frac{L b x^3}{3 c}$ per totam craſſitiem trabis ſtatuendo

 $x = c$

$x = c$ extenſum praebebit totum momentum virium quibus trabs ruptioni reſiſtit, quod ergo erit $= \frac{1}{3} L b c c$. Quae expreſſio cum conſtet quatuor dimenſionibus, ternae exprimunt aliquod volumen, cuius pondus vi abrumpenti aequatur, quarta vero dimenſio exhibet longitudinem vectis, qua iſta vis operatur. Quod ſi ergo haec trabs a tantis viribus ſollicitetur, quarum momentum reſpectu puncti C ſuperet valorem formulae $\frac{1}{3} L b c c$, trabs in hoc loco certe abrumpetur.

§. 12. Quod ſi iam in modulo hae dimenſiones b et c referuntur ad ſingulas trabeculas, quarum firmitas ruptioni reſiſtere debet; pro ipſo ponte autem litterae B et C ſimiles dimenſiones trabium quibus conſtat exprimant, virium momenta, quibus tam modulus, quam ipſe pons fractioni reſiſtant inter ſe erunt vt $b c c$ ad B C C. Vbi obſeruari debet, actionem virium in eum tendere ſenſum, vt trabes ſecundum craſſitiem A C rumpere conentur. Si enim ſecundum latitudinem, quam ponimus $= b$ vim ſuam exercerent, momenta virium inter ſe forent vt $b b c$ ad B B C.

§. 13. Sit nunc longitudo moduli $= a$, ipſius pontis autem $=$ A; tum vero denotet v ſummam omnium virium, quas modulus ſuſtinere valet, quin rumpatur, littera vero V denotet ſummam omnium virium, quarum actioni etiamnunc reſiſtere valet: vtroque autem caſu omnes iſtas vires ſimili modo per totam longitudinem tam moduli quam ipſius pontis diſtributas eſſe ſupponimus. Quo

poſito

poſito manifeſtum eſt momenta omnium harum virium tam in modulo quam in ponte fore inter ſe vt $av : AV$, vnde concludimus, hanc inſignem proportionem, qua eſſe oportet

$$av : AV = bcc : BCC,$$

vnde ſequitur

$$v : V = \frac{bcc}{a} : \frac{BCC}{A}.$$

§. 14. Conſideremus nunc hic vires verticales quarum actionem pons ſuſtinere debet, et quae oriuntur tam a proprio pondere pontis quam ab oneribus, quibus ſuſtentandis par eſſe debet, pro quibus ergo litterae c et C referent craſſitiem trabium qua viribus verticalibus reſiſtunt, dum altera dimenſio b latitudinem earum repraeſentat. Statuamus igitur primo pro modulo eius proprium pondus a firmitate ſuſtentandum $= p$, onus vero quod inſuper geſtare valeat $= q$, quod ergo per experimenta facile explorari poterit, dummodo per eius longitudinem continuo maiora onera imponuntur, donec cedere incipiat. Pro ipſo autem ponte deſignet littera P eius proprium pondus, Q vero ſit ſumma omnium onerum, quae pons geſtare poſſe poſtulatur; quibus poſitis, erit vtique

$$v = p + q \quad \text{et} \quad V = P + Q,$$

vnde noſtra proportio ita ſe habebit

$$p + q : P + Q = \frac{bcc}{a} : \frac{BCC}{A},$$

vnde pro ipſo ponte deducimus

$$P + Q = \frac{aBCC}{Abcc}(p + q)$$

ex

ex qua aequatione ergo ſumma omnium onerum quae pons geſtare valebit determinari poterit, quae ſi minor fuerit quam requiritur, audacter pronunciare poterimus, pontem ſecundum modulum exſtruendum non ſatis roboris eſſe habiturum.

§. 15. Quoniam igitur ipſum pontem ſecundum modulum ſimili ratione et ex ſimili materia conſtrui aſſumimus, eius proprium pondus P ſe habebit ad pondus moduli vt A B C ad $a\,b\,c$; ſicque ex cognito pondere moduli p colligitur ipſius pontis pondus $P = \frac{ABC}{abc}p$; ex hoc ergo valore ſequitur fore $Q = \frac{aBCC}{Abcc}(p + q) - \frac{ABC}{abc}p$. Huius igitur regulae ope ex firmitate moduli, prouti per experimenta fuerit exploratum, hoc eſt ex cognitis ponderibus p et q aſſignari poteſt totum onus Q, quod ipſe pons ſupra proprium pondus ſuſtinere valebit. Ante omnia igitur cauendum eſt, ne pars negatiua $\frac{ABC}{abc}p$ maior euadat parte poſitiua $\frac{aBCC}{Abcc}(p + q)$, quoniam alioquin pons plane ſubſiſtere non poſſet, ſed proprio pondere corrueret. Ne igitur hoc eueniat omnino neceſſe eſt, vt ſit $p + q > \frac{AAc}{aaC}p$, ideoque $q > (\frac{AAc}{aaC} - 1)p$.

§. 16. Quod ſi iam aſſumamus, ipſum pontem prorſus et ſecundum omnes dimenſiones ſimilem eſſe modulo. (Facile enim intelligitur, noſtram formulam etiam locum habere poſſe, quamuis ternae dimenſiones maiores A, B, C non plane eandem rationem tenerent ad minores a, b, c, dummodo

modo diſcrimen non fuerit ſatis magnum) ſtatuamus ſingulas dimenſiones moduli ſe habere ad dimenſiones ipſius pontes vt $1:n$, eritque ergo $A = na$, $B = nb$ et $C = nc$. Hinc igitur habebimus iſtam aequationem pro onere Q definiendo:

$$Q = n^2(p+q) - n^3 p \text{ ſiue } Q = nn(p+q-np)$$

vnde patet, vt pons conſiſtere poſſit, ante omnia neceſſe eſſe, vt ſit $q > (n-1)p$, quia alioquin proprio pondere in ruinam laberetur. Praeterea vero neceſſe eſt, vt onus a modulo geſtatum q eo magis ſuperet hunc limitem $(n-1)p$, quo maius fuerit ſumma omnium onerum Q, quae ipſe pons geſtare poſſe poſtulatur. Ita ſi e. gr n fuerit $= 30$, neceſſe eſt vt ſit $q > 29p$; vnde ſi fuerit $q = 30p$ erit $Q = 900p$; ſin autem ſit $q = 31p$ prodibit $Q = 1800p$: at ſi ſit $q = 32p$ fiet $Q = 2700p$ etc. Ex quo intelligitur, ſi modo q aliquot vicibus ſuperet limitem $29p$ tum pontem iam ſatis notabile onus Q ſuſtinere poſſe; quoniam pro qualibet vice incrementum capit $= 900p$.

§. 17. Quod ſi hoc modo pons ad perfectam ſimilitudinem moduli exſtructus non ſatis roboris habiturus reperiatur huic defectui remedium afferri poterit, dum craſſities ſaltem trabium, quam littera C deſignauimus vltra rationem $1:n$ augeatur. Quanquam enim hac ratione non amplius perfecta ſimilitudo inter modulum ſubſiſtet: tamen concluſiones, quas noſtrae formulae ſuppeditant nihilo minus valebunt, dummodu diſſimilitudo non fuerit enormis, atque onera vtrinque aequabiliter per totam

longitudinem diſtribuantur. Quemadmodum enim pontem cum modulo comparauimus, nulla neceſſitas vrget, vt omnes ternae dimenſiones a, b, c et A, B, C eandem prorſus inter ſe teneant rationem.

§. 18. Maneat igitur ratio longitudinis $a : A = 1 : n$ ſiue $A = n a$, eademque ratio etiam pro latitudine retineatur vt ſit $B = n b$; verum pro craſſitie ſtatuatur $C = z c$. Hinc igitur formula noſtra pro onere Q (§. 15.) inuenta ſequenti modo ſe habebit:

$$Q = z z (p + q) - n n z p.$$

Ex hac igitur aequatione ſi onus a ponte geſtandum Q fuerit praeſcriptum definiri poterit quantitas incognita

$$z = \frac{n n p + \sqrt{n^4 p p + 4 (p + q) Q}}{2 (p + q)}.$$

Hinc igitur, ſi circumſtantiae permittant, vt in conſtructione pontis craſſities trabium tanto maior capi queat, hoc modo ponti ſufficiens firmitas conciliabitur.

§. 19. Illuſtremus hanc formulam quodam exemplo, et ſumamus latitudinem fluuii tricies ſuperare longitudinem moduli, ſiue eſſe $n = 30$. Sumamus porro pontem tantum roboris habere debere, vt ſuſtinere, queat onus $= 3600 p$; modulo autem explorato tantum prodiiſſe $q = 30 p$, vnde ſi pons perfecte ſimilis conficeretur modulo, prodiret tantum $Q = 900. p$ quam ob rem in noſtra formula faciamus $q = 30 p$ et $Q = 3600 p$ ac reperiemus

$$z = \frac{900. + \sqrt{900^2. + 4 . 31 . 3600}}{2. 31}.$$

quae

quae reducitur ad

$$z = \frac{900. + 30\sqrt{900 + 16.\,31}}{2.\,31}$$

cuius valor ergo reperietur $z = 32,595$, vnde perſpicitur, hoc caſu pontem ſatis firmitatis eſſe adepturum, dummodo craſſities trabium $32\frac{3}{5}$ vicibus maior ſumatur quam in modulo, dum binae reliquae dimenſiones tantum tricies maiores ſumantur; quo pacto diſcrimen, quo a ſimilitudine receditur vix animaduerti poterit.

§. 20. Hoc igitur remedium etiam in vſum vocari poterit, quamuis modulo per experimenta explorato onus q multo minus repertum fuerit, quam $29\,p$. Quod vt generaliter oſtendamus ponamus experimenta in modulo inſtituta praebuiſſe $q = (\lambda - 1)p$, manente onere ab ipſo ponte geſtando $Q = 3600p$. Cum igitur hinc ſit $p + q = \lambda p$ habebitur

$$z = \frac{900 + 30\sqrt{900 + 16\lambda}}{2\lambda} = \frac{15}{\lambda}(30 + \sqrt{900 + 16\lambda}).$$

Hic igitur incipiendo a valore $\lambda = 33$ dontinuo minores aſſumamus, et valores ipſius z inde reſultantes in ſequenti tabula exhibeamus

λ	$q=(\lambda-1)p$	$z=\frac{15}{\lambda}(30+\sqrt{900+16\lambda})$
33	32 p	30, 81
32	31 p	31, 68
31	30 p	32, 85
30	29 p	33, 58
29	28 p	34, 62
28	27 p	35, 74
27	26 p	36, 61
26	25 p	38, 23
25	24 p	39, 63
24	23 p	41, 14
23	22 p	42, 79
22	21 p	44, 58
21	20 p	46, 54
20	19 p	48, 70

§. 21. Ex hac igitur tabula colligimus, ſi firmitas moduli tantum praebuerit $q = 20\,p$, quo caſu exſtructio pontis penitus repudianda videri poſſet: tamen ei ſatis roboris conciliatum iri, ſi modo craſſities trabium ſecundum rationem 1 : 48, 70 multiplicetur. Similique modo etiam in aliis caſibus, vbi pontes vel alia huiusmodi opera ſecundum modulum exſtrui proponuntur, facile diiudicari poterit, vtrum ſatis firmitatis ſint habitura nec ne, atque adeo poſteriori caſu firmitatem pro lubitu augere licebit.

§. 32. Verum quia pontes etiam impetui ventorum ſatis reſiſtere debent, explorari etiam debebit modulus, dum fortiſſimo vento exponitur. Quod

Quod ſi enim eius impetum ſuſtinere valeat, etiam certi eſſe poterimus, ipſum pontem a tali vento nullum damnum eſſe paſſurum. Cum enim impulſio venti eiusdem ſuperficiei ſit proportionalis, ideoque rationem $1 : nn$ teneat, quoniam firmitas qua vento reſiſtitur eandem rationem ſequitur, manifeſtum eſt, ipſum pontem eosdem venti impetus ſuſtinere poſſe, quibus modulus reſiſtere valuerit.

§. 23. Sin autem forte eueniat, vt pons non ſatis roboris habere deprehendatur, tum eius vis vento reſiſtendi facile augeri poterit, dum latitudo trabium maior accipietur; imprimis autem vtile erit, ponti in vtroque termino maiorem tribuere latitudinem quam circa medium, vt hoc modo vento quaſi fornicem offerat, quo eius impulſioni multo fortius reſiſtat. Vix autem hinc quicquam metuendum videtur, dummodo ratione prioris generis ſatis habuerit roboris, eique inſuper ſufficiens latitudo tribuatur.

DE GEMINA METHODO TAM AEQVILIBRIVM QVAM MOTVM CORPORVM FLEXIBILIVM DETERMINANDI, ET VTRIVSQVE EGREGIO CONSENSV.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Iam in *Tomo III. Commentariorum priorum Academiae Imperialis* expoſui methodum vniuerſalem, inueniendi figuram, quam filum ſiue perfecte flexile ſiue inſuper elaſticum a potentiis quibuscunque ſollicitatum, induere debet, vt in aequilibrio conquieſcat. Methodus autem haec doctrina momentorum innitebatur; quandoquidem ſumma omnium momentorum, quae ex ſingulis viribus ſollicitantibus naſcuntur, pro quouis fili puncto cum eius elaſticitate vbique in aequilibrio conſiſtere debet. Deinde vero non ita pridem in *Tomo XV. nouorum Commentariorum* longe aliam methodum tradidi eas-dem

dem quaeſtiones reſoluendi, quae notioni tenſionum qua ſingula fili elementa afficiuntur erat innixa. Formulae autem quibus haec ſolutio poſterior continetur, tantopere a ſolutione priori diſſidere videntur, vt primo intuitu vix vllum conſenſum perſpicere liceat; cuius diuerſitatis ratio manifeſto in eo eſt poſita, quod haec duo principia, alterum ſcilicet momentorum, alterum tenſionum tantopere a ſe inuicem diſcrepant, vt nihil commune habere videantur. Quin etiam, niſi pro huiusmodi problematibus determinatis ex vtraque methodo eadem plane ſolutio eliceretur, merito quis dubitare poſſet, num iſtae duae methodi inter ſe conuenirent, quod quidem dubium me ipſum non ſemel haeſitantem reliquit. Quam ob rem Geometris munus haud ingratum me eſſe oblaturum confido, ſi egregium conſenſum inter haec duo principia toto coelo a ſe inuicem diuerſa dilucide demonſtrauero.

Status quaeſtionis.

§. 2. Propoſito filo quocunque A M B, ſiue perfecte flexili, ſiue vtcunque elaſtico, cui in ſingulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, ſit A M B eius figura, quam in ſtatu aequilibrii induit, eaque more ſolito ad axem fixum A E referatur per coordinatas orthogonales A P $= x$ et P M $= y$; ipſe autem arcus ponatur A M $= s$, cuius elemento M $m = ds$ duae applicatae ſint vires elementares, altera ſecundum directionem M P ſollicitans $= P\,ds$, altera vero ſecundum directionem Tab. IV. Fig. 1.

M Q

M Q axi parallelam $= Q\,ds$; quibus viribus elementaribus adiungi oportet vires finitas, quibus filum vel in altero tantum termino, vel in vtroque ſollicitatur. Praeterea vero ratione elaſticitatis filum ita comparatum concipiatur, vt ſi ad elementum M m radius curuedinis fuerit $= r$, conſtruatio huius curvaturae poſtulet virium momentum $= \frac{S}{r}$. Quo autem curuaturae ratio facilius habeatur, ponamus angulum A M P $= \Phi$, quem ſcilicet tangens curuae cum applicata conſtituit, eritque angulus M $m\,p$ $= \Phi + d\Phi$; hincque perſpicuum eſt, radium oſculi in M fore $= \frac{ds}{d\Phi}$, ſicque momentum elaſticitatis erit $\frac{S\,d\Phi}{ds}$. His autem poſitis erit ſin. $\Phi = \frac{dx}{ds}$ et coſ. $\Phi = \frac{dy}{ds}$, exiſtente $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Conſtitutis igitur his viribus determinari debet figura ad quam filum ſe componet, et in aequilibrio conſiſtet: atque hic quidem momendum eſt, nos alias vires hic non admittere, niſi quae in idem planum cadant, in quo etiam totum filum continetur, quamvis quaeſtio non multo difficilior eſſet futura, ſi filo duplex curuatura tribueretur, ternis coordinatis definienda, vbi etiam triplicis ordinis vires in computum duci deberent. Verum perſpicuitati potiſſimum conſulentes omnia in eodem plano exiſtere concipiamus. Interim tamen ipſum filum vtcunque inaequaliter craſſum et elaſticum ſtatuere licet, quandoquidem hinc ſolutio non euadit difficilior.

Solu-

Solutio prior ex principio momentorum petita.

§. 3. Iſta ſolutio in hoc conſiſtit, vt omnium virium elementarium quae per totum arcum A M ſunt applicatae momenta reſpectu puncti M quaerantur et in vnam ſummam colligantur, quae deinde elaſticitati $\frac{S\,d\,\Phi}{d\,s}$ aequalis poſita aequationem, exhibebit pro figura laminae quaeſita. Dum igitur omnia iſta momenta elementaria conquirimus punctum curuae M tanquam fixum, eiusque coordinatas x et y quaſi conſtantes ſpectare debemus.

§. 4. Conſideretur igitur portionis A M elementum quodcunque in Y, quod ſit $= dS$, pro quo ponantur coordinatae variabiles $A X = X$ et $X Y = Y$; tum vero vires iſti elemento applicatae ſint ſecundum $YX = pdS$ et ſecundum $YZ = qdS$; quae poſterior directio axi parallela applicatae fixae P M occurrat in puncto V; quibus poſitis vis elementaris $p\,dS$ momentum reſpectu puncti M erit $p\,dS\,PX = p\,dS(x - X)$ quorum ergo momentorum ſumma erit $x\int p\,dS - \int Xp\,dS$ pro arcu A Y. Iam promoueatur punctum Y vsque in M, et abibunt litterae X, Y, S, p in x, y, s, P, ſicque iſtud momentum totale erit $x\int P ds - \int x P ds$, cuius differentiale eſt $dx\int P\,ds$, quod iterum integratum praebet iſtud momentum $= \int dx\int P\,ds$, quod curuaturam in M augere tendit. Tab. IV. Fig. 2.

§. 5. Simili modo vis elementaris $YZ = qds$ momentum pro M producit

$$= q\,dS.\,MV = q\,dS(y - Y)$$

quod ergo curuaturam minuere conatur. Summa igitur omnium horum momentorum per arcum A Y erit $y\int q\,dS-\int Y\,q\,dS$, quod vsque ad M promotum, quoniam quantitates Y, q, S abeunt y, s et Q erit

$$y\int Q\,ds-\int y\,Q\,ds=\int dy\int Q\,ds.$$

§. 6. Cum igitur ex omnibus viribus arcui A M applicatis oriatur momentum ad curuaturam augendam tendens $=\int dx\int P\,ds-\int dy\int Q\,ds$; hoc vtique elaſticitati aequale poni debet; vnde iſtam adipiſcimur aequationem:

$$\int dx\int P\,ds-\int dy\int Q\,ds=\frac{S\,d\Phi}{ds}$$

qua natura curuae, quam lamina in ſtatu aequilibrii accipit, determinatur, ita vt ope huius methodi ſeu per figura laminae a quibuscunque viribus ſollicitatae definiri queat. Neque vero hinc ſymptomata, quae figuram laminae comitantur, cognoſcere licet, cuiusmodi ſunt: tenſio quam ſingula elementa ſuſtinent; tum vero etiam vires normales ad curuaturam cuiusque elementi producendam requiſitas; quem defectum per alteram methodum, cuius explicatio ſequitur, ſupplere ſum conatus.

§. 7. Ante autem quam hanc methodum deferamus aliam viam oſtendiſſe, iuuabit, qua ſine conſideratione elementorum intermediorum Y totum negotium confici poterit. Denotet M ſummam omnium momentorum ex viribus ſecundum directionem applicatarum M P agentium oriundam pro puncto M, eritque pro puncto m eadem ſumma

$=$ M

$= M + dM$: verum ſi ſingularum virium elementarium momenta a puncto M vsque in m transferamus, ſingulae inſuper per elementum dx multiplicare oportet; ſicque incrementum dM reperitur, ſi omnes iſtae vires elementares, quarum ſumma vtique eſt $\int P ds$ per elementum dx multiplicentur, vnde fit $dM = dx \int P ds$ ideoque porro ipſum momentum $M = \int dx \int P ds$. Eodemque modo intelligitur fore ſumma omnium momentum, ex alteris viribus ſecundum directionem P A agentium $\int dy \int Q ds$, cuius ratiocinii ope praecedens aequatio pro figura laminae eruitur.

Solutio poſterior ex principio tenſionum petita.

§. 8. Quia tota lamina ob vires ipſi applicatas in ſtatu violento tenetur, euidens eſt, ſi portio A M reſecetur, reliquam portionem B M ſubito longe aliam figuram eſſe accepturam. Quod igitur ne eueniat, perpendamus, cuiusmodi vires puncto M applicari conueniat, quibus ſuperior portio B M in eodem ſtatu conſeruetur, ac ſi cum portione M A manſiſſet connexa. Ac primo quidem facile intelligitur punctum M certa quadam vi quae ſit $= T$ ſecundum tangentem M T trahi debere, qua ſcilicet tenſio elementi Mm, quamcunque habuerit, obtineatur. Praeterea vero quia elementum Mm habet curuaturam $= \frac{d\Phi}{ds}$, vnde naſcitur vis elaſtica $\frac{S\,d\Phi}{ds}$, requiritur vis quaepiam normalis T V quae ſit $= V$, cuius momentum reſpectu puncti M cum elaſticitate Tab. IV. Fig. 1. Fig. 3.

in aequilibrio conſiſtát. Hic ſcilicet loco tingentis M T virgam rigidam cogitare conuenit, vt idea momenti locum habere poſſit Vocetur igitur diſtantia M T $= v$, et illius vis normalis momentum erit $= V v$, quod elaſticitati aequatum nobis ſuppeditat primam aequationem

$$\text{I. } V v = \frac{S d \Phi}{d s}.$$

Simili igitur modo pro puncto m habebimus vim tangentialem $T + d T$ et normalem $t v = V + d V$, vna cum interuallo $m t = v + d v$, vnde pro puncto m naſcetur momentum.

$$(V + d V)(v + d v) = V v + d. V v.$$

§. 9. Reuera autem elementum $M m = d s$ ſuſtinet vt vidimus duas vires elementares $P d s$ et $Q d s$ ſecundum directiones M P et M Q (vide fig. 1.) ex quibus eliciamus duas alias vires, alteram ſecundum tangentem M T agentem, quae erit

$$P d s \operatorname{coſ.} \Phi + Q d s \operatorname{ſin.} \Phi;$$

cuius loco ſcribamus breuitatis gratia $p d s$; alteram vero iſti normalem

$$P d s \operatorname{ſin.} \Phi - Q d s \operatorname{coſ.} \Phi,$$

cuius loco ſcribamus $q d s$, quam in M applicatam concipiamus $M = q d s$, dum alteram vi tangentiali addamus vt ſit $T p = p d s$.

§. 10. Nunc igitur pro tangente M T, adiectis iſtis viribus elementaribus, vis tangentialis erit $T + p d s$; tum vero praeter vim normalem $T V = V$ habebimus in M etiam vim normalem

$M q$

$M q = q\,ds$, atque hae vires iunctim ſumtae aequivalere debent viribus quas tangenti proximae $m\,t$ applicatas concipiamus, quandoquidem illis, quas tangenti $M\,T$ applicatas concepimus inſuper binas vires elementum $M\,m$ vrgentes addidimus. Hunc in finem vires tangenti $m\,t$ applicatas transferamus in tangentem principalem $T\,M$, et quia angulus $T\,m\,t = d\,\Phi$ vis tangentibus $m\,t = T + d\,T$ dabit vim ſecundum

$$m\,T = (T + d\,T)\,\text{coſ.}\,d\,\Phi = T + d\,T,$$

praeterea vero etiam praebet vim normalem

$$m\,r = (T + d\,T)\,d\,\Phi.$$

Pro reſolutione autem alterius vis figuram peculiarem conſideremus (hic ſcilicet normalis $t\,u$ priorem tangentem ſecet in Φ) et ſumamus vim $o\,u = V + d\,V$, quae reſoluatur in vires, alteram normalem $o\,s = V + d\,V$, alteram vero ſecundum tangentem $s\,u = (V + d\,V)\,d\,\Phi$ ob angulum $u\,o\,s = d\,\Phi$. Tab. IV. Fig. 4.

§. 11. Vires igitur quae ex hac translatione prodierunt ſunt, primo tangentialis $T + d\,T$ vna cum vi illa ſecundum $s\,u = (V + d\,V)\,d\,\Phi$, quae ergo ſuperioribus tangentialibus aequales eſſe debent, quae erant $T + p\,d\,s$, vnde oritur iſta aequatio:

$$T + d\,T + (V + d\,V)\,d\,\Phi = T + p\,d\,s$$

quae reducitur ad hanc:

$$d\,T + V\,d\,\Phi = p\,d\,s$$

quae eſt ſecunda aequatio ad quam peruenimus. Deinde translatio illa praebuit iſtas vires normales

 $o\,s =$

$os = V + dV$ vna cum vi $mr = (T + dT)\,d\Phi$ in contrariam partem vergente, ſicque harum differentia $V + dV - (T + dT)\,d\Phi$ aequalis eſſe debet viribus normalibus, quas tangenti MT applicatas reperimus, ſcilicet viribus $TV = V$ et $Mq = q\,ds$, vnde iſta oritur aequatio tertia:

$$V + dV - (T + dT)\,d\Phi = V + q\,ds$$

quae reducitur ad hanc:

$$dV - T\,d\Phi = q\,ds.$$

At vero non ſufficit iſtas vires normales inter ſe aequaſſe, ſed neceſſe eſt, vt etiam earum momenta reſpectu eiusdem puncti m inter ſe reddantur aequalia. Hunc in finem cum ſit mo coſ. $d\Phi = v + dv$ hoc eſt $mo = v + dv$, erit virium translatarum momentum

$$(V + dV)(v + dv) - (T + dT).\,o = Vv + d.\,Vv$$

virium vero normalium tangenti mT actu applicatarum momentum fiet

$$V.\,Tm + q\,ds.\,Mm = V(v + ds) + q\,ds^2 = Vv + V\,ds,$$

quia alterum membrum continet infinite paruum ſecundi ordinis; hinc igitur naſcitur iſta aequatio quarta

$$Vv + d.\,Vv = Vv + V\,ds \text{ ſiue } d\,Vv = V\,ds.$$

§. 12. Has igitur quatuor aequationes ex ratiocinio ſuperiori deductas eodem ordine repraeſentemus quo eas in *Tomo XV. Comment. pag.* 329. retulimus

I.

I. $d\mathrm{T} + \mathrm{V}\, d\Phi = p\, d s$
II. $d\mathrm{V} - \mathrm{T}\, d\Phi = q\, d s$
III $\mathrm{V}\, d s = d.\, \mathrm{V}\, v$

quibus adiungi debet principalis hic primo loco inventa

IV. $\mathrm{V}\, v = \frac{\mathrm{S}\, d\, \Phi}{d s}$

vbi intuenti nulla prorſus conuenientia cum praecedente ſolutione patebit. Vnde eo magis neceſſarium videtur, pulcherrimum conſenſum inter has duas ſolutiones toto coelo quaſi a ſe inuicem diſcrepantes demonſtrare.

Demonſtratio conſenſus inter has duas ſolutiones.

§. 13. Hic igitur ante omnia ipſas vires elementares in quaeſtione propoſitas, $\mathrm{P}\, d s$ et $\mathrm{Q}\, d s$ introducamus, et duae aequationes noſtrae priores hanc induent formam:

I. $d\mathrm{T} + \mathrm{V}\, d\Phi = \mathrm{P}\, d s \operatorname{coſ.} \Phi + \mathrm{Q}\, d s \operatorname{ſin.} \Phi$
II. $d\mathrm{V} - \mathrm{T}\, d\Phi = \mathrm{P}\, d s \operatorname{ſin.} \Phi - \mathrm{Q}\, d s \operatorname{coſ.} \Phi.$

Iam iſta combinatio I. coſ. Φ + II. ſin. Φ praebet

$d\mathrm{T} \operatorname{coſ.} \Phi - \mathrm{T}\, d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi + d\mathrm{V} \operatorname{ſin.} \Phi + \mathrm{V}\, d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi = \mathrm{P}\, d s$

cuius integrale eſt

$\mathrm{T} \operatorname{coſ.} \Phi + \mathrm{V} \operatorname{ſin.} \Phi = \int \mathrm{P}\, d s.$

Deinde vero iſta combinatio I. ſin. Φ − II. coſ. Φ praebet

$d\mathrm{T} \operatorname{ſin.} \Phi + \mathrm{T}\, d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi - d\mathrm{V} \operatorname{coſ.} \Phi + \mathrm{V}\, d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi = \mathrm{Q} d s$

et integrando

$\mathrm{T} \operatorname{ſin.} \Phi - \mathrm{V} \operatorname{coſ.} \Phi = \int \mathrm{Q}\, d s.$ Nunc

Nunc ſi prior in coſ. Φ, poſterior vero in ſin. Φ ducatur, ſumma prodibit

$$T = \text{coſ.}\,\Phi \int P\,ds + \text{ſin.}\,\Phi \int Q\,ds.$$

At ſi a priore ducta in ſin Φ auferamus poſteriorem ductam in coſ. Φ relinquetur

$$V = \text{ſin.}\,\Phi \int P\,ds - \text{coſ.}\,\Phi \int Q\,ds.$$

Hoc igitur modo ambas vires incognitas V et T, quas ad ſtatum elementi Mm cognoſcendum in calculum induximus, per ſolas vires elementares $P\,ds$ et $Q\,ds$ quas tanquam cognitas ſpectare licet expreſſimus, ita vt nunc loco aequationum I et II nacti ſimus has

$$1^\circ.\ T = \text{coſ.}\,\Phi \int P\,ds + \text{ſin.}\,\Phi \int Q\,ds$$

$$2^\circ.\ V = \text{ſin.}\,\Phi \int P\,ds - \text{coſ.}\,\Phi \int Q\,ds.$$

§. 14. Nunc etiam conſideremus binas reliquas aequationes III et IV, in quibus tantum duae incognitae occurrunt, ſcilicet V et v; et quia IV^ta ſponte praebet $Vv = \frac{S\,d\Phi}{ds}$, erit differentiando $d.Vv = d.\frac{S\,d\Phi}{ds}$; per tertiam autem erat $V = \frac{d.Vv}{ds}$, vnde colligimus $V = \frac{d.S\,d\Phi}{ds^2}$: in hac ſcilicet differentiatione elementum ds pro conſtante aſſumimus; quo ergo valore in priore ſubſtituto prodibit

$$v = \frac{S\,d\Phi}{V\,ds} = \frac{S\,d\Phi\,ds}{d.S\,d\Phi}.$$

Hoc igitur modo ambas incognitas V et v per ſymptomata ipſius curuae, per quantitatem elaſticitatis qua lamina in ſingulis elementis gaudet expreſſimus, ita vt nunc loco binarum aequationum III et IV. has duas nouas ſimus aſſequuti:

$$3^\circ.\ V = \frac{d.S\,d\Phi}{ds^2} \text{ et } 4^\circ.\ v = \frac{S\,d\Phi\,ds}{d.S\,d\Phi}.$$

§. 15.

§. 15. Tali igitur euolutione geminum valorem pro eadem vi V (ſcilicet No. 2 et 3) elicuimus, qui ergo inter ſe aequati ſequentem nobis ſuppeditant aequationem:

$$\text{ſin.}\,\Phi\int P\,ds - \text{coſ.}\,\Phi\int Q\,ds = \frac{d.\,S\,d\Phi}{ds^2}$$

quam per ds multiplicemus, et quoniam erat

$$dx = ds\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et } dy = ds\,\text{coſ.}\,\Phi$$

obtinebimus hanc aequationem:

$$dx\int P\,ds - dy\int Q\,ds = \frac{d.\,S\,d\Phi}{ds^2}$$

quae integrata praebet

$$\int dx\int P\,ds - \int dy\int Q\,ds = \frac{S\,d\Phi}{ds}$$

qua ergo aequatione natura curuae per mera elementa cognita exprimitur; atque haec aequatio manifeſto eſt prorſus eadem, ad quam nos prior methodus ex doctrina momentorum petita deduxerat, ita vt nunc quidem pulcherrimus conſenſus vtriusque methodi clariſſime eluceat. Verum methodus poſterior priori vtique maxime antecellit, cum nobis non ſolum figuram laminae exhibeat, ſed etiam ſtatum violentum, in quo ſingula laminae elementa reperiuntur declaret.

§. 16. Quemadmodum binas vires T et V per ſolas vires elementares $\int P ds$ et $\int Q ds$ expreſſas dedimus, ita etiam interuallum M T $= v$ per easdem definire licet; cum enim ſit

$$\frac{S\,d\Phi}{ds} = \int dx\int P\,ds - \int dy\int Q\,ds \text{ et}$$

$$\frac{d.\,S\,d\Phi}{ds} = dx\int P\,ds - dy\int Q\,ds \text{ erit}$$

$$v = \frac{ds\int dx\int P\,ds - ds\int dy\int Q\,ds}{dx\int P\,ds - dy\int Q\,ds}.$$

Tab. IV. Fig. 5. In his autem formulis integralibus, quanquam ſolas vires elementares complectuntur, etiam vires finitae, quibus forte lamina in termino A ſollicitatur, comprehendi poſſunt. Si enim lamina in ipſo termino A vrgeatur a viribus A E et A F ſecundum directiones abſciſſarum et applicatarum, tum manifeſtum eſt, formulam integralem $\int P\,ds$ in ſe comprehendere debere vim A F, alteram vero formulam $\int Q\,ds$ vim A E. Id quod etiam ee altero laminae termino eſt intelligendum, quandoquidem calculum eodem modo pro altero termino B inſtituere poſſemus.

§. 17. Perpetuo autem probe tenendum eſt, ſi calculum quem hactenus pro termino laminae A inſtruximus eodem modo pro altero termino B inſtituamus, non ſolum eandem curuam pro figura laminae reperiri debere, ſed etiam vires, quibus ſtatus violentus cuiusque elementi definitur, vtrinque easdem prodire debere. Fig. 6. Quod ſi enim tangentes T M et $t\,m$ ad alteram partem continuamus in M T' et $m\,t'$, tum etiam eaedem reſultare debent vires tangentiales T et T + d T, atque etiam vires normales T V et T' V' cum interuallis M T et M T' neceſſario conuenire debent; quod idem de tangente proxima $t\,m\,t'$ eſt intelligendum. Praeterea vero etiam vires elementares, quibus laminae portio B M ſollicitatur, tantum ratione ſigni ab illis quibus portio A M afficitur diſcrepabunt. Cum enim tota lamina ſupponitur eſſe in aequilibrio, neceſſe eſt, vt omnes vires vtrinque ſe mutuo deſtruant, ita,

ita, vt valores $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ pro altera B M abire debeant in $-\int P\,ds$ et $-\int Q\,ds$.

§. 18. Hic omni attentione dignae videntur egregiae relationes, quas poſterior methodus nobis inter vires elementares et vires T et V cum interuallo $MT=v$ manifeſtauit; quae conuenientia, quanquam ſine dubio in primis Staticae principiis eſt fundata, tamen non tam facile perſpicitur, quam ob rem operae pretium erit iſtam conuenientiam in ſequentibus theorematibus clarius oſtendere.

Theorema I.

§. 19. Vis tangentialis T, quam ſtatus violentus elementi Mm poſtulat, reperitur, ſi ſumma omnium virium elementarium $\int P\,ds$ et $\int Q\,ds$ puncto M ita applicatae concipiantur, vt illa $\int P\,ds$ ſecundum directionem M P, altera vero ſecundum directionem M Q agat, tum vero ambae ſecundum directionem tangentis M T reſoluantur; hoc enim modo reſultat formula $\text{coſ.}\,\Phi\int P\,ds+\text{ſin.}\,\Phi\int Q\,ds$, cui vis tangentialis T aequalis eſt inuenta. Tab. IV. Fig. 7.

Theorema II.

§. 20. Vis normalis $TV=V$ ad ſtatum violentum elementi Mm requiſita, reperitur, ſi ſumma virium elementarium $\int P ds$ vt ante puncto M in directione M P applicata concipiatur, altera vero $\int Q ds$ in directione M Q, tum vero vtraque ſecundum directionem ad curuam normalem M N reſoluatur; tum enim pro hac directione reſultat vis $\text{ſin.}\,\Phi\, d\int P\,ds-\text{coſ.}\,\Phi\int Q\,ds$, Fig. 7.

 cui

cui vis illa normalis T V aequalis ſupra eſt inventa.

Theorema III.

Tab. IV. Fig. 7. §. 21. Si vires tangentialis T et normalis V puncto M ſecundum directiones M T et M N applicentur, eaeque ſecundum directiones coordinatarum M P et M Q reſoluentur, pro directione M P prodibit ſumma omnium virium elementarium $\int P\,ds$; at pro directione M Q ſumma omnium elementarium $\int Q\,ds$. Hoc enim modo pro directione M P prodit vis $T \text{coſ.} \Phi + V \text{ſin.} \Phi = \int P\,ds$; tum vero pro directione M Q vis $T \text{ſin.} \Phi - V \text{coſ.} \Phi = \int Q\,ds$.

Theorema IV.

Fig. 3. §. 22. Si pro puncto laminae M tangenti MT applicata ſit vis $TV = V$, in diſtantia $MT = v$; ſimilique modo pro puncto laminae proximo m eius tangenti $m\,t$ applicata ſit in t vis normalis $tv = V + dV$ in diſtantia $mt = v + dv$, harum ambarum virium T V et $t\,v$ momenta reſpectu puncti m ſumta ſemper inter ſe erunt aequalia. Cum enim pro vi T V ſit diſtentia $m\,T = V + ds$, erit eius momentum $= V\,v + V\,ds$; alterius vero vis $t\,v$ momentum erit $(V + dV)(v + dv) = V\,v + d.\,V\,v$; quorum momentorum aequalitas praebet $V\,ds = d.\,V\,v$, quae eſt ipſa aequalitas ſupra (III §. 12.) exhibita.

§. 23. Quoniam ſtatum violentum in quo laminae elementum M m reperitur ad binas vires T et V perduximus, quarum iſta V in diſtantia $MT = v$ applicata eſt concipienda, fieri poteſt,

vt

vt iſta diſtantia v adeo vsque in infinitum augeatur, quo quidem caſu ipſa vis V ita euaneſcit, vt eius momentum Vv certum habeat valorem: ſcilicet elaſticitati elementi $\int \frac{d\Phi}{ds}$ aequalem. Cum igitur hunc caſum ob oculos ponere non liceat, quo facilius iſtum effectum ob oculos ponamus, in genere obſeruandum eſt, ſemper loco vis $TV = V$ in diſtantia $MT = v$ agentis in datis duobus punctis α et β binas vires $\alpha\eta$ et $\beta\theta$ applicari poſſe, quae plane eundem effectum ſint praeſtaturae. Sint enim diſtantiae $M\alpha = \alpha$ et $M\beta = \beta$, tum vero vires quaeſitae $\alpha\eta = \eta$ et $\beta\theta = \theta$; ac primo neceſſe eſt vt ſit $\eta - \theta = V$; praeterea vero etiam momenta reſpectu puncti M aequalia eſſe debent, vnde fit $Vv = \eta\alpha - \theta\beta$. Cum igitur ex priore ſit $\eta = V + \theta$, erit nunc $Vv = V\alpha + \alpha\theta - \beta\theta$, vnde colligitur $\theta = \frac{V(v-\alpha)}{\alpha-\beta}$, hincque $\eta = \frac{V(v-\beta)}{\alpha-\beta}$. Quare ſi in punctis α et β iſtae vires applicentur, elementi Mm ſtatus perinde conſeruabitur atque a momento Vv, dummodo inſuper vis tangentialis T adiungatur. Ab his autem duabus viribus η et θ tangens curuae quaſi vellicabitur, quippe quo pacto elemento Mm curuatura induci poteſt. Tab. IV. Fig. 8.

Applicatio ad laminas elaſticas, quae in ſtatu naturali iam ſunt incuruatae.

§. 24. Hactenus tantum eiusmodi laminas elaſticas ſumus contemplati, quae naturaliter in directum ſunt extenſae; facile autem negotio, omnia,

quae de ſtatu aequilibri violento ſupra determinaui-
Tab. IV. mus etiam ad laminas naturaliter curuas transferri
Fig. 9 poſſunt, quemadmodum iam in *Tomo Comment. XV. ſupra allegato pagina* 329. obſeruaui. Sit igitur A μ B figura, quam lamina in ſitu naturali tenet, in qua arcui $A\mu = s$ conueniat radius oſculi $\mu\varrho = r$, ita, vt r ſpectari poſſit tanquam functio data arcus $A\mu = s$. Nunc vero a viribus quibuscunque, quas vt ante per vires elementares $P\,ds$ et $Q\,ds$ repraeſentemus huic laminae inducta ſit figura A M B (fig. 3.), ad axem arbitrarium A C relatam, atque omnia manebunt vt ante, niſi quod elaſticitas in puncto M non amplius ſoli formulae $\frac{d\Phi}{ds}$ proportionalis ſit cenſenda, ſed eius exceſſui ſupra formulam $\frac{1}{r}$, ita vt in ſuperiore ſolutione nihil aliud opus ſit, niſi vt vbique loco formulae $\frac{S\,d\Phi}{ds}$ ſcribatur haec formula: $S(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r})$.

§. 25. Hoc igitur facto, primum figura laminae in ſtatu violento exprimetur hac aequatione;

$$\int dx \int P\,ds - \int dy \int Q\,ds = S\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)$$

praeterea vero vires ad ſtatum violentum elementi $M\,m = ds$ repraeſentandum requiſitae manebunt vt ante

$$T = \text{coſ.}\,\Phi \int P\,ds + \text{ſin.}\,\Phi \int Q\,ds \text{ et}$$
$$V = \text{ſin.}\,\Phi \int P\,ds - \text{coſ.}\,\Phi \int Q\,ds$$

tum vero etiam ex elaſticitate nunc immutata erit

$$V = \frac{1}{ds}\,d.\,S\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right) \text{ et } v = \frac{S\,ds\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)}{d.\,S\left(\frac{d\Phi}{ds} - \frac{1}{r}\right)}.$$

Sicque

Sicque facile ſunt expedita omnia quae de ſtatu aequilibrii filorum quoque elaſticorum deſiderari poſſunt, ſi modo tam figura quam vires ſollicitantes in eodem plano fuerint conſtitutae. Quemadmodum autem inueſtigatio motus, quo huiusmodi laminae concitari poſſunt, facile ad ſtatum aequilibrii reuocari poſſit, in loco allegato *Tomi XV. Commentariorum nouorum* ſatis dilucide expoſui, ita vt hic nihil amplius adiiciendum cenſeam.

DE

DE PRESSIONE
FVNIVM TENSORVM
IN CORPORA SVBIECTA, EORVMQVE MOTV A FRICTIONE IMPEDITO.

VBI PRAESERTIM METHODVS TRADITVR, MOTVM CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM VTCVNQVE ELASTICORVM NON IN EODEM PLANO SITORVM DETERMINANDI.

DISSERTATIO PRIOR.

Auctore

L. EVLERO.

Quanta vi funis cylindro circumplicatus premat, et quantum eius motus ob frictionem impediatur iam paſſim quidem a Geometris eſt oſtenſum. Sed methodi quibus ſunt vſi plerumque minus ſunt directae; ac praeterea quaeſtiones quas tractauerunt ad caſus nimis particulares ſunt reſtrictae; ita vt in hoc genere ſolutiones magis directae latiusque patentes merito deſiderari queant. Facile autem intelligitur, hoc argumentum ad theoriam perfectam aequilibrii et motus corporum flexibilium eſſe referendum, quam cum nuper demum ex primis principiis tam Staticae quam Mechanicae deductam tradidiſſem, ex ea quoque ſolutiones omnium quaeſtionum, quae tam ſuper preſſione quam motu funium corpo-

corpori cuicunque circumplicatorum formari poſſunt potiſſimum peti debebunt. Ne igitur opus ſit principia huius Theoriae aliunde conquirere, hic ea denuo ſuccincte ob oculos exponam.

THEORIA GENERALIS

circa aequilibrium et motum filorum ſiue perfecte flexibilium ſiue vtcunque elaſticorum ad ternas dimenſiones extenſa.

Poſitis, pro fili puncto quocunque z ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, ſit fili portionis EZ longitudo $= s$ et elementi ds maſſula $= S\,ds$. Tum vero eidem elemento ſecundum ternas directiones principales ZP, ZQ, ZR applicatae ſint vires $P\,ds$, $Q\,ds$, $R\,ds$. Pro incuruatione fili in Z facta ſit elaſticitas abſoluta $= G$, hincque vis ipſa elaſtica $= \frac{G}{r}$, denotante r radium oſculi in hoc loco. His poſitis pro ſtatu aequilibrii ſequentes tres aequationes ſunt inuentae: Tab. V. Fig. 1.

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3}$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3}$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}$$

quarum quidem binae tertiam iam in ſe complectantur, ita vt ſufficiat binas tantum euoluiſſe. Tum vero tenſio fili in puncto Z, qua ſecundum tangentem verſus E vrgetur erit

$$= -\left(\frac{dx}{ds}\right).\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds - \left(\frac{dz}{ds}\right).\int R\,ds\,;$$

hae ſcilicet formulae valent pro ſtatu aequilibrii. At ſi filum ab iisdem viribus ſollicitatum vtcunque moveatur, ternae coordinatae x, y, z tanquam functiones duarum variabilium, ſcilicet ipſius s et temporis t ſpectari debent. Tum igitur capiantur valores ſequentes:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\quad Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\quad R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

vbi g denotat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo. Qui valores, ſi loco P, Q, R ſcribantur in praecedentibus formulis pro aequilibrio datis, eaedem motum fili determinabunt; quin etiam formula pro tenſione data tenſionem in ſtatu motus indicabit. Ceterum ſi radius oſculi fili in puncto Z ponatur $= r$, is ſequenti formula exprimitur:

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{((dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2)}}.$$

Tum vero ſi iſta formula radicalis prolixa indicatur littera Ω, planum, in quo fit incuruatio ita ad terna plana principalia AOB, BOC, COA inclinabitur, vt trium iſtarum inclinationum Coſinus ſint

$$\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{\Omega};\quad \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{\Omega};\quad \frac{dx\,ddz - dz\,ddx}{\Omega}.$$

Hae quidem formulae praecipue ad eiusmodi caſus ſunt accommodatae, quibus vires ſolicitantes P, Q, R vt datae ſpectantur, ex iisque figura ad quam corpus flexile ſe componit quaeritur. At vero in praeſenti noſtro inſtituto figura funis pro data aſſumitur: ipſas autem vires in ſingulis punctis ſolicitantes determinari oportet, ex quo neceſſe erit vſum harum formularum inuertere.

DE

DE VIRIBVS

quibus funis circa corpus cylindricum circumductus ſuperficiem ſubiectam in ſingulis punctis premit.

§. 1. Concipiatur corpus cylindricum, cuius axis ſecundum longitudinem ductus ſit horizontalis, cui normaliter facta ſit ſectio verticalis AYB, eique incumbat funis A Y B vtroque termino A et B ponderibus M et N onuſtus. Primo autem animum ab omni frictione abſtrahamus; ac manifeſtum eſt, funem in aequilibrio manere non poſſe niſi ambo pondera vtrinque appenſa M et N ſint inter ſe aequalia. His poſitis quaeritur, quanta vi iſte funis ſuperficiem cylindri cui incumbit in ſingulis punctis ſit preſſurus. Hic igitur figura funis nobis eſt data, quandoquidem figuram corporis cylindrici ſequitur et directiones virium vtrinque tendentium A M et B N verticales aſſumuntur; perpetuo autem ipſe cylindrus, cui figuram quamcunque tribuimus, prorſus immobilis aſſumitur. Neque verum hic tantum cylindros circulares, qui vulgo hoc nomine deſignari ſolent, intelligi oportet, ſed iſtam vocem in latiſſimo ſenſu accipiamus, ita vt ea omnia corpora complectatur, quorum omnes ſectiones ad axem longitudinalem, quem hic perpetuo horizontalem ſtatuimus, normaliter factae, ſint inter ſe aequales, ita vt figura A Y B indolem huius corporis cylindrici exhibeat. Tab. V. Fig. 2.

§. 2. Cum hic igitur totus funis in eodem plano verticali verſetur, pro eius figura in calculum introducenda tantum opus erit binas coordinatas conſiderare; quem infinem ducatur recta horizontalis A B, ad quam ex ſingulis funis punctis Y perpendiculares Y X ductae intelligantur, vt pro puncto Y binae coordinatae ſint A X $= x$ et X Y $= y$, inter quas igitur aequationem quamcunque dari aſſumimus, quae quidem ita ſit comparata, vt in puncto A ambae coordinatae euaneſcant ſimulque tangens in A fiat verticalis; quandoquidem funis vltra A in M protenſus talem ſitum habere ponitur. Hoc ergo caſu tertia applicata z penitus ex calculo egredietur, et littera s ipſum arcum curuae A Y deſignabit: funi autem vbique eandem craſſitiem tribuamus ita vt maſſula elementi ds per ipſum ds exprimi queat, hincque fiat $S = 1$. His poſitis manifeſtum eſt, funem aliam preſſionem exerere non poſſe niſi ſecundum directionem ad curuam normalem Π, quae hoc loco ita exprimatur littera Π, vt vis quam elementum $Yy = ds$ ſuſtinet ſit $= \Pi ds$, quod ita eſt intelligendum, preſſionem in hoc loco tantam eſſe ac ſi baſis $= 1$ ab incumbente pondere Π premeretur; tum enim portiuncula iſtius baſis $= ds$ etique preſſionem Πds ſuſtinebit.

§. 3. Quod ſi iam iſtam preſſionem tanquam cognitam ſpectemus, et elemento Y y vim normalem Y π applicatam concipiamus, tum totus funis ab iſtis viribus elementaribus ſolicitatis eam ipſam figuram induere debebit, quam ipſi tribuimus, ſiquidem

quidem vires ponderum ſollicitantes ſimul in computum ducantur. Hocque modo praeſens quaeſtio ad noſtras formulas generales reducetur.

§. 4. Cum igitur in Theoria alias vires non in calculum induxerimus, niſi quarum directiones ſequantur coordinatas, iſtam vim $Y\pi = \Pi\, ds$ ſecundum directiones binarum noſtrarum coordinatarum AX et XY reſoluamus ac prodibit vis horizontalis ſecundum $XA = \Pi\, dy$ et verticalis ſecundum $XY = \Pi\, dx$, vnde pro viribus ſupra aſſumtis habebimus $P\, ds = -\Pi\, dy$ et $Q\, ds = \Pi\, dx$; tertia vero vis $R\, ds$ hic euaneſcit. Hinc fit $\int P\, ds = -\int \Pi\, dy$ at $\int Q\, ds = \int \Pi\, dx$, a qua poſteriori ſumma ſubtrahi debet pondus M, quippe quod in eadem directione contrarie agit. Denique vero ſumamus funem eſſe perfecte flexilem, vt fiat elaſticitas $G = 0$.

§ 5. His conſtitutis, quoniam eſt tam $Z = 0$ quam $R = 0$, natura aequilibrii hac vnica aequatione exprimetur:

$$-\int dy \int \Pi\, dy - \int dx\, (\int \Pi\, dx - M) = 0$$

ex qua igitur preſſionem hactenus incognitam Π elici oportet. Differentiando ergo hinc habebimus

$$-dy \int \Pi\, dy - dx\, (\int \Pi\, dx - M) = 0$$

ſtatuamus nunc $dy = p\, dx$, quandoquidem aequatio inter x et y nobis datur, eritque

$$-p \int \Pi\, dy - \int \Pi\, dx + M \text{ ſiue}$$

$$M = p \int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx$$

quae denuo differentiata praebet

$d p \int \Pi d y + p \Pi d y + \Pi d x$ ſiue

$0 = d p \int \Pi p d x + p p \Pi d x + \Pi d x$

quae per dp diuiſa ponendo $dp = q d x$ dat

$0 = \int \Pi p d x + \frac{\Pi(1+pp)}{q}$

vnde valorem litterae Π elici oportet. Quo autem hoc facilius fieri queat, ſtatuamus pro penultima aequatione $\int \Pi p d x = \Phi$, fietque $d\Phi = \Pi p d x$ ideoque $\Pi d x = \frac{d\Phi}{p}$, ex quo reſultabit haec aequatio a ſigno integrali libera:

$0 = \Phi d p + \frac{d\Phi}{p}(1+pp)$

vnde fit

$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{p d p}{1+pp}$

cuius integrale eſt

$l\Phi = -l\sqrt{(1+pp)} + lC$ ideoque

$\Phi = \frac{C}{\sqrt{1+pp}} = \int \Pi p d x.$

Iam haec aequatio differentiata praebet

$$\Pi p d x = -\frac{C p d p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ hincque tandem}$$

$$\Pi = -\frac{C d p}{d x (1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 6 Conſtat autem, ſi radius oſculi noſtrae curuae in puncto Y ponatur $= r$, fore

$$r = -\frac{d x (1+pp)^{\frac{3}{2}}}{d p};$$

vnde

vnde formula inuenta tranſit in hanc $\Pi = \frac{C}{r}$. Hinc diſcimus preſſionem funis in curuam datam in ſingulis punctis reciproce proportionalem eſſe radio curuaturae. Tantum autem ſupereſt, vt quantitas conſtans C definiatur. Hunc in finem quaeramus formulas integrales valorem primo inuentum

$$M = p\int \Pi\, dy + \int \Pi\, dx$$

ingredientes, quas ita ſumamus, vt in ipſo initio A vbi pondus M dependet euaneſcant, et quoniam funis in hoc loco curuam tangere accipitur, ibi erit $p = \infty$ quo notato erit

$$\int \Pi\, p\, dx = -C\int \frac{p\, dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{\sqrt{1+pp}}$$

quod iam ſponte euaneſcit poſito $p = \infty$. Tum vero erit

$$\int \Pi\, dx = -C\int \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cp}{\sqrt{1+pp}} + C,$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet $M = C$; vnde igitur innoteſcit quantitas conſtans $C = M$, ita vt preſſio quaeſita in genere ſit $\Pi = \frac{M}{r}$.

§. 7. Quaeramus nunc quoque pro ſingulis curuae punctis tenſionem funis, quae ex formulis generalibus erit

$$-\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\, ds - \frac{dy}{ds}\int Q\, ds = \frac{dx}{ds}\int \Pi\, dy - \frac{dy}{ds}\left(\int \Pi\, dx - M\right).$$

Modo autem inuenimus eſſe

$$\int \Pi\, dy = \int \Pi\, p\, dx = \frac{M}{\sqrt{1+pp}} \text{ et}$$
$$\int \Pi\, dx = -\frac{Mp}{\sqrt{1+pp}} + M$$

quibus

quibus ſubſtitutis erit tenſio funis

$$= \frac{M\,dx}{ds\sqrt{1+pp}} + \frac{M\,p\,dy}{ds\sqrt{1+pp}}.$$

Cum igitur ſit $dy = p\,dx$, hincque $ds = dx\sqrt{1+pp}$ erit illa tenſio $= M$, ita vt in ſingulis curuae punctis tenſio ſit eadem atque adeo aequalis ipſi ponderi trahenti M, quod cum etiam in altero curuae termino A eueniat, euidens eſt alterum N etiam eſſe debere $= M$, quemadmodum ex natura aequilibrii per ſe eſt perſpicuum.

§. 8. Quod ſi ergo funis cylindro ordinario ſeu circulari circumuoluatur, cuius radius ſit $= c$ tum preſſio in ſingulis punctis contactus erit $= \frac{M}{c}$, vnde patet, quo gracilior fuerit cylindrus eo maiorem fore preſſionem. Vbique autem haec preſſio tanta erit, quanta foret, ſi baſi horizontali $= 1$ incumberet pondus $= \frac{M}{c}$.

§. 9. Probe autem hic eſt obſeruandum, has determinationes tum tantum locum habere, quando funis omni plane elaſticitate pariter ac grauitate eſt deſtitutus, ita vt ſit $G = 0$. Praeterea vero imprimis neceſſe eſt, vt nulla ſit frictio; quanquam enim in ſtatu aequilibrii frictionis nulla ratio tenenda videtur: tamen ſi quaeratur, quantum pondus M appendi debeat, vt funis ſaltem protrahi incipiat, tum vtique frictio in computum duci debet, quando quidem hoc caſu euenire poteſt, vt funis in quiete perſeueret, etiamſi ambo pondera M et N vehementer inter ſe diſcrepent.

§. 10.

§. 10. Ante autem quam frictionem in computum trahamus, examini ſubiciamus caſum, quo funis aliquam habeat elaſticitatem, ſiue rigorem, quo incuruationi quodammodo reſiſtit, cuius quantitatem in formulis generalibus littera G deſignauimus. Et quoniam prima tantum aequatio negotium conficit, formula $\frac{G(dyddx - dxddy)}{ds^3}$ abit in hanc: $\frac{G}{r}$, denotante ſcilicet r radium oſculi curvae in puncto Y. Pro hac vero formula $\frac{G}{r}$ ſcribamus breuitatis gratia litteram u, ac pro ſtatu aequilibrii habebimus hanc aequationem:

$$-\int dy \int \Pi\, dy - \int dx \int \Pi\, dx + Mx = u,$$

cuius differentiale dat

$$-dy \int \Pi\, dy - dx \int \Pi\, dx + M\, dx = du$$

et poſito iterum $dy = p\,dx$ erit

$$-p \int \Pi\, dy - \int \Pi\, dx + M = \frac{du}{dx}$$

haecque denuo differentiata fit

$$-dp \int \Pi\, p\, dx - \Pi\, pp\, dx - \Pi\, dx = \frac{ddu}{dx}.$$

Fiat hic iterum $\int \Pi p\, dx = \Phi$ vt ſit $\Pi\, dx = \frac{d\Phi}{p}$ atque habebimus

$$-\Phi\, dp - \frac{d\Phi}{p}(1 + pp) = \frac{ddu}{dx} \text{ ſiue}$$

$$\Phi\, p\, dp + d\Phi(1 + pp) = -\frac{p\, ddu}{dx},$$

quae diuiſa per $\sqrt{1 + pp}$ fit

$$\frac{\Phi\, p\, dp}{\sqrt{1 + pp}} + d\Phi \sqrt{1 + pp} = -\frac{p\, ddu}{dx\sqrt{1 + pp}},$$

cuius prius membrum ſponte eſt integrabile, ita vt prodeat

$$\Phi \sqrt{1 + pp} = -\int \frac{p\, ddu}{dx\sqrt{1 + pp}},$$

vnde ſimul atque innoteſcerit valor ipſius Φ, habebitur preſſio quaeſita $\frac{d\Phi}{p\,dx}$.

§. 11. Totum negotium igitur huc redit, vt inueſtigemus integrale $\int \frac{p d d u}{d x \sqrt{1+pp}}$, quod per reductionem ſolitam ita reſoluitur:

$$\int \frac{p d d u}{d x \sqrt{1+pp}} = \frac{p d u}{d x \sqrt{1+pp}} - \int \frac{d u}{d x} \cdot \frac{d p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quia autem $r = - \frac{d x (1+pp)^{\frac{3}{2}}}{d p}$, poſtremum membrum $-\int \frac{d u}{d x} \cdot \frac{d p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ abit in $+\int \frac{d u}{r}$. Quia igitur $u = \frac{G}{r}$ erit $d u = - \frac{G d r}{r r}$ hincque

$$\int \frac{d u}{r} = - G \int \frac{d r}{r^3} = + \frac{G}{2 r r} + C.$$

Subſtituantur igitur iſti valores et obtinebitur ſequens aequatio:

$$\Phi \sqrt{1+pp} = \frac{G p d r}{r r d x \sqrt{1+pp}} + \frac{G}{2 r r} + C$$

conſequenter habebimus

$$\Phi = \int \Pi p d x = \frac{G p d r}{r r d x (1+pp)} + \frac{G}{2 r r \sqrt{1+pp}} + \frac{C}{\sqrt{1+pp}}$$

quae denuo differentiata praebet

$$\Pi p d x = G . \frac{p}{1+pp} . d . \frac{d r}{r r d x} + G . \frac{d r}{r r d x} . d . \frac{p}{1+pp} - \frac{G d r}{r^3 \sqrt{1+pp}} - \frac{G p d p}{2 r r (1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C p d p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

quo circa colligimus

$$\Pi = \frac{G}{d x (1+pp)} . d . \frac{d r}{r r d x} + \frac{G d r}{p r r d x^2} d . \frac{p}{1+pp} - \frac{G d r}{p r^3 d x \sqrt{1+pp}} - \frac{G d p}{2 r r d x (1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C d p}{d x (1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

que

que reduci poteſt ad hanc formam:

$$\Pi = -\frac{G}{dx^2(1+pp)} . dd\frac{1}{r} + \frac{G\,dp\,dr(1-pp)}{prr\,dx^2(1+pp)^2} - \frac{G\,dr}{pr^3\,dx\sqrt{1+pp}}$$
$$- \frac{G\,dp}{2\,rr\,dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{C\,dp}{dx(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

Quia autem eſt

$$r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} \text{ erit}$$

$$dp = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r},$$

quo valore loco dp vbique ſubſtituto prodibit

$$\Pi = -\frac{G}{dx^2(1+pp)} . dd\frac{1}{r} - \frac{G\,dr(2-pp)}{pr^3\,dx\sqrt{(1+pp)}} + \frac{G}{2r^3} + \frac{C}{r}.$$

§. 12. Ponamus autem hic curuam noſtram A Y B eſſe circulum, cuius radius $= c$, ita vt habeamus $r = c$ ideoque $dr = 0$, fietque $\Pi = + \frac{G}{2c^3} + \frac{C}{c}$, quae cum ſit quantitas conſtans, ſi ponatur $\Pi = \frac{C}{c}$, fiet vt ſupra integrando $\int \Pi\,dx = \frac{Cx}{c}$ et $\int \Pi\,dy = \frac{Cy}{c}$, quibus valoribus in aequatione

$$-p\int \Pi\,dy - \int \Pi\,dx + M = 0$$

ſubſtitutis fit $-\frac{Cpy}{c} - \frac{Cx}{c} + M = 0$, vbi cum ſit ob circulum $y = \sqrt{2(cx - xx)}$ ideoque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{c-x}{\sqrt{2cx-xx}}$ erit $-C + M = 0$, ideoque prorſus vt ſupra $C = M$, ita vt elaſticitas hoc caſu nihil plane mutare videatur in preſſione. Verum pro aequatione principali hinc prodiret

$$-\int dy \int \Pi\,dy - \int dx \int \Pi\,dx + Mx = 0$$

 cum

cum tamen aequari deberet quantitati $\frac{G}{c}$. Vnde intelligitur, praeter pondus appenſum inſuper vim applicari debere, cuius momentum reſpectu puncti A ſit, $= \frac{G}{c}$, quippe quod requiritur ad funem cylindro vbique applicandum, quod ergo eo maius eſſe debebit, quo maior fuerit elaſticitas abſoluta G; tum vero, quo minor fuerit radius c. Cum autem hic potiſſimum funes nobis ſint propoſiti, quorum elaſticitas contemni poteſt, hunc caſum fuſius proſequi hic non eſt locus.

De motu funis ſuper cylindro fixo ob frictionem impedito.

§. 13. Si nulla adeſſet frictio, funis cylindro circumductus in aequilibrio eſſe non poſſet, niſi in vtroque termino a viribus aequalibus tenderetur, et ſimul atque tenſio alterius termini alteram ſuperaret funis ſuper cylindro moueri inciperet. Frictionis autem effectus in hoc potiſſimum conſiſtit, vt funis in quiete manere poſſit, etiamſi vires vtrinque tendentes fuerint inter ſe inaequales: hocque diſcrimen eo maius eſſe poterit, tam quo maior fuerit frictio, quam quo maiorem portionem funis in cylindro occupauerit. Ob hanc rationem funis tum demum ſuper cylindro prorepere incipiet, quando differentia inter vires vtrinque tendentes certum limitem ſuperauerit.

§. 14. Ponamus igitur inaequalitatem virium tendentium ad ipſum hunc terminum eſſe perductam, vt

vt funis etiamnunc in quiete retineatur, ſimul ac vero tenſio maior vel tantillum augeretur motum eſſet inſecuturus. Hoc igitur modo quaeſtio quam hic tractare conſtituimus, etiamſi ad motum pertinere videatur, tamen ex principiis aequilibrii reſolui debebit. Hic autem vt ante nomen cylindri omnes plane formas ſub ſe complectatur, cuius ſectio transverſa repraeſentetur figura A Y B; neque etiam neceſſe eſt, vt axis huius cylindri ſit horizontalis; quandoquidem hic vires tendentes quascunque ſumus conſideraturi, ita vt funis in A ſecundum directionem tangentis A M a vi $= M$ trahatur, in altero vero termino B itidem in directione tangentis B M a vi M: neceſſe etiam non eſt vt hae directiones ſint inter ſe parallelae. Quo poſito aſſumimus, vim tendentem A tantum ſuperare alteram vim M, vt funis tantum non moueri incipiat.

§. 15. Sumatur igitur pro axe recta A B, ad directionem tenſionis maiorem A M normalis, ita vt funis curuae A Y y applicatus ſit concipiendus, et pro puncto quouis Y vocentur vt ante coordinatae $AX = x$ et $XY = y$, ipſe vero arcus $AY = s$, vt ſit eius elementum Tab. V. Fig. 3.

$$Yy = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

In hoc autem elemento ſtatuatur preſſio $= \Pi\, ds$, agens ſecundum directionem normalem Y Π Huius igitur preſſionis certa quaedam pars dabit frictionem ſecundum tangentem curuae vrgentem, cuius vero quantitas ſit $= \lambda \Pi\, ds$. Hinc igitur ipſe funis in

elemento Yy ſecundum directionem normalem $Y\pi$ ſollicitari eſt cenſendus; et quoniam motus iamiam generandus funem in directione YA promouere conatur, ei frictio ſe opponet in directione contraria Xy vi $= \lambda \Pi ds$; et nunc ſolutio quaeſtionis huc redit, vt cunctae iſtae vires normales et tangentialas cum tenſione M in aequilibrio conſiſtant.

§. 16. Ad igitur neceſſe eſt, vt tenſio funis in ipſo termino A fiat aequalis vi tendenti $= M$. Hinc vero per Y progrediendo tenſio ob frictionem continuo diminuatur, cui tandem in altero termino B vbicunque is accipiatur altera tenſio N aequalis ſtatui debebit.

§. 17. Nunc igitur ante omnia ambas vires normalem $Y\pi = \Pi ds$ et tangentialem $\lambda \Pi ds$ ſecundum directiones coordinatarum x et y reſolui oportebit: ac manifeſtum eſt, ex vi normali Πds vim ſecundum $Ym = \Pi dy$ et vim ſecundum $Yl = \Pi dx$ oriri. Ex vi autem tangentiali $\lambda \Pi ds$ oritur vis ſecundum $Yn = \lambda \Pi dx$ et ſecundum $Yl = \lambda \Pi dy$; ſicque ex vtraque generatur vis in directione Yn ſiue $AX = \lambda \Pi dx - \Pi dy$, quae in formulis generalibus poſita eſt $P ds$; deinde vero vis in directione Yl ſiue $XY = \lambda \Pi dy + \Pi dx$, quae poſita eſt $Q ds$. Hinc igitur erit

$$\int P ds = \lambda \int \Pi dx - \int \Pi dy \text{ et}$$

$$\int Q ds = \lambda \int \Pi dy + \int \Pi dx$$

vnde ſubtrahi oportet ipſam vim tendentem M in puncto A ſecundum AM agentem, ita vt habeamus

$$\int Q ds = \lambda \int \Pi dy + \int \Pi dx - M.$$

§. 18.

§. 18. His viribus inuentis pro ſtatu aequilibrii Theoria ſupra data nobis ſuppeditat hanc aequationem:

$$\lambda\int dy\int\Pi\,dx-\int dy\int\Pi\,dy-\lambda\int dx\int\Pi dy-\int dx\int\Pi dx+Mx=0$$

tum vero pro tenſione funis in puncto Y ab Y verſus A hanc:

$$-\tfrac{\lambda dx}{ds}\int\Pi\,dx+\tfrac{dx}{ds}\int\Pi\,dy-\tfrac{\lambda dy}{ds}\int\Pi\,dy-\tfrac{dy}{ds}\int\Pi\,dx$$
$$+\tfrac{Mdy}{ds}=-\left(\tfrac{\lambda dx}{ds}+\tfrac{dy}{ds}\right)\int\Pi\,dx+\left(\tfrac{dx}{ds}-\tfrac{\lambda dy}{ds}\right)\int\Pi\,dy+\tfrac{Mdy}{ds}$$

vbi formulas integrales $\int\Pi\,dx$ et $\int\Pi\,dy$ ita ſumi conueniet, vt in ipſo initio A, vbi fit $x=0$ et $y=0$ euaneſcant. Sicque quia hoc loco $\frac{dy}{ds}=1$, tenſio in A erit $=M$, vti ſtatus quaeſtionis poſtulat.

§. 19. Aequatio igitur pro aequilibrio inuenta differentietur, ac poſito $dy=p\,dx$ prodibit haec aequatio:

$$M+(\lambda p-1)\int\Pi\,dx-(p+\lambda)\int\Pi\,dy=0,$$

quae diuiſa per $p+\lambda$ praebet

$$\int\Pi\,dy=\frac{M}{p+\lambda}+\frac{\lambda p-1}{p+\lambda}\int\Pi\,dx,$$

ex qua igitur ſtatim ac valor formulae $\int\Pi\,dx$ fuerit inuentus innoteſcit valor formulae $\int\Pi\,dy$. Praeterea vero, quoniam eſt $ds=dx\sqrt{1+pp}$, tenſio funis in Y ita erit expreſſa:

$$\frac{Mp}{\sqrt{1+pp}}-\frac{\lambda+p}{\sqrt{1+pp}}\int\Pi\,dx+\frac{1-\lambda p}{\sqrt{1+pp}}\int\Pi\,dy,$$

vnde ſi loco $\int\Pi\,dy$ valor modo aſſignatus ſcribatur, tenſio ita exprimetur:

$$\frac{M\sqrt{1+pp}}{p+\lambda}-\frac{(\lambda\lambda+1)\sqrt{1+pp}}{p+\lambda}\int\Pi dx=\frac{\sqrt{1+pp}}{p+\lambda}\left(M-(\lambda\lambda+1)\int\Pi dx\right).$$

§. 20.

§. 20. Nunc aequatio pro aequilibrio eruta denuo differentietur, ac prodibit

$$\Pi p\,dx = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \left(\frac{\lambda p - 1}{p+\lambda}\right)\Pi\,dx + \frac{(\lambda\lambda+1)dp}{(p+\lambda)^2}\int \Pi\,dx.$$

Statuatur nunc $\int \Pi\,dx = z$ et ob $\Pi p\,dx = p\,dz$ aequatio noſtra fiet

$$p\,dz = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \left(\frac{\lambda p - 1}{p+\lambda}\right)dz + z\frac{(\lambda\lambda+1)dp}{(p+\lambda)^2},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$0 = -\frac{M\,dp}{(p+\lambda)^2} + \frac{(1+\lambda\lambda)z\,dp}{(p+\lambda)^2} - \frac{(1+pp)dz}{p+\lambda} \text{ ſiue}$$

$$\frac{dp}{(p+\lambda)^2}((1+\lambda\lambda)z - M) = \frac{(1+pp)dz}{p+\lambda}$$

vnde conficitur

$$\frac{dz}{(1+\lambda\lambda)z - M} = \frac{dp}{(1+pp)(p+\lambda)}$$

vbi ergo ambae noſtrae variabiles z et p ſunt a ſe inuicem ſeparatae.

§. 21. Integretur igitur iſta aequatio, et ex parte ſiniſtra orietur hoc integrale

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}l((1+\lambda\lambda)z - M).$$

Formula autem dextra in partes reſoluta praebet:

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}\frac{dp}{p+\lambda} + \frac{(\lambda - p)dp}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)}$$

cuius integrale eſt

$$\frac{1}{1+\lambda\lambda}l(p+\lambda) - \frac{1}{1+\lambda\lambda}l\sqrt{1+pp} + \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda}\text{A tang.}p + \frac{lC}{1+\lambda\lambda}$$

quocirca aequatio noſtra integralis erit

$$l((1\lambda\lambda)z - M) = l(p+\lambda) - l\sqrt{1+pp} + \lambda\text{A tang.}p + lC$$

hincque ad numeros tranſeundo

$$(1+\lambda\lambda)z - M = \frac{C(p+\lambda)}{\sqrt{1+pp}}e^{\lambda\text{A tang.}p}$$

vnde

vnde ergo erit

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} + \frac{C(p+\lambda)}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} . e^{\lambda \text{ A tang. } p}.$$

§. 22. Quo hanc expreſſionem commodiorem reddamus, introducamus in calculum amplitudinem arcus curuae A Y, cuius menſura eſt angulus $A\Pi Y$, ducta ſcilicet normali $Y\Pi$; ac ponamus iſtum angulum $A \Pi Y = \Phi$, et cum ſit ſubnormalis

$$X\Pi = \frac{y\,dy}{dx} = py$$

erit tang. $\Phi = \frac{1}{p}$, hincque tang. $(90^\circ - \Phi) = p$, vnde patet eſſe A tang. $p = 90^\circ - \Phi$. Sicque erit

$$e^{\lambda \text{ A tang. } p} = e^{\lambda(90 - \Phi)} = \frac{e^{\lambda 90^\circ}}{e^{\lambda\Phi}}.$$

Et nunc pro factore conſtante $C e^{\lambda 90^\circ}$ ſcribamus D eritque

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} + \frac{D(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} = \int \Pi\, dx$$

tum vero hinc porro habebimus

$$\int \Pi\, dy = \frac{M}{p+\lambda} + \frac{M(\lambda p - 1)}{((1+\lambda\lambda)(p+\lambda)} + \frac{D(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

ſiue

$$\int \Pi\, dy = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda} M + \frac{D(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}.$$

Ac ſi eundem valorem in formula pro tenſione inventa ſubſtituamus, fiet tenſio $= -De^{-\lambda\Phi}$; vnde cum in ipſo initio A tenſio ſit cognita $= M$, ibique fiat $\Phi = 0$, erit $M = -D$, vnde diſcimus eſſe $D = -M$,

ita vt nunc habeamus

$$z = \frac{M}{1+\lambda\lambda} - \frac{M(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}} = \int \Pi\, dx$$

atque

$$\int \Pi\, dy = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda} M - \frac{M(\lambda p - 1)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

ac denique tenſio $= M e^{-\lambda\Phi}$.

§. 23. Hinc vero etiam poterimus ipſam preſſionem Π, quam funis in cylindrum exercet, definire: tantum enim opus eſt aequationem

$$\int \Pi\, dx = \frac{M}{1+\lambda\lambda} - \frac{M(p+\lambda)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)\sqrt{1+pp}}$$

differentiare. Quia igitur eſt $\Phi = \text{A tang.} \frac{1}{p}$, erit $d\Phi = -\frac{dp}{1+pp}$ ideoque differentiando

$$\Pi\, dx = -\frac{M\, dp(1-\lambda p)e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda M(p+\lambda)\, dp\, e^{-\lambda\Phi}}{(1+\lambda\lambda)(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{M\, dp\, e^{-\lambda\Phi}}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur ſit radius oſculi $r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ erit eo introducto $\Pi = \frac{M}{r} e^{-\lambda\Phi}$.

§. 24. Ecce ergo quemadmodum praeter omnem expectationem formulae, quas theoria noſtra ſuppeditabat et quae taedioſos calculos minari videbantur, ad valores maxime concinnos tandem deduxerint; vbi impri-

imprimis notari meretur, quaecunque fuerit figura cylindri ſiue curua A Y B, eius duo tantum elementa in calculo eſſe relicta, ſcilicet radium oſculi curuae in Y qui eſt r et amplitudinem arcus A Y cuius menſura eſt angulus A Π Y $= \Phi$. Atque ita tota ſolutio noſtrae quaeſtionis his duabus determinationibus continebitur:

I. Preſſionem funis in puncto Y eſſe $\Pi = \frac{M}{r} e^{-\lambda\Phi}$

II. Tenſionem funis in eodem loco eſſe $= M\, e^{-\lambda\Phi}$

quae ergo, quo longius ab initio A progredimur, quoniam amplitudo Φ continuo creſcit, eo fiet minor. Vnde ſi alter funis terminus in puncto curuae quocunque T ſtatuatur et amplitudo arcus A Y T fuerit $= \theta$, tenſio in hoc loco T erit $M\, e^{-\lambda\theta}$, ideoque, ſi in hoc loco vis tendens huic aequalis fuerit applicata, totus funis in aequilibrio conſtet; ita tamen, vt ſi vel tenſio M tantillum augeretur vel tenſio N tantillum diminueretur, ſtatim funis ad motum concitaretur ab Y verſus A. Vbi maxime mirandum occurrit, quod hic tantum amplitudo curuae in cenſum veniat, dum radius oſculi tantum in determinationem preſſionis ingreditur.

§. 25. Quod ſi iam tenſionem minorem N vt datam ſpectemus, erit maior $M = N\, e^{\lambda\theta}$, quae ergo etiamnunc cum illa in aequilibrio conſiſtit. Vbi imprimis notandum eſt, quamdiu vis M minor fuerit quam $N\, e^{\lambda\theta}$ aequilibrium nihilo minus locum eſſe habiturum. Probe autem tenendum eſt tum

 frictio-

frictionem non amplius totam ſuam vim exerere, et quouis caſu litteram λ eum valorem recipere, qui aequatione M conuenit: fiet ſcilicet $\lambda = \frac{1}{\theta} l \frac{M}{N}$. Vnde patet, ſi fuerit $M = N$ fore $\lambda = 0$, ſiue frictionem hoc caſu nullam vim exerere; ſin autem fuerit $M < N$, frictio in contrariam partem verget et funis in quiete perſeuerabit, quamdiu vis M non infra valorem $N e^{-\lambda\theta}$ diminuitur, ſiquidem pro λ maximus valor accipiatur. Hinc ergo dum vis M vt data ſpectatur, aequilibrium perpetuo locum habebit, quamdiu altera tenſio M intra limites $N e^{+\lambda\theta}$ et $N e^{-\lambda\theta}$ continetur, quod igitur interuallum eo maius erit quo maior fuerit amplitudo.

§. 26. Conſideremus cylindrum horizontaliter fixum, cuius ſectio transuerſa verticalis ſit figura
Tab. V. quaecunque A E B F in ſe rediens, cui incumbat
Fig. 4. funis M A E B N in vtroque termino A et B ponderibus M et N onuſtus, vbi ergo amplitudo arcus A E B ſit $180° = \pi$; ac poſita frictione, vti vulgo fieri ſolet, tertiae parti preſſionis aequali, vt ſit $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\theta = \pi$, funis in aequilibrio manebit, quamdiu ponderum ratio $\frac{M}{N}$ intra hos limites $e^{+\frac{1}{3}\pi}$ et $e^{-\frac{1}{3}\pi}$ continetur. Cum igitur ſit proxime $e^{\frac{1}{3}\pi} = 3$, limites intra quos aequilibrium ſubſiſtet erunt 3 et $\frac{1}{3}$, hoc eſt, quamdiu alterum pondus non plus quam triplo maius fuerit minusue altero. Sin autem funis circa cylindrum integram reuolutionem et inſuper arcum A E B amplectatur, quoniam amplitudo erit 3π, ob

ob $e^{3\pi} = 27$ circiter, limites aequilibrii erunt 27 et $\frac{1}{27}$; ita vt quamdiu maius pondus M non plus quam 27 vicibus ſuperet minus, funis in quiete ſit manſurus; at ſi ſuper arcum A E B duas integras reuolutiones conficiat, vt ſit $\theta = 5\pi$, limites erunt 243 et $\frac{1}{243}$: accedente ſcilicet vna reuolutione integra, hi limites euadent nouies maiores et minores. Vnde intelligitur, quomodo ob frictionem maximum pondus a minimo in quiete ſeruari poſſit.

§. 27. Neque vero opus eſt vt figura ſectionis ſit in ſe rediens; ſed ſolutio inuenta aeque locum habebit, ſi funis per gyros quotcunque ſiue continuo maiores ſiue minores circumplicetur, quoniam totum negotium in amplitudine arcus quem amplectitur conſiſtit. Scilicet ſi funis per gyros A E F G H I K B circumducatur, antequam alteri termino in B pondus N appendatur, quoniam hic habentur duo gyri integri cum ſemiſſe, ita vt ſit $\theta = 5\pi$, maius pondus M ad minus N rationem tenere poterit, vt 243 : 1, antequam motus incipiat: neque hic caſus a praecedente diſcrepat, niſi quod minores gyri a fune maiorem preſſionem ſuſtineant quam maiores, pro paribus videlicet amplitudinibus, quandoquidem vidimus, preſſionem in quouis loco eſſe $= \frac{M}{r} e^{-\lambda\theta}$. Tab. V. Fig. 5.

§. 28. Verum ſi fuerit $M > N e^{\frac{1}{3}\theta}$, tum funis non amplius manebit in quiete, ſed a maiore pondere deorſum trahetur; quem motum haud difficulter ſequenti modo definire poterimus. Sit enim

 M = N

$M = N e^{\alpha\theta}$, exiſtente $\alpha > \frac{1}{3}$, ac manifeſtum eſt, ſi frictio vsque ad α augeri poſſet, tum funem etiamnunc in aequilibrio eſſe verſaturum, et totam frictionem fore $= M = N e^{\alpha\theta}$. At vero frictio non vltra terminum $N e^{\frac{1}{3}\theta}$ increſcere poteſt, quae ergo vis tantum actioni ponderis M aduerſatur, vnde exceſſus vis ſollicitantis ſupra impedimentum frictionis erit $= M - N e^{\frac{1}{3}\theta} = N(e^{\alpha\theta} - e^{\frac{1}{3}\theta})$, quae vis ergo per maſſam mouendam diuiſa dabit accelerationem; quae cum ſit conſtans, motus inde orietur vniformiter acceleratus. Hac autem determinatione acquieſcere poterimus, niſi forte ex ipſis motus principiis initio expoſitis omnia motus phaenomena accurate inueſtigare voluerimus, id quod calculos maxime perplexos poſtularet, quos nunc quidem euoluere non vacat.

DE

DE PRESSIONE
FVNIVM TENSORVM
IN CORPORA SVBIECTA, EORVMQVE MOTV A FRICTIONE IMPEDITO.

DISSERTATIO ALTERA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In ſuperiore diſſertatione ſolutionem huius problematis ex theoria vniuerſaliſſima aequilibrii et motus corporum tam perfecte flexibilium quam elaſticorum repetiuimus, vnde factum eſt, vt ſolutio primum ad formulas non parum complicatas fuerit perducta, quas autem tandem ad pulcherrimam ſimplicitatem deducere licuit. Quoties autem talis reductio quaſi praeter omnem expectationem ſuccedere deprehenditur, ſemper certi eſſe poſſumus, aliam dari viam magis naturalem et directam, quae ſine tantis ambagibus ſtatim ad ſolutionem finalem manuducere queat, quod ipſum etiam in praeſente quaeſtione vſu venit, dummodo Theoriam illam generaliſſimam ante propius ad praeſens inſtitutum accommodemus, quam ſolutionem inde deriuare voluerimus. Primum igitur inde theorema non ita latiſſime

latiſſime patens conſtitui conueniet, quo quaſi vno ictu pleraeque illae ambages reſecentur, atque adeo iſtius theorematis primo demonſtrationem directam ex ipſis aequilibrii principiis petitam dabimus; tum vero eius egregium conſenſum cum formulis generaliſſimis ſumus oſtenſuri.

Theorema.

Tab. VI. Fig. 1. §. 2. *Si funis ſeu filum perfecte flexile* AYE *in ſingulis elementis* $Yy = ds$ *ſecundum directionem normalem* $Y\Pi$ *vrgeatur a viribus* $= \Pi ds$, *ac praeterea in hoc elemento fuerit tenſio* $= T$; *tum poſito radio oſculi huius curuae in puncto* $Y = r$, *ſtatus aequilibrii ſemper poſtulat vt ſit* $T = \Pi r$.

Demonſtratio ex primis Staticae principiis petita.

§. 3. Vtrinque circa punctum Y conſiderentur bina curuae elementa Yy et $Yv = ds$, in quibus ergo datur tenſio T, ita vt punctum Y ſecundum has directiones Yy et Yv ſollicitetur a viribus $= T$; tum vero ſit $Y\Pi$ vis illa normaliter applicata $= \Pi ds$, ac ſtatus aequilibrii poſtulat vt tres iſtae vires puncto Y applicatae ſe inuicem deſtruant. Quamobrem ex binis lateribus Yy et Yv compleamus parallelogrammum $Yy\pi v$, et neceſſe eſt vt ſit vis Πds quae nunc per diagonalem $Y\pi$ repraeſentatur ad alterutram vim T vt $Y\pi$ ad Yy, ideoque $\Pi ds : T = Y\pi : Yy$. Iam cum recta $\Pi Y\pi$ producta angulum vYy biſecet, ducatur ad eam

eam recta y R, ita vt angulus Y R y fiat aequalis Y y π, hincque triangulum Y R y ∾ triangulo Y y π, quamobrem $Y\pi : Yy = Yy : Yr$. Ex Geometria autem nunc conſtat fore R centrum circuli per tria puncta v Y y ducendi; quia igitur circulus curuam oſculatur, erit vtique recta Y R radius oſculi curvae $= r$, vnde cum ſit $Yy = ds$, erit $Y\pi : Yy = ds : r$ ideoque $\Pi ds : T = ds : r$. Hinc ſequitur id ipſum quod eſt demonſtrandum ſcilicet eſſe $T = \Pi r$.

Alia demonſtratio ex formulis noſtris generaliſſimis petita.

§. 4. Conſideremus igitur totam funis figuram A Y y tanquam in eodem plano ſitam, pro qua ad axem fixum A B relata vocentur coordinatae $AX = x$ et $XY = y$; ipſe vero arcus $AY = s$, ita vt ſit eius elementum $Yy = ds$; et ducta applicata proxima xy axique parallela Y v, erit $Yv = dx$ et $vy = dy$. Porro autem applicata XY producatur in q, exiſtente Y p axi parallela. Tab. VI. Fig. 3.

His poſitis ſit Y Π vis illa normalis Πds curuae in puncto Y applicata, quae reſoluta ſecundum directiones Yp et Yq praebebit vim $Yp = \Pi dy$ et vim $Yq = \Pi dx$. Praeterea vero quoniam ipſam tenſionem T hic nondum contemplari licet ponamus praeter vim $Y\Pi = \Pi ds$ puncto Y applicatam eſſe vim tangentialem $= \Theta ds$; quae quia in directione Y y agit per reſolutionem praebet vim ſecundum $Yv = \Theta dx$ et ſecundum Y q vim $= \Theta dy$. Colligendis igitur his quatuor viribus elementum cur-

vae ds ſollicitabitur ſecundum directionem AX vi $= \Theta dx - \Pi dy$, quam in theoria generali vocavimus $P ds$; tum vero ſecundum directionem XY vi $= \Theta dy + \Pi dx$, quae ſupra erat $Q ds$. Hinc igitur erit

$$\int P ds = \int \Theta dx - \int \Pi dy \text{ et } \int Q ds = \int \Theta dy + \int \Pi dx.$$

§. 5. Quoniam igitur hic totam curuam in eodem plano ſitam concipimus, pro ſtatu aequilibrii vnicam habebimus aequationem

$$\int dy \int \Theta dx - \int dy \int \Pi dy - \int dx \int \Theta dy - \int dx \int \Pi dx = 0.$$

Tum vero quia ipſam tenſionem in Y vt datam ſpectamus $= \Gamma$, erit

$$T = -\frac{dx}{ds}(\int \Theta dx - \int \Pi dy) - \frac{dy}{ds}(\int \Theta dy + \int \Pi dx$$

vnde ſumtis differentialibus poſitoque $dy = p dx$, vt ſit $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ hae duae aequationes ſequentes induent formas:

$$p(\int \Theta dx - \int \Pi dy) = \int \Theta dy + \int \Pi dx \text{ et}$$

$$T = -\frac{1}{\sqrt{1+pp}}(\int \Theta dx - \int \Pi dy) - \frac{p}{\sqrt{1+pp}}(\int \Theta dy + \int \Pi dx)$$

in qua ſi ex priore loco $\int \Pi dx + \int \Theta dy$ ſubſtituatur valor $p(\int \Theta dx - \int \Pi dy)$ prodibit

$$T = -\sqrt{1 + pp}(\int \Theta dx - \int \Pi dy).$$

Differentietur prior aequatio, fietque

$$dp(\int \Theta dx - \int \Pi dy) + p(\Theta dx - \Pi dy) = \Theta dy + \Pi dx$$

ſiue

$$dp(\int \Theta dx - \int \Pi dy) = \Pi(1 + pp) dx$$

ideoque

$$\int \Theta dx - \int \Pi dy = \frac{1 + pp}{dp} \Pi dx$$

que

quo valore in altera aequatione ſubſtituto habebimus $T = -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}\Pi\, dx$. Quare cum ſit radius oſculi $r = -\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, erit $T = \Pi r$; ſicque patet theorema noſtrum cum formulis generalibus egregie conuenire.

§. 6. Vt autem etiam relationem vis tangentialis in calculum introductae $\Theta\, ds$ ad vires datas T et $\Pi\, ds$ definiamus, valorem inuentum

$$T = -\sqrt{1+pp}\,(\int \Theta\, dx - \int \Pi\, dy)$$

differentiemus, fietque

$$dT = -\frac{p\, dp}{\sqrt{1+pp}}(\int \Theta\, dx - \int \Pi\, dy) - \sqrt{1+pp}\,(\Theta dx - \Pi dy).$$

Et quia eſt

$$dp(\int \Theta\, dx - \int \Pi\, dy) = \Pi(1+pp)\, dx,$$

erit nunc $dT = -\sqrt{1+pp}\,\Theta\, dx$, hoc eſt $dT = -\Theta\, ds$ ita vt vis tangentialis aſſumta $\Theta\, ds$ ipſi differentiali tenſionis T negatiue ſumto aequetur. Quoniam enim tenſionem T ab Y verſus A vergere aſſumſimus, ea vtique a vi tangentiali $\Theta\, ds$ diminuitur. His iam inuentis problema in ſuperiore diſſertatione ſolutum facillime reſolui poterit.

Problema I.

§. 7. *Si funis incumbat cylindro horizontali, cuius ſectio transuerſa verticalis ſit* A Y B, *eiusque terminis appenſa ſint pondera* M *et* N *definire ſtatum aequilibrii, quod ob frictionem ſubſiſtere poterit.* Tab. VI. Fig. 4.

 Solutio.

Solutio.

§. 8. Supponamus ambo pondera M et N, ſeu potius vires funem in vtroque termino tendentes tantopere inter ſe diſcrepare, vt ſi vis maior M tantillum augeretur funis in hanc partem cedere inciperet, ita vt hoc ſtatu frictio vim ſuam totam exerat. Iam ponamus tenſionem in funis puncto Y eſſe $= T$, quam verſus A directam concipiamus; tum vero ſtatuamus preſſionem quam cylindri elementum $Yy = ds$ a fune ſuſtinet $= \Pi\, ds$, et quia frictio vbique certae parti preſſionis aequari cenſetur, ſit ea $= \lambda \Pi\, ds$, quae ergo ſecundum directionem Yy ſeſe motui iamiam generando opponet, ita vt nunc habeamus vim tangentialem $\Theta\, ds = \lambda \Pi\, ds$. Cum igitur funis ob reactionem a cylindro vrgeatur in directione normali $Y\Pi$ vi $= \Pi\, ds$, neceſſe eſt vt funis ab his viribus in aequilibrio teneatur.

§. 9. Quod ſi igitur radium oſculi curuae in puncto Y ſtatuamus $= r$, per ea quae in praecedente theoremate ſunt demonſtrata, ob $\Theta = \lambda \Pi$ habebimus has duas aequationes:

I. $T = \Pi r$. II. $dT = -\lambda \Pi\, ds$.

Diuidamus nunc poſteriorem per priorem vt nanciſcamur hanc aequationem: $\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda\, ds}{r}$. Sit nunc recta YO ad curuam normalis, quae cum axe AO faciat angulum $AOY = \Phi$, qui ergo amplitudinem arcus AY metietur; vnde ſi YR ſit radius oſculi $= r$ et ducatur recta yR, erit angulus $Aoy = \Phi + d\Phi$ ideoque

ideoque angulus ad R $= d\Phi$; qui cum etiam ſit $= \frac{Yy}{YR} = \frac{ds}{r}$ ob $\frac{ds}{r} = d\Phi$ aequatio illa

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\lambda ds}{r} = -\lambda d\Phi$$

integrata praebet $lT = + lC - \lambda\Phi$; ſicque habebimus hanc aequationem: $T = Ce^{-\lambda\Phi}$, vbi pro conſtante C determinanda remoueamus punctum Y vsque in A, vbi fit $\Phi = 0$, et quia hic tenſio ipſi ponderi M aequatur erit $M = C$, ita vt habeamus hanc aequationem determinatam $T = Me^{-\lambda\Phi}$.

§. 10. Inuenta igitur tenſione funis in ſingulis locis ex aequatione $\Pi = \frac{T}{r}$, etiam preſſionem funis in ſingulis punctis aſſignare poterimus: Scilicet per elementum $Yy = ds$ preſſio erit

$$\Pi ds = \frac{Tds}{r} = Me^{-\lambda\Phi}\frac{ds}{r} = Me^{-\lambda\Phi}d\Phi.$$

Haec igitur ſolutio cum ea quam ſupra inuenimus perfecte congruit et ſine vllis ambagibus ope praecedentis theorematis eſt eruta.

§. 11. Statuamus iam pro altero termino B, vbi funis a vi minore N tenditur amplitudinem totius arcus $AYB = \theta$, quae quidem hoc caſu foret $= \pi = 180^\circ$. Verum ſi forte funis in alio quocunque puncto E cylindrum deſerat, ibique ſecundum tangentem minorem N trahatur, denotet angulus θ amplitudinem arcus AYE; et quia in hoc loco erit tenſio $= Me^{-\lambda\theta}$, ei vis tendens N debet eſſe aequalis; ex quo habebimus $N = Me^{-\lambda\theta}$ ſiue etiam $M = Ne^{\lambda\theta}$; vnde omnia phaenomena quae ſupra ſunt memorata ſponte fluunt.

§ 12. Quin etiam ex hoc ipſo principio hic demonſtrato vlterius progredi, atque adeo motum, quem funis accipiet ſi vis tendens M maior fuerit quam $N e^{\lambda\theta}$ accurate determinare licebit. Ea enim ſolutio quae ſupra eſt tradita, tantum ad veritatem propinguare eſt cenſenda; ibi enim aſſumſimus frictionem durante motu adhuc eandem manere quae pro aequilibrio erat inuenta, cum tamen in ipſo motu preſſio funis ad cylindrum non exiguam mutationem ſine dubio patiatur: mutata autem preſſione etiam frictio mutabitur; vnde perſpicuum eſt, ſolutionem ſupra traditam in omni rigore admitti neutiquam poſſe; neque etiam auſi fuimus, eam ex theoria generali motus deducere, quandoquidem in calculos maxime complicatos et taedioſos fuiſſemus delapſi, qui tamen per moleſtiſſimas reductiones tandem ſine dubio ad expreſſiones ſatis concinnas reuocari potuiſſet. Nunc autem theoremate noſtro ſtabilito iſta ſolutio haud difficulter expediri poterit.

Problema 2.

§. 13. *Si diſcrimen inter binas vires M et N maius fuerit quam vt aequilibrium conſiſtere poſſit, determinare motum, quo funis ſuper cylindro a vi maiori protrahetur.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 5 §. 14. Sit figura A Y B ſectio transuerſa cylindri eaque verticalis, cui circumductus ſit funis altero termino onuſtus pondere M, altero vero N; ita

ita vt ſit $M > N e^{\lambda \pi}$. Quoniam enim ambae ponderum directiones ſunt verticales, amplitudo totius arcus A Y B ſit $\theta = \pi = 180^{\circ}$. Iam motus initio ponamus pondus M fuiſſe in ipſo puncto A, alterum vero N dependiſſe vsque in C, ita vt tota funis longitudo ſit $=$ arc. A Y B + B C. Vocemus igitur totum arcum A Y B $= b$ et altitudinem B C $= c$, ita vt tota funis longitudo ſit $b + c$; craſſitiem autem funis vbique vnitate deſignemus, vt longitudo $b + c$ ſimul eius maſſam exhibeat. Ipſum autem funem tanquam grauitatis expertem ſpectemus, quo calculus facilior reddatur: deinceps enim non difficile erit eius quoque rationem habere. Hoc modo vires ſollicitantes erunt ambo pondera M et N; litterae autem M et N tam ipſa pondera quam eorum maſſas exprimant.

§. 15. Elapſo autem tempore t, quod ſemper in minutis ſecundis exprimi aſſumimus, deſcenderit corpus M ex A vsque in M, confecto ſpatio A M $= q$. Alterum igitur pondus N interea aſcendiſſe neceſſe eſt per aequale ſpatium C N $= q$, vnde portio funis etiamnunc hic dependens erit B N $= c - q$. In hoc porro ſtatu ſit v celeritas, qua funis mouetur, quippe quae in omnibus eius punctis eadem erit, vbi v denotat ſpatium quod hac celeritate vno minuto ſecundo percurri poſſet. Ergo elapſo tempore $t + dt$ celeritas funis erit $= v + dv$ et $\frac{dv}{dt}$ exprimet accelerationem funis in ſingulis punctis, ex quo vis acceleratrix erit $= \frac{dv}{2g\,dt}$, denotante g altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur

buntur. Ponamus autem breuitatis gratia hanc vim acceleratricem $\frac{dv}{2g\,dt} = u$, quae ergo per maſſam cuiusque portionis multiplicata dabit vim motricem, cuius directio vbique in ſenſum N B Y A M vergit. Ceterum quemadmodum initio huius motus eſt $q = 0$, ita motus diutius durare nequit, quam donec fiat ex altera parte $BN = c - q = 0$: hoc eſt donec fiat $q = c$.

§ 16. Ad motum igitur inueſtigandum concipiamus toti funi in ſingulis elementis vires eſſe applicatas viribus illis motricibus aequales et contrarias, atque neceſſe eſt, vt tum totus funis ad ſtatum aequilibrii perducatur. Conſideremus igitur funis elementum quodcunque $Yy = ds$, cuius ergo maſſa quoque erit $= ds$; et cum motus eius ſecundum tangentem Y T dirigetur et acceleretur vi motrice $= u\,ds$, ei vim contrariam ſecundum directionem Y y applicatam concipiamus $= u\,ds$. Vbi notandum, dum hoc modo totum funem ſecundum elementa proſequimur, quantitatem u pro conſtante eſſe habenda, propterea quod haec quantitas tantum cum tempore mutatur. Hic autem ſtatum pro eodem temporis momento perſcrutamur. Praeterea vero ſit preſſio, quam elementum $Yy = ds$ a fune ſuſtinet $= \Pi\,ds$, quae ergo ſecundum directionem normalem Y Π applicata eſt intelligenda. Ex ea autem oritur frictio $= \lambda\,\Pi\,ds$ pariter ſecundum directionem Y y agens quandoquidem motus directioni Y T eſt contraria; vnde praeter vim normalem

malem Πds habebimus vim tangentialem $= uds + \lambda\Pi ds$, quam ſupra per Θds indicauimus. Hoc modo ergo obtinemus omnes vires quas funis portio AYB ſuſtinet: at vero eius portio ab A dependens ſcilicet $AM = q$ ob accelerationem ſurſum vrgeri cenſenda eſt vi $= uq$; ſimulque etiam corpus M vi $= Mu$, dum a grauitate deorſum vrgetur vi $= M$. Ex altera vero parte portio funis $BN = c - q$, cum pondere N ob accelerationem deorſum ſollicitabitur vi $= (c - q)u + Nu$, atque in eadem directione etiam vrget grauitas vi $= N$. Hae ergo omnes vires iunctim ſumtae in aequilibrio ſeruari debebunt.

§. 17. Ponamus nunc tenſionem funis in puncto Y eſſe $= T$, ac poſito radio oſculi curuae in hoc loco $= r$, per theorema noſtrum habebimus hanc aequationem: $T = \Pi r$; praeterea vero cum ſit quoque $dT = -\Theta ds$ (videatur §. 6.) ideoque $dT = -uds - \lambda\Pi ds$, ex priore vero aequatione fit $\Pi = \frac{T}{r}$, hoc valore ſubſtituto erit $dT = -uds - \frac{\lambda T ds}{r}$ ſiue $dT + \frac{\lambda T ds}{r} = -uds$. Vocemus iam vt ſupra amplitudinem arcus AY ſeu angulum $AOY = \Phi$, eritque $\frac{ds}{r} = d\Phi$, vnde aequatio modo inuenta multiplicetur per $e^{\lambda\Phi}$, vt prodeat

$$e^{\lambda\Phi}(dT + \lambda T d\Phi) = -uds\, e^{\lambda\Phi}$$

cuius integrale eſt

$$e^{\lambda\Phi} T = \text{Conſt.} - u \int e^{\lambda\Phi} ds,$$

vbi conſtans etiam vtcunque a tempore t ſiue celeritate v, quippe quae vt functio ipſius t ſpectanda,

 pen-

pendere poteſt, pro qua igitur ſcribamus litteram U. Integrale autem $\int e^{\lambda\Phi}\,ds$ ita capiatur, vt euaneſcat poſito $s=0$ vel $\Phi=0$. Quo obſeruato erit tenſio
$T = U e^{-\lambda\Phi} - e^{-\lambda\Phi} u \int e^{\lambda\Phi}\,ds$.

§. 18. Ponamus nunc primo $s=0$ et $\Phi=0$, vt obtineamus tenſionem in ipſo puncto A, quae ergo erit $T=U$ quae, quia neglecta maſſa funis pondus M in quiete ſuſtinere debet, surſum agere eſt cenſenda. Ea ergo cum viribus pro hac parte ante notatis, quae erant $u(q+N)$ ſurſum, et ipſum pondus M deorſum in aequilibrio eſſe debet; vnde naſcitur iſta aequatio: $U = M - u(q+M)$ quae eſt vna aequatio pro motus determinatione, alteram vero nobis ſuppeditabit ſtatus alterius portionis a puncto B dependentis, quam deorſum vrgeri vidimus viribus $u(c-q)+Nu+N$.

§. 19. Quaeramus igitur funis tenſionem in ipſo termino B, et quia totius arcus A Y B amplitudo eſt 180° erit $\Phi=\pi$; tum vero vocemus valorem formulae integralis $\int e^{\lambda\Phi}\,ds$ per totum arcum A Y B extenſum $=C$, eritque tenſio funis in puncto $B = U e^{-\lambda\pi} - u e^{-\lambda\pi} C$ ſurſum vergens, propterea quod pondus N in aequilibrio ſeruare debet, quae ergo aequalis eſſe debet viribus deorſum vergentibus pro portione B N, vnde ex hac parte nanciſcimur hanc aequationem:

$$U e^{-\lambda\pi} - u e^{-\lambda\pi} C = u(c-q) + Nu + N$$

ex qua aequatione cum praecedente coniuncta eliminari poterit quantitas conſtans U, quae adhuc manſe-

manſerat incognita, quia enim $U = M - u(q + M)$, hoc valore hic ſubſtituto impetrabimus aequationem finalem iſtam:

$$-u\,e^{-\lambda\pi}(q+M+C)+M\,e^{-\lambda\pi}=u(c-q)+Nu+N$$

vnde elicimus

$$u=\frac{M\,e^{-\lambda\pi}-N}{e^{-\lambda\pi}(q+M+C)+c-q+N}.$$

§. 20. Scripſimus autem breuitatis gratia litteram u loco $\frac{dv}{2g\,dt}$; dein quia pondus M celeritate v deſcendere aſſumitur, hocque motu ſpatium $AM = q$ tempuſculo dt incrementum accipit $= dq$, erit $dq = v\,dt$, ideoque $q = \int v\,dt$. Praeſtabit autem quantitatem q in calculo retinere; vnde cum ſit $v = \frac{dq}{dt}$ erit ſumto elemento temporis dt conſtante $\frac{dv}{dt} = \frac{ddq}{dt^2}$ ideoque $u = \frac{ddq}{2g\,dt^2}$, quo valore adhibito aequatio motum funis determinans erit

$$\frac{ddq}{2g\,dt^2}=\frac{M\,e^{-\lambda\pi}-N}{e^{-\lambda\pi}(q+M+C)+c-q+N},$$

exqua ſtatim patet, motum in ſenſum BYA oriri non poſſe, niſi haec formula fuerit poſitiua, hoc eſt niſi ſit $M\,e^{-\lambda\pi} > N$, prorſus vti in problemate eſt ſtabilitum. Praeterea vero ex hac aequatione intelligitur, determinationem motus noſtri funis multo difficiliorem eſſe quam in praecedente diſſertatione erat viſum, propterea quod haec aequatio eſt differentialis ſecundi gradus et praeter ddq etiam ipſa littera q ingreditur.

§. 21. Quo autem hanc aequationem facilius tractare liceat, pro quantitatibus conſtantibus ſtatuamus

mus breuitatis gratia $2g(Me^{-\lambda\pi}-N)=E$, $e^{-\lambda\pi}(M+C)+c+N=F$ et $e^{-\lambda\pi}-1=-G$ vt habeamus hanc aequationem: $\frac{ddq}{dt^2}=\frac{E}{F-Gq}$, quae multiplicata per dq et integrata praebet

$$\frac{dq^2}{2dt^2}=-\frac{E}{G}l(F-Gq)+\frac{E}{G}lA$$

ita vt iam ſit $\frac{dq^2}{dt^2}=-\frac{2E}{G}l\frac{F-Gq}{A}$. Vbi notetur q nunquam maius euadere quam c; tum autem ſemper erit $F>Gq$ quia $F>Gc$. Ad hanc conſtantem A definiendam, recordemur, ipſo initio fuiſſe $=0$, et quia motum a quiete inchoaſſe aſſumimus erit etiam celeritas $\frac{dq}{dt}=0$, vnde patet ſumi debere $A=F$. Sicque aequatio pro motu erit $\frac{dq}{dt}=+\sqrt{(\frac{2E}{G}l\frac{F}{F-Gq})}$, vnde porro colligitur

$$dt=\frac{dq}{\sqrt{(\frac{2E}{G}l\frac{F}{F-Gq})}},$$ vnde intelligitur hinc nullo modo integrationem exſpectari poſſe. Tantum ergo abeſt, vt hoc Problema tam facile reſolui poſſit, vti ante erat viſum: vt potius inter difficillima ſit numerandum.

§. 22. Per approximationem autem ſolutio ſuccedit ſi fractio $\frac{G}{F}$ fuerit quam minima. Cum igitur ſit

$$\frac{G}{F}=\frac{1-e^{-\lambda\pi}}{e^{-\lambda\pi}(M+C)+c+N}$$

haec quantitas ſi fuerit valde parua ponatur ea $=n$, eritque

$$l\frac{F}{F-Gq}=\frac{1}{1-nq}=-l(1-nq)=+nq$$

proxime.

proxime. Hoc ergo caſu habebimus $dt = \frac{dq}{\sqrt{\frac{2E}{G}nq}}$ ſiue $dt\sqrt{\frac{2En}{G}} = \frac{dq}{\sqrt{q}}$, vnde integrando erit $t\sqrt{\frac{2En}{G}} = 2\sqrt{q}$; atque hic viciſſim nanciſcemur $q = \frac{Entt}{2G}$, ita vt ſpatium percurſum $AM = q$ quadrato temporis ſit proportionale, vti vſu venit in lapſu grauium libero; verum motus multo magis erit retardatus, ob n fractionem minimam. Hinc igitur ob $n = \frac{G}{F}$ erit $q = \frac{Ett}{2F}$; ac loco E et F reſtitutis valoribus

$$q = \frac{g(Me^{-\lambda\pi} - N)tt}{e^{-\lambda\pi}(M + C) + c + N}.$$

§. 23. Ceterum hic notaſſe iuuabit, iſtum caſum quem per calculum euoluere licuit conuenire cum ſolutione in ſuperiore diſſertatione tradita; vnde intelligimus, eam quoque catenus tantum valere, quatenus fractio $\frac{G}{F}$ eſt valde parua; quod niſi contigerit, ſolutio vtique euadet maxime ardua, ita vt ne per approximationes quidem commode expediri poſſit. Praetea vero iſta ſolutio facile transferri poteſt ad caſum quo funis antequam ad terminum B dependet vnam pluresue integras reuolutiones circa cylindrum compleuerit: tum enim nil aliud requiritur, niſi vt loco litterae π ſcribamus vel 3π, vel 5π, vel 7π etc. quemadmodum ex ſuperiore diſſertatione ſatis eſt manifeſtum.

§. 24. Denique ſi quem forte offendat, quod ſupra pro termino A tenſionem ſurſum vergere aſſumſimus, cum tamen valor litterae T deorſum directus fuerit inuentus, is perpendat, hanc directionem

nem vis T locum habere, quatenus ea puncto Y applicatur. Manifeſtum autem eſt, ſi haberetur filum tenſum inter terminos A et Y, tum quidem punctum Y verſus A et viciſſim A verſus Y, hoc eſt ſurſum vrgeri debere. Atque hinc etiam perſpicuum eſt, quoniam funis cylindro incumbens A Y B in ſtatu tenſionis verſatur, tum vtrumque terminum A et B ob eandem tenſionem ſurſum ſollicitari debere, prorſus quemadmodum in hac ſolutione aſſumſimus.

§. 25. Quod ſi cylindrus cui funis circumvoluitur fuerit circularis, cuius radius ſit $= a$, ideoque $r = a$, tum erit $ds = a\, d\Phi$, hincque formula integralis $\int e^{\lambda\Phi} ds$ euadet $\frac{a}{\lambda} e^{\lambda\Phi} - \frac{a}{\lambda}$. Huius ergo valor ſumto $\Phi = \pi$ erit $= \frac{a}{\lambda}(e^{\lambda\pi} - 1)$, quem in ſolutione generali poſuimus C; vnde pro hoc caſu erit

$$F = M e^{-\lambda\pi} + \frac{a}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\pi}) + c + N \text{ ideoque}$$

$$\frac{G}{F} = n = \frac{1 - e^{-\lambda\pi}}{M e^{-\lambda\pi} + \frac{a}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\pi}) + c + N}$$

qui ergo valor ſi fuerit valde paruus approximatio ante expoſita locum habebit, vbi iterum loco π ſcribi oportebit vel 3π, vel 5π, vel 7π etc. ſi funis circa cylindrum vnam, vel duas, vel tres integras revolutiones fuerit complexus.

DE

DE VIRIBVS REMORVM NOVAE SPECIEI EORVMQVE COMPARATIONE CVM REMIS ORDINARIIS.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Remorum haec noua ſpecies, quorum vires ſum inueſtigaturus, praeter illuſtrem Inuentoris celebritatem, multiplici prae remis ordinariis in nauigiis maioribus praerogatiua, rei nauticae peritorum attentionem iure ſibi meritoque vindicat. Primus in lucem illos protulit Illuſt. *Dan. Bernoulli* in diſquiſitionibus ſur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer a l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux, ornatis anno 1753 Academiae Pariſienſis ſollemni et publico praemio; et mirari ſe ſi ait Auctor, nulli ante ipſum artis nauticae ſtudioſo obtuliſſe ſe horum remorum ideam; hodienum certe non minus mirum videtur, inuentum tanta optati ſucceſſu fiducia ab Ill. Viro commendatum, inde ab illo tempore nec ad examen vllum nec vſum practicum fuiſſe reuocatum. Praeſtantes remorum ſuorum effectus ex principiis a ſe ſtabilitis generatim ſummo acumine euicit Ill. Auctor; neque tamen tum id tulit

tulit inſtituti ratio, vt integram eorundem theoriam ſpecialiori indagine euolueret; vnde operam me haud arbitror inutilem impenſurum, ſi, remis his denuo in ſcenam reuocatis, effectus inde ſperandos ex primis mechanicae principiis deduxero, eorumque cum remis vſitatis, quorum effectus Ill. *Eulerus* in Commentariis Berolinenſibus et nouiſſime in celebri ſuo de conſtructione nauium opere ad calculos reuocauit, comparationem atque ad praecipuarum claſſium nauigia adplicationem vberius hic expoſuero.

§. 2. Praemittenda igitur ante omnia erit diſtincta horum remorum deſcriptio, quam ex gallico Ill. *Bernoullii* ſcripto ipſis eiusdem verbis excerptam hic adiungere viſum eſt.

Soit fig. 1. la coupe horiſontale à fleur d'eau et A B la quille d'un vaiſſeau mû dans des eaux calmes de A vers B. Que *a c b* repreſentent des coupes des pales plongées verticalement dans l'eau ſous une obliquitè dirigée vers la pouppe et faiſant avec la quille un angle de 60 degres. Ces pales ſont d'abord tirées par les rameurs ſuivant la direction *c d* perpendiculaire au plan verticat de la quille. Etant parvenúes jusqu'en *d*, elles ſe retournent par un certain mecanisme dans la ſituation *αβ* dont l'obliquité de 60° eſt maintenant dirigée vers la proue. Dans cette ſituation les rameurs repouſſent ces pales ſuivant la direction *d e* jusqu'en *e*, ou elle reprennent par le meme mecanisme leur premiere ſituation. Pour que ce renverſement des pales

pales ſe faſſe apropos, de façon, que la ſurface pouſſée contre les eaux ſoit toujours tournée du cote de la pouppe, on peut compoſer la rame de deux pieçes; une partie de la pieçe inſerieure entrera dans la ſuperieure, de maniere, que celle d'enbas tourne librement ſur ſon axe. Soit A B C D la pieçe ſuperieure creuſée pour recevoir le bout de la pieçe inferieure E F G H; qu'on faſſe dans la pieçe ſuperieure une rainure *m n p q* et que l'amplitude de l'arc *m q* ou *n p* ſoit d'un peu plus de 60°; qu'on ajoute a la pieçe inferieure E F G H une éſpece d'arret formé en boſſe repreſenté par *r s*, dont la hauteur ſoit tant ſoit peu plus petite, que la hauteur de la rainure. Cet arret eſt deſtiné a toucher et heurter alternativement contre les bords *m n* et *p q* de la rainure et il avancera un peu hors de la rainure. La manivelle, qui doit ſervir a pouſſer et repouſſer la rame pourra etre appliquée au milieu de l'arret, de maniere, que la direction de la manivelle ne paſſe pas par l'axe de la rame, mais qu'elle la raſe. Ces rames, qui ſoutiennent les pales, ſeront ſuſpendues verticalement, la pale enfoncée dans l'eau et le reſte dans l'air; chaque rame aura au bout deux tourillons, qui entreront dans des viroles et ſerviront a ſoutenir la rame; ils ſeront parfaitement horiſonteaux et paralleles a la quille et ne permettront a la rame d'autre mouvement, que celui de balancer dans un plan vertical perpendiculair a la quille; les viroles deſtinées a recevoir les tourillons ſeront menagées dans des ſolives ou pieçes de bois, qui ſortent hors du vaiſ-

 ſeau

ſeau aſſez pour permettre aux rames leur jeu. Le maniement conſiſtera a approcher et eloigner alternativement les rames des bords du vaiſſeau, moyennant une manivelle. Soit la manivelle $o\,x$, et que les hommes la tirent vers eux, alors l'arret $r\,s$ viendra auſſitot a heutrer le bord $m\,n$ et y reſtera comme collé pendant tout le temps, qu'on tire la rame; mais auſſitot, qu'on commence a la repouſſer l'arret ſe mettra contre l'autre bord et y reſtera pendant tout le temps, qu'on employe a repouſſer la rame; et ce mouvement de l'arret ſervira a renverſer alternativement la pale.

§. 3. Huiusmodi ergo remis inſtructae nauis motum, eorundem actione ipſi impreſſum, vt definiamus: nauis concipiatur remorum viribus iam ad motum propulſa; et curſus, quo nauis progreditur, directi ponatur velocitas $= \sqrt{c}$; ea autem, qua manubrium in directione ad planum ſpinae nauis verticale normali agitatur, $= \sqrt{u}$, ita vt c et u altitudines deſignent harum celeritatum generatrices. Tab. VI. Fig. 6. Sit tota remi ab axe horizontali vsque ad palmulae centrum longitudo $= L$, et puncti, in quo manubrium eſt adplicatum, ab eodem axe diuantia $= D$; vnde poſito $\frac{L}{D} = y$, palmulae centro celeritas imprimetur $= y \sqrt{u} = \sqrt{v}$.

§. 4. Referant linaae $c\,f$ et $c\,e$ binas iſtas celeritates palmulae $a\,b$ cuius ad ſpinam nauis obliquitas $= f\,c\,b = \omega$ et centrum grauitatis in c. Completo igitur parallelo-grammo $a\,c\,f\,g$ punctum c celeritate $= \sqrt{(v + c)}$ in directione $e\,g$ moueri

con-

concipitur, vt ſit tang. $gce = \sqrt{\frac{c}{v}}$; quae celeritas ſecundum bg et ch reſoluta et poſito $bcg = \Phi$ praebet in directione ch celeritatem $= \text{ſin}\, \Phi \sqrt{(v+c)}$ qua palmula directe contra aquam impellitur; cui cum debita ſit altitudo $= \text{ſin.}\, \Phi^2 (v+c)$, ſi palmulae fuerit ſuperficies $= b^2$ et voluminis aquei $= g^3$ pondus $= p$, erit vis impulſus aquae in palmulae ſuperficiem normalis

$$= \frac{p.\, b^2\, \text{ſin.}\, \Phi^2}{g^3} (v+c).$$

Quare cum ſit

$$\Phi = 90^\circ - \omega - gce, \text{ ob}$$

$$\text{ſin.}\, gce = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(v+c)}} \text{ et coſ.}\, gce = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(v+c)}}$$

adeoque

$$\text{ſin.}\, \Phi = \frac{\text{coſ.}\, \omega \sqrt{v} - \text{ſin.}\, \omega \sqrt{c}}{v+c}$$

habebitur impulſus aquae ad palmulam perpendicularis

$$= \frac{p.\, b^2 (\text{coſ.}\, \omega \sqrt{v} - \text{ſin.}\, \omega \sqrt{c})^2}{g^3} = \frac{p.\, b^2.\, \Omega^2}{g^3},$$

poſito breuitatis gratia

$$\text{coſ.}\, \omega \sqrt{v} - \text{ſin.}\, \omega \sqrt{c} = \Omega.$$

Haec autem vis ſecundum binas directiones principales, vnam curſui nauis directo parallelam, alteram ſpinae nauis normalem, ſiue ſecundum cf et ec reſoluta praebet

$$\text{ſecundum } cf \text{ vim} = \frac{p.\, b^2\, \Omega^2\, \text{ſin.}\, \omega}{g^3}$$

$$\text{ſecundum } ec \text{ vim} = \frac{p.\, b^2\, \Omega^2\, \text{coſ.}\, \omega}{g^3}.$$

§. 4. Statuatur nunc remorum numerus $= N$ et ſingulis adplicati ſint n homines, vt remigum ſit numerus $= Nn$; quo poſito, vis totalis, ex remorum actione orta, nauem in curſu ipſius directo propellens, erit $= \frac{p.\, N.\, b^2\, \Omega^2\, \text{ſin.}\, \omega}{g^3}$; quare cum in di-

 rectione

rectione huic oppoſita agat aquae contra nauis proram reſiſtentia $= R$, nauis in curſu ſuo directo reuera propulſabitur vi $= \frac{p. N. b^2 \Omega^2 \, ſin. \, \omega}{g^2} - R$. Inchoauerit centrum grauitatis C, in quo tota nauis maſſa $= M$ collecta concipitur, motum in puncto C, et iam peruenerit vsque in D, vt ipſius in puncto D ſit celeritas $= \sqrt{c}$; quo poſito pro acceleratione nauis, dum ſpatiolum $Dd = dx$ percurrit, notum eſt haberi ex principiis mechanicis

$$\frac{M\,dc}{dx} = \frac{p. N. b^2 \Omega^2 \, ſin. \, \omega}{g^2} - R.$$

§. 5. Sit porro remigis ad remum agitandum adplicati vis $= P$, adeoque vis, qua remus in directione normali verſus ſpinam nauis ſollicitatur, $= nP$, eiusque, reſpectu axis horizontalis, momentum $= n D. P$. In directione huic contraria agit vis impulſus aquae modo inuenta $= \frac{p. b^2 \Omega^2 \, coſ. \, \omega}{g^2}$, cuius cum ſit momentum $= \frac{p L. b^2 \Omega^2 \, coſ. \, \omega}{g^3}$; ſumma momentorum, quibus remus in directione ſpinae nauis normali ſollicitatur, erit $n D P - \frac{p L b^2 \Omega^2 \, coſ. \, \omega}{g^3}$, cui acceleratio motus angularis foret proportionalis; quae cum ſit nulla, ſiquidem remiges id operam dent, vt integra remi excurſio ſtatim ab initio vniformi motu peragatur; habebitur hinc $n P = \frac{p. y. b^2 \Omega^2 \, coſ. \, \omega}{g^3}$.

§. 6. Prior autem aequatio vt reſolui poſſit, quantitatem R ſeu aquae contra proram nauis reſiſtentiam definiri oportet; vbi quidem iam conſtat, ſi r^2 deſignet reſiſtentiam nauis abſolutam ſiue tale planum, quod eadem cum naue velocitate directe contra aquam motum eandem pateretur, quam na-

vis,

vis, aquae reſiſtentiam, ipſam hanc vim ponderi aequari priſmatis aquei, cuius baſis $= r^2$ et cuius altitudo fuerit ea, quae nauis celeritati debetur; vnde conficitur $R = \frac{p. r^2 c}{g^3}$; quare cum ex vltima aequatione ſit

$$\frac{p. N b^2 \Omega^2. ſin. \omega}{g^3} = \frac{N n P. tang. \omega}{y};$$

prior aequatio, poſito breuitatis gratia $\frac{g^3}{p r^2} = A$, hanc induet formam

$$\frac{A M. dc.}{A. \frac{N n. P. tang. \omega}{y} - c} = dx$$

ex cuius integrali

$$x = A M. \log. \frac{A N n P tang. \omega}{A N n P tang. \omega - y c}$$

colligitur, denotante e illum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, altitudo celeritati nauis debita,

$$c = \frac{A N n P. tang. \omega}{y} \left(1 - e^{-\frac{x}{A M}} \right)$$

ſtatim vero etiam pro valde modico ipſius $\frac{x}{A M}$ valore poſterior hic terminus tam euadit exiguus, vt prae vnitate euaneſcat, adeoque nauis concipi poſſit, quaſi iam inde a primo motus initio vniformiter progrederetur, quo aſſumto habebitur

$$c = \frac{g^3 N n P tang. \omega}{p. y r^2} \text{ et } r^2 c = b^2. \Omega^2 \text{ ſin. } \omega$$

ex qua vltima aequatione colligitur

$$r. \left(\text{tang. } \omega + \frac{r}{b \sqrt{N. coſ. \omega} \sqrt{ſin. \omega}} \right) \sqrt{c} = \sqrt{v} = y \sqrt{u}$$

ita, vt poſito

$$\alpha = \text{tang. } \omega + \frac{r}{b \sqrt{N. coſ. \omega} \sqrt{ſin. \omega}}$$

habeatur $y = \frac{\alpha \sqrt{c}}{\sqrt{u}}$; quo valore ſubſtituto erit

$$c \sqrt{c} = \frac{g^3. tang. \omega. N n. P. \sqrt{u}}{p. \alpha r^2}$$

adeoque ipſa nauis celeritas

$$\sqrt{c} = \sqrt[3]{\frac{g^3.\ tang.\ \omega.\ N\ \pi.\ P\ \sqrt{u}}{p.\ \alpha.\ r^2}}$$

cum igitur ex conſtructione Ill. *Bernoulli* ſit $\omega = 60^\circ$; et pedis aquae cubici pondus $= 72$ libr., adeoque $g^3 = 1$ et $p = 72$; habebitur

$$\sqrt{c} = 0,28867.\ \sqrt[3]{\frac{N\ \pi.\ P\ \sqrt{u}}{\alpha\ r^2}}$$

ita, vt ex datis remigum numero et viribus vna cum celeritate manubrii, ſuperficie palmularum et reſiſtentia nauis abſoluta ipſa nauis celeritas hinc definiatur.

§. 7. Omnia itaque iam redeunt ad valorem literae P ſeu aeſtimandam vim remigis ad remum agitandum adplicati, vtpote qui praeter onus promouendum proprii quoque ſui corporis inertiam ſuperare et aliquam virium ſuarum partem ipſi brachiorum motui conſeruando impendere debet. Vtar hic eadem determinatione, quam pro computandis remorum ordinariorum effectibus adhibuit Ill. *Eulerus* in ſupplemento tractatus ſui ſur la conſtruction et la manoeuvre des vaiſſeaux; ſit ſcilicet maxima celeritas, qua homo brachia ſua mouere poteſt, debita altitudini $= k$, ita, vt in tali motu conſtitutus vlli oneri eleuando ſit impar, ſit porro vis abſoluta hominis quieſcentis $=$ F, quae communiter 54 libr. aſſumitur. His poſitis, hominis, qui ſe ipſum mouet celeritate $= \sqrt{u}$, ſtatuitur citato loco vis ad ſuperandam aliquam reſiſtentiam ſuperſtes

$$P = F\left(1 - \sqrt{\frac{u}{k}}\right)^2.$$

Hoc igitur valore in formula noſtra ſubſtituto habebitur $\sqrt{c} =$

$$\sqrt{c} = 0,28867 \cdot \sqrt[3]{\frac{N n . F (1 - \sqrt{\frac{u}{k}})^2 \sqrt{u}}{\alpha r^2}}$$

quae celeritas cum euaneſcat binis caſibus, ſi $u = 0$; et ſi $u = k$; dabitur valor ipſius u maxime idoneus, qui celeritatem nauis efficiat *maximam*; quique ex formulae $(1 - \sqrt{\frac{u}{k}})^2 \sqrt{u}$ differentiali nihilo aequato reperitur $\sqrt{u} = \frac{\sqrt{k}}{3}$; quare cum maxima iſta celeritas ſit circiter $7\frac{1}{2}$ ped. reperitur hinc $k = 1$ ped. rhen.; quibus ſubſtitutis habebitur

$$\sqrt{c} = 0,57734 \sqrt[3]{\frac{N n}{\alpha r^2}},$$

adeoque vno minuto ſecundo erit ipſa nauis celeritas $= 2 \sqrt{\lambda c} = 4,56427 \sqrt[3]{\frac{N n}{\alpha r^2}}$ ped. rhenan. denotante λ altitudinem, per quam grauia primo minuto ſecundo ex quiete libere delabuntur, et exiſtente $\alpha = 1,73205 + \frac{[illegible] \cdot r}{s}$ vbi s^2 deſignat ſummam omnium ſuperficierum palmularum iunctim ſumtarum $= b^2 N$. Atque haec eſt maxima celeritas poſſibilis, a numero remigum $= N n$ naui imprimenda, et quae obtinetur, ſi remus ita inſtruatur, vt ſit manubrii ab axe horizontali diſtantia $= D = \frac{L}{3 \alpha \sqrt{c}}$.

Cum vero, ſi palmulae excurſiones nimis euaderent magnae, ea in vtraque excurſus ſui extremitate nimis oblique contra aquam impingeret, quam vt vis nauem propellens inde non ſenſibilem diminutionem pateretur; ſit iſta obliquitas $= \Phi$; et cum altitudo celeritati manubrii debita $= u$ inuenta ſit $u = \frac{1}{8}$ ped. rhen.; erit ipſa ea celeritas tempore vnius minuti ſecundi $= 2,6$ ped. $= 3$ ped. circ. vnde concluditur $D = 3 . \text{tang } \Phi$ adeoque $L = 9 \alpha \text{ tang. } \Phi \sqrt{c}$; quare

quare admiſſo angulo $\Phi = 45^\circ$; habebitur tota remi longitudo $L = 9 \cdot \alpha \sqrt{c}$. ped. et pro poſitione manubrii $D = 3$. ped.

§. 8. Adplicemus iam formulas inuentas ad caſum ab Ill. *Bernoulli* examinatum. Nauem ſcilicet primae claſſis commode 50 eiusmodi remis inſtrui poſſe iudicat, quorum ſingulis 10 remiges ſint adplicati et palmula annexa, cuius ſuperficies $= 12$ ped. quadr.

Pro hoc ergo exemplo hinc habebitur

$$N = 50;\ n = 10;\ s^2 = 600;$$

praeterea vero ex determinatione Cel. *Bougeri* pro nauibus primae claſſis eſt $r^2 = 150$. Ex quibus valoribus concluditur $\alpha = 2,80660$ et ipſa nauis celeritas $= 4,83$. ped. rhen. tempore vnius minuti ſecundi, prorſus vti Ill. *Bernoulli* ex ſuis principiis concluſit, quae itaque celeritas aequatur $\frac{4}{9}$ celeritatis maximae poſſibilis, quae naui primae claſſis a totidem hominibus ſecundum tabulam a Ill. *Bernoullio* §. 3. P. 11. diſſ. citatae allatam vllo modo imprimi poteſt.

§ 9. Conſtruamus nunc ex inuentis formulis tabulam generalem, quae pro qualibet reſiſtentia nauis abſoluta et remigum numero datis velocitatem nauis indicet. Cum iſta celeritas per quantitatem $\frac{Nn}{r^2}$ ſeu proportionem inter numerum remigum et reſiſtentiam nauis definiatur; ſit haec proportio $= \mathfrak{N}$; ſuperficiem vero palmulae vni homini debitae ſtatuamus $b^2 = \frac{1}{2}$ ped. quadr. quibus poſitis ob $n = 1$ formulae inuentae hanc induent formam:

$$\alpha = 1,73205 + \frac{5,0391}{\sqrt{\mathfrak{N}}}$$

atque

atque ipſa nauis celeritas

$$= 4,5643 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{N}}{\alpha}}$$

ex quibus conſtructa eſt ſequens tabula, cuius prima columna indicat velocitatem nauis ope nouorum horum remorum, altera autem velocitatem ope remorum ordinariorum ipſi imprimendam; pro dato quolibet valore ipſius $\mathfrak{N}$; qui ex proportione inter reſiſtentiam nauis abſolutam et numerum remigum innoteſcit. Alteram ſcilicet columnam ex Ill. *Euleri* tractatu de conſtructione nauium pag. 350 excerpſi, habita ratione differentiae inter pedem Londinenſem et rhenanum.

TABVLA
exprimens in pedibus rhenan. velocitatem nauis ope remorum tam nouorum quam ordinariorum acquiſitam.

$\mathfrak{N}$	Remi noui	Remi ordin.	$\mathfrak{N}$	Remi noui	Remi ordin.
$\frac{1}{2}$	1,989		12	7,587	4,849
$\frac{3}{4}$	2,386		13	7,827	5,010
1	2,710	1,675	14	8,055	5,159
2	3,658	2,283	15	8,272	5,304
3	4,339	2,722	16	8,480	5,440
4	4,889	3,080	17	8,680	5,574
5	5,357	3,385	18	8,872	5,702
6	5,766	3,653	19	9,056	5,822
7	6,134	3,893	20	9,235	5,941
8	6,469	4,114	21	9,408	6,057
9	6,778	4,317	22	9,575	6,169
10	7,065	4,503	23	9,738	6,277
11	7,334	4,683	24	9,896	6,382

$\mathfrak{N}$	Remi noui	Remi ordin.	$\mathfrak{N}$.	Remi noui	Remi ordin.
25	10, 049	6, 484	36	11, 457	7, 459
26	10, 198	6, 583	37	11, 634	7, 538
27	10, 344	6, 680	38	11, 750	7, 614
28	10, 486	6, 775	39	11, 863	7. 689
29	10, 625	6, 867	40	11, 974	7, 763
30	10, 753	6, 957	50	12, 999	8, 447
31	10, 893	7, 046	60	13, 894	9, 046
32	11, 023	7, 131	70	14, 694	9, 580
33	11, 150	7, 215	80	15, 421	10, 059
34	11, 275	7, 297	90	16, 089	10, 510
35	11, 396	7, 378	100	16, 708	10, 925

§. 10. Vſus huius tabulae vt exemplo illuſtretur, ſint duae naues primae claſſis, 600 remis vna Bernoullianis, altera ordinariis inſtructae; ita, vt ob $r^2 = 150$, ſit $\mathfrak{N} = 4$. Quare cum celeritates reſpectiuae maximae ſint 4, 89 et 3, 08; ſi his duabus nauibus propoſitum ſit ſpatium percurrendum vnius milliaris = 23640 ped. rhen. prior nouorum remorum ope hanc viam abſoluet tempore $1^h. 20'$; altera autem remis ordinariis propulſa demum tempore $2^h. 8'$; quae poſterior nauis vt propoſitum curſum eodem cum priori tempore abſoluat, 1876 remis ordinariis foret inſtruenda.

Reliquas horum remorum praerogatiuas, attentione non minus dignas, recenſet Ill. *Bernoulli* §. 30. P. 11. diſſ. allegatae.

PHYSICA.

PHYSICA.

DE FORAMINE OVALI, EIVSQVE VSV, IN DIRIGENDO MOTV SANGVINIS.

OBSERVATIONES NOVAE.

Auctore

C. F. WOLFF.

(Lecta in conuentu Academico d. 11. Ianuar. 1776.)

§. 1.

Quamuis plurimum laboris Anatomici in indagandis organis hiſce, quibus in foetu diuerſa, quam in adulto homine, circulatio ſanguinis efficitur, impenderint; ſaepiusque, repetitis periculis, denuo labores eosdem alii atque alii ſuſceperint; quamuis etiam in modo, quo fieret haec circulatio in foetu, Celeberrimi olim Viri multum inter ſe diſſenſerint: in ſtructura tamen horum organorum ipſa, et in conformatione non modo ductus arterioſi Botalli, qui ſatis ſimplex nullique errori obnoxius eſt, ſed etiam difficilioris foraminis oualis, omnes omni tempore inter ſe conſenſerunt. Foramen ouale communi ore ſingulare foramen eſſe dicitur, quod nullo cum alio in corpore animali, vel orificio, vel ductu, comparaueris, quod inſculptum ſit ſepto, quo vicini ſinus cordis a ſe inuicem diſtinguuntur, et cuius ope igitur hi ſinus inter ſe communicent;

Idea foraminis oualis vti vulgo concipitur.

ſiue nunc ex dextro ſinu in ſiniſtrum ſanguis tranſeat, vti plerorumque Anatomicorum ſententia fuit, ſiue contra ex ſiniſtro in dextrum ille progrediatur, vt alii voluerunt, ſiue denique vtriusque ſinus ſanguis promiſcue commiſceatur, quod ſimiliter propoſitum fuit.

Ea legibus naturae contraria eſſe videtur.

§. 2. Certum eſt, ſimplex eiusmodi foramen, in medio duorum cohaerentium vaſorum pariete, quo vaſa haec inter ſe communicarent, nusquam alibi in corpore humano vel animali reperiri. Ductus vbique reperies communicatorios, maxime in venis, et orificia vbique videbis ductuum vel vaſorum, ſed nulla ſimplicia foramina. Neque hoc etiam fieri ſolet, vt ſanguis ex vno vaſe progrediatur in alterum, quin ſimul in ſuo itinere promoueatur, propiusque accedat ad illum ſcopum, quorſum deſtinatus eſt. In noſtro autem organo ſanguis, dum ex dextro in ſiniſtrum, vel ex hoc in illum ſinum tranſit, nihilo cordi propior redditur, et omnino per ambages ambulat. Neque tamen ſolet natura vti mediis, ſemel tantummodo et vnico in caſu adhibitis, quin analoga eorum exempla in aliis locis reperiantur. Et ipſe, quem contra generales leges arteriarum in ductu arterioſo BOTALLI et aorta videmus, duarum arteriarum confluxus, praeter innumeras arteriarum minorum anaſtomoſes inſigne exemplum analogum habet in arteria baſiliari.

§. 3. Haec autem, quamuis aliquomodo ideam foraminis oualis ſuſpectam reddere potuiſſent, minime

me tamen in cauſſa fuerunt, vt vel de rei veritate dubitarem, vel ideam, adeo inueteratam, denuo examini ſubiicerem. Videbantur autem regiones in cauitatibus ſinuum et partes eorum internae non ſatis indicatae eſſe; multo minus locus ipſe in ſepto, vbi foramen exiſteret, notus mihi erat. Imprimis valuula foraminis oualis, cuius lamina altera a membrana interna ſinus dextri, altera a ſiniſtri membrana continuari dicitur, quo loco ex ſepto naſceretur, et cui eius parti adhaereret, nimis mihi obſcurum erat. Quare, vt haec expedirem, vt ideam foraminis oualis mihi ipſi perficerem, hanc particulam cordis data occaſione attentius conſiderare et examinare conſtitui; longeque alia reperi, quam quidem quaeſiueram.

§. 4. Ilico enim apparuit, foramen minime adeo ſimplex exiſtere, vt vnum idemque foramen ſit, quod in dextro et quod in ſiniſtro ſinu pateat; vt vnam eandemque eius oram in dextro atque ſiniſtro ſinu percipias. Pars orae ſuperior quidem, qui ab arcu, quem iſthmum VIEVSSENII vocare ſolent, formatur, vna eademque eſt in vtroque ſinu; ſed orae partem inferiorem longe aliam inuenies in dextro, aliamque in ſiniſtro ſinu. In dextro, ſi ſinum methodo EVSTACHII in parte anteriori vna cum ventriculo cordis dextro aperueris, quae vnica ſectio eſt, qua omnia, quae ad foramen ouale pertinent, integra conſeruantur; foramen apparet, ſeu orificium, figura omnino ouale, et ita poſitum, vt diameter longior oblique a parte anteriori et ſiniſtra retror-

Prima obſeruata.
In quouis ſinu diuerſum inuenitur foramen.

Tab. VII. Fig. 1.

retrorſum dextrorſumque decurrat (fig. I. 8. 11. 15.). Huius orificii ora ſuperior a dicto illo arcu (10.) quem iſthmum vocant, efficitur; at ora inferior a valuula EVSTACHII (7. 8. 9. 5.) formatur, quae, figurae ſemilunaris cum ſit, extremitatibus ſuis ipſi illi arcui applicatur (5. et 9.) et margine ſuo libero concauo (8.) oram illam inferiorem conſtituit, eoque modo orificium, ſeu foramen hoc, quod arcus ſolus dimidium tantummodo praeſtabat, perficit et integrum reddit. Atque hoc vnicum orificium eſt, quod in regione ſepti in dextrum ſinum hiat. Tab. VII Fig. 2. et 3. In ſinu ſiniſtro vero, ſi hic in parte poſteriori, cui inſeruntur venae pulmonales, aperitur, quae pars poſterior tota reſecanda eſt, foramen ſimiliter apparet, ſed alius figurae, alius plane indolis et ab aliis Fig. 2. partibus formatum. Eidem nempe arcui, iſthmo VIEVSSENII, et partim ſupra hunc arcum membranula tenuis, ſatis lata, et in tubi ſpeciem conuoluta, quae ſub nomine valuulae foraminis oualis venire ſolet, (*o. p. s. t. v.*) lateribus ſuis adeo adglutinata quaſi eſt, vt, ſi ſibi relinquitur, ſiue in aqua libere fluitat, (fig. 2) margine ſuo extremo (5. 6. 9.) orificium offerat tubi, quem ipſa mem-Fig. 3. brana producit, et quo arcus tegitur. Si vero eo vsque deprimitur, vt arcus detegatur, (fig. 3.) tum aperturam oſtendit (*y.*), inter arcum et internam ſuperficiem membranae tubiformis contentam, et ab his partibus formatam. Siue igitur, quod ſolo extremo margine valuulae foraminis oualis ſuper arcum formatur, orificium, ſiue totam aperturam ſum-

ſumſeris, quae inter arcum et valuulam foraminis oualis continetur, et quae proprie pro foramine ouali accipi ſolet; aliud, manifeſtum eſt, foramen eſſe, quod in dextro, et aliud, quod in ſiniſtro ſinu patet; ſiquidem illud ex arcu et valuula EVSTACHII, hoc ex eodem arcu et valuula foraminis oualis componitur. Vel duplex ergo foramen ouale datur, alterum, quod in dextrum, et alterum, quod in ſiniſtrum ſinum hiat; vel, ſi id ſolum, quod inter valuulam foraminis oualis et arcum continetur, foramen ouale dicere velis, hoc foramen in ſiniſtrum quidem, minime vero in dextrum ſinum patet.

§. 5. Quae res ſane omnem de foramine ouali conceptum mihi penitus perturbauit. Videbam, aliter ſe rem habere, quam vt vulgo concipitur, et foramen ouale accuratiori indagine opus habere. Imprimis neceſſe eſſe cognoſcebam, vt inquiratur, ſi quid forte lateat inter haec duo orificia diſtincta. Nam, ſi vera exiſteret communicatio inter ſinum dextrum et ſiniſtrum; vel ſimplex ora inferior, vt ſuperior eſt, ſimplex foramen efficere, vel ſi duplex ora inferior fuerit, intermedium aliquid his oris eſſe debebat, quo inter ſe cohaererent et ductus aliquam ſpeciem producerent, id quod omni tamen veri ſpeciei prorſus contrarium eſſe videbatur. Prius quam autem vel EVSTACHII valuulam vel valuulam foraminis oualis diſſecarem, quod factu opus erat ad detegendum id, quod iis intereſſet; cum egregio et vnico, quod tum temporis (menſe Ian. 1771.) mihi erat, cordi

 infan-

infantis recens nati, quantum fieri poterat, parcendum mihi eſſet, ſtylo omnia caute perquirere coepi. Atque tum haec phaenomena ſe praebuerunt. Stylus nonniſi magna cum difficultate ex ſinu dextro per foramen, quod in hoc patet, et inde porro per illud, quod in ſiniſtrum hiat, in hunc ſiniſtrum ſinum adigi poterat. Similiter idem haud ſine periculo rumpendi valuulam foraminis oualis ex ſinu ſiniſtro per vtrumque foramen in dextrum ſinum redibat. Sed contra, ſiue ex dextro, ſiue ex ſiniſtro ſinu ille immiſſus fuerit foramini, quod cuilibet ſinui reſpondet, facillimo negotio et ſponte cedebat deorſum, venaque caua exibat inferiori, vbi haec ab hepate reſecta fuerat.

Sinus non inter ſe, ſed cum vena caua inferiori communicant.

§. 6. Denique, vt breuibus verbis totum rei caput abſoluam, vti ex his, quae retuli, vnusquisque facile praecognoſcit; vlteriori examine inſtituto, valvula foraminis oualis diſſecta et remota, quo oculis offerrentur, quae abſcondita eſſent inter hanc et EVSTACHII valuulam, ſatis manifeſto videbam: *Sinum ſiniſtrum minime communicare cum ſinu dextro, ſed vtrique ſinui interpoſitam eſſe venam cauam inferiorem. Orificium, quod in dextro ſinu apparet, ducere in hunc truncum venae cauae inferioris. Illud, quod in ſiniſtro conſpicitur, quod proprie foramen ouale vocatur, itidem aperturam aliam eſſe eiusdem venae cauae inferioris. Adeoque ſinum vtrumque cum vena caua communicare per eas aperturas, quae diuerſae in ſingulis ſinubus apparent; inter ſinus ipſos vero nullam communicationem eſſe.* Niſi com-

communicationem dicere velis eo modo, quo et vena caua ſuperior cum ventriculo dextro cordis communicat, mediis nempe ſinu et auricula dextris, et quo omnia vaſa totius corporis inter ſe communicant.

§ 7. Sed vt penitius natura huius ſic dicti foraminis oualis appareat, neceſſe eſt, vt vena caua inferior, qua ratione haec duo ſua orificia producat, vberius deſcribatur; deinde etiam ſtructura harum partium in corde adulti, nec non in vitulino corde conferatur; quo, vt ſaepe fit, quod in homine nonniſi obſcurius percipitur, aliis ſub circumſtantiis in animalibus diſtinctius et manifeſtius appareat. Vena caua inferior, dum ex hepate, perforando diaphragma, verſus ſinus cordis adſcendit, licet ſatis breuis ſit in hoc itinere, aliquam tamen longitudinem habet; et ipſa eius pars, qua ſupra diaphragma emergit, notari et a ſinubus ſatis diſtingui poteſt. Ea igitur ita reſpectu ſinuum poſita eſt, vt vtrique ſinui, ſiniſtro aeque ac dextro, reſpondeat, ſiniſtroque in foetu non minus quam dextro inſerta ſit. Lumen igitur, quo vena in ſinubus deſinit, ipſum illum arcum ſupra offendit, quem iſthmum VIEVSSENII vocant, eoque arcu in duas partes, ſeu potius in duo lumina, vel orificia diuiditur, quae varia foetus et infantis aetate variam inter ſe proportionem habent. Alterum horum luminum dextrum eſt, ſimulque antrorſum paullulum ſitu inclinat, atque hoc, etiam quo tempore foetus in lucem prodit, multo minus eſt; alterum ſiniſtrum eſt et ſimul poſte-

Venae cauae inferioris deſcriptio.

Poſitio, qua vtrique ſinui ſimul reſpondet, et in vtrumque per duo orificia inſeritur.

poſterius. Id longe maius eſt, et truncum quaſi continuatum refert, cuius illud nonniſi mediocris ramus eſſet. Illud dextro ſinui reſpondet, eoque vena caua inferior in hunc ſinum inſeritur. Hoc ſiniſtro reſpondet, et hoc orificio vena caua inferior in ſinum ſiniſtrum inſeritur. Illud igitur id ipſum eſt, quod in ſinu dextro in eius regione ſiniſteriori in conſpectum venit, ſi iſte ſinus in parte ſui anteriori vna cum ventriculo cordis dextro aperitur, adeo nempe, vt orificium ventriculi venoſum ſimul cum his partibns diſſecetur. Siniſtrum vero illud eſt, quod proprio ac ſingulari iſto nomine *Foraminis oualis* ab Anatomicis ſalutatum fuit; et quod ergo inpoſterum veriori nomine *orificii ſiniſtri venae cauae inferioris* apellare, ſpero, licebit.

Eadem venae cauae poſitio externe obſeruabilis.

§. 8. Venae cauae inferioris ea poſitio, qua haud ſoli dextro ſinui, ſed ſiniſtro tantundem, niſi magis, quam dextro reſpondet, qua axis huius venae recta in ſeptum ſinuum, vel in arcum tendit, et quae, quantum ſcio, non obſeruata eſt, etiam exterius, et in ipſo adulti corde, manifeſto apparet, dum cor cum ſinubus et vaſis maioribus integrum, et rite praeparatum, a parte poſteriori conſideratur. Quamuis enim in hac regione poſteriori externe nulla linea vel ſtria ducatur, qua terminus inter ſinum ſiniſtrum et dextrum aſſignetur, venae tamen pulmonales dextri lateris, vbi ſinui inſeruntur, certiſſimum ſignum praebent, quo finis ſinus ſiniſtri et ſepti regio et principium ſinus dextri cognoſci poſſint.

Vide-

Videbis ergo, dummodo partes nullo modo diſtrahuntur, ſed ſibi, vt naturaliter ſunt, remittuntur, venam cauam adeo ſinubus applicatam eſſe, vt ſuo ſiniſtro latere multo hac inſertione venarum pulmonalium ſiniſterior ſit, atque in adulto dimidia ſui parte in ſiniſtrum, dimidia in dextrum ſinum inſerta eſſe videatur. In foetu omnino ita inſerta eſt. In adulto autem valuula, quae *foraminis oualis* dicitur, dum arcui adcreſcit, hoc ſiniſtrum venae cauae orificium claudit, et dum oblique a parte ſiniſteriori dextrorſum ad arcum adſcendit, ductum venae cauae, quae ſiniſterior ad hunc locum vsque fuit, dextrorſum nunc dirigit, efficitque, vt vena haec, quamvis verſus vtrumque ſinum directa, dextro tamen ſoli inſeratur. In aliis caeterum ſubiectis adultis magis, in aliis paulo minus, verſus ſinum ſiniſtrum venam cauam directam eſſe reperi.

§. 9. Sed modus etiam, quo vena caua inferior, ope arcus et valuularum, vtrumque ſuum orificium producit, paulo accuratius deſcribendus eſt. Paries eius dexter cum aliqua parte parietis anterioris, qui minor tamen venae pars eſt, ſurſum continuat in valuulam EVSTACHII, eo modo, vt tunica venae interna, ab exterioribus tunicis recedendo, iterumque ſe iisdem applicando, plicam ſemilunarem producat, qua ipſa valuula EVSTACHII efficitur. Poſthaec tunica eadem interna totum ſinum dextrum intus obducit; dum tunicae exteriores huius partis dextrae venae cauae inferioris intacta valuula EV-

Structura duorum venae cauae inferioris orificiorum. Quomodo valuulae EVSTACHII et foraminis oualis a vena caua producuntur.

STACHII in tunicas exteriores totius ſinus dextri continuant; adeo, vt et valuula EVSTACHII et ſinus dexter tanquam continuatio parietis dextri venae cavae inferioris conſiderari poſſint. (Conf. fig. 4. vbi paries dexter 11. in valuulam EVST. 2. 3. 4. 5. continuatus apparet). Simili modo paries ſiniſter et poſterior venae cauae inferioris, et qui venae partem longe maiorem complectitur, valuulam dictam foraminis oualis producit, vt tunica interna huius ſiniſtrae partis venae recedendo ab exterioribus tunicis et ſe ruſum ad easdem applicando plicam, ſed latiorem conuolutamque efficiat, quae ipſa valvula foraminis oualis eſt. Poſt haec ſimiliter haec membrana interna totum ſinum ſiniſtrum intus inveſtit, dum tunicae exteriores parietis ſiniſtri et poſterioris venae cauae inferioris intacta valuula in tunicas exteriores ſinus ſiniſtri continuant. Sic ergo, vt paries dexter venae valuulam EVSTACHII et ſinum dextrum producit, ita paries eiusdem ſiniſter in valuulam foraminis oualis et in ſinum ſiniſtrum continuat. (Conf. fig. eadem 4. et explicatio eiusdem, vbi patebit, parietem ſiniſtrum 12. 13. continuare in valuulam foraminis oualis *b l. v. n.* et *o. m. i.*). Vti vero hic paries ſiniſter, qui valuulam foraminis oualis producit, multo maiorem partem circumferentiae venae occupat, ita idem paulo altior quoque dextro pariete in ſinum ſiniſtrum adſcendit, et valuulam ſuam praeterea producit multo latiorem. Vnde efficitur, vt orificium hoc ſiniſtrum non modo maius ſit dextro, ſed altius quoque colloca-

locatum. Non recte ergo ſcriptum eſt a Celeberrimis etiam Viris, valuulam foraminis oualis compoſitam eſſe a membrana interna ſinus ſiniſtri et a dextri ſinus membrana, qui ſinus dexter, ſemper et in ipſo adulto ab hac valuula remotus, ad eam nihil contribuit. Sed ſedes hinc quoque valuulae foraminis oualis, quae experimentis his inſtituendis anſam praebuerat, apparet. Inſidet baſi ſua (fig. 2. *o. p. q. r.* fig. 3. *h. i. k.*) ipſi ſupremo termino parietis ſiniſtri venae cauae inferioris, vbi haec incipit in ſinum ſiniſtrum continuare; conſtituitque adeo ipſa hunc terminum inter venam cauam inferiorem et ſinum ſiniſtrum, quemadmodum valuula EVSTACHII ſupremae orae partis dextrae et anterioris venae cauae inſidet, et venam a ſinu dextro diſtinguit. Vti igitur valuulam EVSTACHII recte valuulam ſinus dextri appellare poſſes, ſi fas eſſet, nomen EVSTACHII remouere, ita valuula foraminis oualis merito *valuula ſinus ſiniſtri* vocari poterit, quae quippe orificio, quo vena caua inferior in ſinum ſiniſtrum aperitur, praefixa eſt, prorſus ſimili modo, vt valvulae annulares orificiis venoſis ventriculorum cordis praeſident, quibus cum valuulis etiam haec noſtra ſinus ſiniſtri valuula maximam ſimilitudinem habet.

§. 10. His nunc vtrinque productionibus venae cauae inferioris, dextrae nimirum, valuulae EVSTACHII, et ſiniſtrae, valuulae ſinus ſiniſtri, quarum illa et humilior et minor, haec et maior et altior ſitu eſt, interponitur arcus (*y.*) eo modo, vt *Arcus qua ratione venae cauae impoſitus ſit.* *Tab. VII. Fig. 4.*

vt conuexitate ſua ſurſum, cruribus (*w. x.*) deorſum reſpiciat, crureque altero, quod poſterius et dexterius ſimulque breuius eſt (*w.*) extremitatibus valuularum EVSTACHII et ſinus ſiniſtri poſterioribus, altero, quod anterius et ſiniſterius ſimulque longius eſt (*y. x.*) extremitatibus harum valuularum anterioribus interſeratur. (Conferantur hic etiam et comparentur inter ſe fig. 1. et 3.). Hic arcus nihil aliud eſt, quam imus ſinis et margo ſepti ſinuum (*s.*), qui, excauatus non modo ſed tumidus quoque cum ſit, et craſſitie ſua, nec non aliqua albedine, a reliqua ſuperiori parte ſepti (*s.*) ſe diſtinguat, perfectum omnino et diſtinctum arcum refert; quamuis cum ſuperiori ſepti parte vnum continuum efficiat. Vti vero minor circumferentiae venae cauae pars eſt, quae in latere eius dextro valuulam EVSTACHII producit, et maior, quae in ſiniſtro latere in valuulam ſinus ſiniſtri elongatur; ita arcus quoque multo propior lateri dextro poſitus eſt, vt cruribus ſuis proxime iuxta extremitates valvulae EVSTACHII, quae ipſis cruribus his adhaereſcunt (fig. 1.) deſcendat; cum contra inter crura arcus et extremitates valuulae ſinus ſiniſtri notabile ſpatium intercedat, (fig. 4. 16.). Denique crura arcus in ipſo dextro venae pariete paulo inferius baſi valuulae EVSTACHII (2.) paruis nodulis (*w. x.*) deſinunt, partimque in ipſum limbum, qui in interna venae cauae ſuperficie baſin valuulae EVSTACHII cingit, (2.) continuant (*x.* 2.). Sic ergo hic arcus lumen ſuperius venae cauae adeo diuidit, vt

vnam

vnam circiter eius tertiam partem in latere dextro et anteriori a reliquis duabus tertiis partibus in latere ſiniſtro et poſteriori diſcernat, ſimulque in vtroque latere vna cum ea, quae reliqua eſt, orae venae cauae parte circulum denuo perficiat, cui valuula in vtroque latere inſidet, et qui igitur in latere ſiniſtro duplo circiter maior eſt, quam in latere dextro.

§. 11. Valuula EVSTACHII igitur, quae, vt conſtat, figurae ſemilunaris eſt, dum baſi ſua, ſeu margine conuexo, (7.) parieti dextro venae, ipſisque crurum partibus inferioribus, quae in hoc pariete deſcendunt (fig. 4.), extremitatibus vero (5. 9.) partibus crurum ſuperioribus adhaeret, et margine libero fluitante atque concauo (8.) verſus concauitatem arcus (10.) reſpicit, orificium vna cum arcu hoc modo conſtituit, quod non modo longe minorem et vix tertiam partem luminis venae cauae abſumit, et minus quoque quam ſiniſtrum orificium eſt, ſed ob eandem arcus cum valuula EVSTACHII et cum ipſo venae pariete dextro propinquitatem, talem ſimul ſitum, talemque poſitionem obtinet, vt in plano fere verticali conſtitutum ſit, axinque ſuum fere transuerſim ex vena in ſinum dextrum, et paullulum tantum oblique verſus ſuperiora ſimul, directum habeat. Valuula contra ſinus ſiniſtri, quae, vt venoſae valuulae ventriculorum cordis, annularis fere eſt, vel tubulum potius refert, (fig. 2. *o. p. q. s. t. v.*) cuius tamen paries anterior, qui idem breuior ſimul eſt,

Quomodo vena caua ope arcus et valuularum, quas producit, duo ſua orificia efficiat.

Tab. VII. Fig. 1.

Fig. 2.

ſepto ſinuum ſupra arcum (*z*. 1. 2. fig. 4. *p*. *q*. *s*.) adeo adhaeret, vt ab eodem vix diſtingui poſſit, baſi ſua primum, vt dixi, ſupremae orae parietis ſiniſtri et poſterioris venae cauae inſidet, (fig. 2. *o*. *p*. *q*. *r*. fig. 3. *h*. *i*. *k*.) et duas quidem tertias partes ambitus huius venae occupat, deinde reliqua ſed minima quidem baſis ſuae parte etiam arcui inhaeret (fig 3. *x*.), quem vna cum hac parietis ſiniſtri venae cauae ſuprema ora circulum efficere monui (§. 10), et pariete denique ſuo anteriori breviori ſepto ſinuum ſupra arcum applicata eſt (fig. 3 *w*.). Hac ergo ratione tubus efficitur a vena caua, intra ſinum ſiniſtrum porrectus, qui ipſa vena caua vix anguſtior eſt, et orificium margine ſuo libero offert (fig. 2. 5. 6. 7. 8. 9. 10.), quod in plano obliquo poſitum axin ſurſum et ſiniſtrorſum directum habet; adeo, vt, ſi duo haec venae cauae orificia tanquam duos ramos, in quos vena diuideretur, conſiderare volueris, quod haud inepte fieri poſſe omnino mihi videtur; hoc orificium ſiniſtrum, vel tubus potius, cum ſuo orificio in ſiniſtrum ſinum exporrectus, ob maiorem capacitatem non modo, ſed etiam propter directionem venae, vtplurimum conſeruatam, tanquam truncus continuatus, orificium dextrum vero, quo vena in ſinum dextrum hiat, tanquam ramus eius lateralis conſiderari poſſit.

Foramen, quod dicitur, *ouale* quid proprie ſit.

§. 12. Hinc paulo accuratius, quid proprie illud ſit, quod foramen ouale dictum fuit, intelligitur. Nihil aliud eſt, quam ipſa baſis valuulae tu-

tubuloſae ſinus ſiniſtri, qua maximam partem orae parietis ſiniſtri et poſterioris venae cauae et aliqua minori parte etiam arcui haec valuula inſidet; vel ſi mauis, *ipſum orificium venae cauae ſiniſtrum, quo in ſinum ſiniſtrum aperitur, et cui valuula illa tubuloſa baſi ſua adnectitur.* Hoc ipſum quoque illud eſt orificium, quod, quamprimum ſinus dexter, quacunque ſui parte, vna cum vena caua aperitur, ſiue *deſtruitur*, ilico ſemper in conſpectum venit, et quod igitur latere quidem neminem potuit, ſed, quid vere ſit, intellectu ſe admodum difficile praebuit.

§. 13. Hic autem, quem deſcripſi, venae cauae, et orificiorum eius ſtatus ſolummodo in foetu obtinet, qui prope eſt, vt naſcatur, vel in infante, quamprimum nato. Poſt aliquot inde menſes non ſolum, quod notum eſt, valuula ſinus ſiniſtri cum ea parte ſepti ſinuum, quae proxime ſupra arcum eſt, magis magisque concreſcit, orificiumque venae cauae ſiniſtrum hoc modo occludit; ſed, quod minus obſeruatum fuit, nec eſſe potuit, orificium venae cauae dextrum quoque, eadem ratione, qua illud imminuitur, dilatatur et augetur. Sanguis enim, cuius magna pars ad hoc vsque tempus ex vena caua inferiori per ſiniſtrum eius orificium in ſinum ſiniſtrum tranſierat, quemadmodum in ſubſequentibus, beneuole Lector, demonſtrabo, hoc orificio clauſo, omnis incipit per dextrum orificium congeri in dextrum ſinum. Eo efficitur, vt valuula EVSTACHII dextrorſum magis magisque, et arcus

Venae cauae orificiorumque eius ſtatus in Adulto. Orificio ſiniſtro clauſo, dextrum totum venae cauae lumen occupat.

contra, inter quem et valuulam EVSTACHII ſanguinem tranſire oportet, ſiniſtrorſum vrgeatur, et valuula ergo ab arcu remoueatur. Inde porro ea pars luminis venae cauae, quae a ſiniſtra huius luminis parte per arcum dextrorſum ſecernebatur, et quae ad hoc vsque tempus minima et vix tertia totius luminis pars fuerat, magis magisque increſcit, vt contra ſiniſtra imminuitur, et, breui vt dicam, idem ipſe efficitur effectus, acſi arcus ex loco, dextro parieti venae et valuulae EVSTACHII propiori, verſus ſiniſtrum venae parietem promoueretur. Denique in ipſo adulti corde arcus ſuum locum reſpectu luminis venae cauae inferioris adeo vsque mutauit, vt cum pariete ſiniſtro nunc venae cauae in vno fere eodemque plano verticali conſtitutus, a dextro contra pariete et a plano, in quo iſte paries et valuula EVSTACHII eſt, longiſſime remotus ſit; et orificium dextrum ergo, quod tertiam vix partem luminis venae cauae in foetu occupauerat, totum hoc lumen nunc occupet, eique prorſus aequale ſit.

Haec mutatio, quare obſervari facile non potuerit.

§. 14. Egregia haec nobilium harum partium mutatio ideo obſeruari et cognoſci facile non potuit, quia eius cauſae latuerunt. Sanguis enim, qui a ſiniſtro venae cauae orificio repulſus, dextrum permeare cogitur, omnesque has mutationes et effectus producit, a ſinu dextro credebatur et ab auricula dextra per foramen ouale, quod ſingulare in ſepto ſinuum foramen eſſet, recta in ſinum ſiniſtrum tranſire, intactis et vena caua inferiori et eius, quo

quo in dextrum ſinum aperitur, orificio. Proinde, vt cauſae hae incognitae fuere, effectus ipſi quoque minus facile obſeruari potuerunt.

§. 15. Dum vero arcus eo modo (§. 13.) a valuula EVSTACHII et pariete venae dextro remouetur, cumque ſiniſtro venae pariete in vnum verticale planum redigitur; crura ſimul huius arcus, quae in foetu, in pariete venae dextro deſcendere partimque ſub baſi valuulae EVSTACHII deſinere et partim in eum limbum, qui baſin hanc in venae cauae interna facie cingit, ipſum continuare vidimus, nunc a baſi valuulae EVSTACHII ſeparantur, et contra limbo, qui baſin valuulae ſinus ſiniſtri in eadem interna venae facie in pariete ſiniſtro cingit, adeo reſpondent, vt vna cum eo perfectum circulum producant, qui annulus oualis vulgo dicitur, vti cicatrix orificii ſiniſtri ipſa, quae ſola valuula accreta efficitur, foſſa oualis vocari ſolet.

Annulus inde, qui cicatricem orificii ſiniſtri cingit, ſimul producitur.

§. 16. Sed alii porro non minus notatu digni effectus ſunt, qui ab eodem ſanguine, copioſius nunc ex vena caua inferiori per orificium dextrum in dextrum ſinum irrumpente, producuntur. Et primo quidem extremitas valuulae EVSTACHII poſterior, quae poſteriori cruri arcus in foetu adhaeret, adeo ſucceſſiue diſtenditur et abolетur, vt vltimus valuulae finis dexterior et poſterior duas in aliis corporibus adultis, in aliis tres vel quatuor, et plures in aliis lineas, ab illo crure arcus poſteriori remota,

Alii porro effectus eiusdem maioris ſanguinis preſſionis in orificium dextrum. Valuula EVSTACHII ab arcu ſeparata. Fouea venae cauae.

remota, et in pariete dextro venae cauae inferioris, cui adhaeret, deſinere inueniatur. Huius loco vero in pariete poſteriori venae cauae inferioris fouea nunc exiſtit, vel excauatio, haud profunda, quae oblongae ſiue ouatae figurae eoque modo poſita eſt, vt verticem ſurſum directum habeat, et eminentiori parte ſinus dextri ſuperius circumdatur. Haec excauatio ergo, inter extremitatem nunc dextram valvulae EVSTACHII et crus poſterius arcus interpoſita, in hac poſteriori regione venam cauuam inferiorem a ſinu dextro diſtinguit, adeo, vt excauatio ipſa tota ad venam, limbus eius ſuperior eminens ad ſinum iam pertineat. Sic latere dextro et anteriori valuula EVSTACHII, ſiniſtro latere arcus, poſterius vero fouea et limbus eam circumdans, orificium venae cauae dextrum in adulto efficiunt, venamque a ſinu diſtinguunt; cum in foetu ſola EVSTACHII valuula vna cum arcu idem efficeret, venamque a ſinu diſtingueret. Vti caeterum extremitate dextra valuula EVSTACHII parieti venae dextro in adulto adhaeret, ita ſiniſtra limbo partim, quo orificium venae coronariae cingitur, vltimoque fine ſuo ipſi cruri etiam anteriori arcus affigitur. Nullum dubium ergo eſt, quin excauatio illa in ſummo pariete poſteriori venae cauae inferioris ab eodem copioſius adducto et premente ſanguine pendeat, quo et poſterior extremitas valvulae EVSTACHII aboletur; et quin illud quidem fiat, priusquam extremitas poſterior valuulae EVSTACHII ceſſit, quae, quamdiu exiſtit, eo magis impediendo liberum ſanguinis adſcenſum, eius preſſionem

ſionem in loco, quem ſecludit, adauget; vti valvula EVSTACHII tota, dum oram dextram et anteriorem orificii, vbi et latior et firmior eſt, deſendit, ſanguinem eiusque preſſionem maxime verſus partem poſteriorem ducere videtur, in qua regione poſteriori plurimi et fere omnes, qui a ſanguine copioſius adducto deriuari poſſunt, effectus comparent.

§. 17. Denique quidam etiam effectus ſunt, qui ſatis quidem noti per ſe fuerunt, et quorum cauſa ſolummodo latuiſſe videtur, quos eidem maiori preſſioni ſanguinis, copioſius in dextrum orificium congeſti, attribuerim. Eorum primus eſt retiformis valuula EVSTACHII, quam retiformem quidem ab inuentore acceptam, alii quoque naturaliter eſſe crediderunt. At mihi tamen omnino haec laceratio ſtatus praeternaturalis eſſe videtur. Et eo magis in hac opinione perſuadeor, cum idem ſenſerit PERILLVSTRIS L. B. DE HALLER Cuius magni Viri teſtimonium, vti in vniuerſa Anatomia, ita imprimis in illis caſibus maximi ponderis eſſe debet, vbi plurium in pluribus cadaueribus obſeruationum conſenſus requiritur. Alter horum effectuum, quem primus WINSLOWVS animaduertit, (Act. Acad. Scient. 1717, 1725.) eſt ſucceſſiua totius valuulae EVSTACHII diminutio, qua, prout foramen ouale ſeu orificium venae cauae ſiniſtrum imminuitur et clauditur, illa quoque et anguſtior et breuior redditur, adeo, vt, ſi inueniatur in adulto magna lata et perfecta, tum certe neque orificium venae cauae ſini-

Laceratio valuule EVST. et Imminutio eiusdem.

ſiniſtrum clauſum ſit. Quamuis enim ingenuus Vir, viſis DVVERNEII praeparatis, ipſe hanc ſuam opinionem poſt haec refutaſſet; tamen in priori ſuo potius quam in poſteriori iudicio recte eum ſenſiſſe exiſtimo. Vnicum tantummodo momentum iis, quae ſagaciſſimus Anatomicus dixerat, addiderim. Nempe, ſi valde imminuta in adulto valuula non fuerit, et orificium ſiniſtrum venae cauae tamen aperturam nullam habeat, vt lacerata tum et reticulata eo magis haec valuula fuerit, vel alio modo ita diſpoſita, vt ſanguini vrgenti minus reſiſtat, eoque facilius eius vim eludat, quemadmodum eludere reticulatam, facile intelligitur. Vt vnum ergo ex his obtinere debeat in corporibus adultis; ſic enim meae me obſeruationes docuerunt: Vel parua, anguſta et breuis, imparque reſiſtendi irruenti ſanguini erit valuula EVSTACHII; vel ſi latior et maior, diſruptam eam ſaltem et laceratam, vel denique alio modo, quo minus vim ſanguinis ſuſtineat, diſpoſitam; at, ſi nihil eorum, notabilem inter arcum et valuulam ſinus ſiniſtri aperturam relictam eſſe oportet. Vtvt autem haec ſunt; vt nimis a noſtro ſcopo aliena, quamuis ego de rei veritate ſatis perſuaſus ſum, tamen relinquo, et redeo ad primariam illam orificiorum venae cauae inferioris mutationem, qua, quod de capacitate ſua ſiniſtro orificio auſertur, dextro additur.

Venae cauae, orificiorumque eius ſtatus in embryone.

§. 18. Vti in adulto homine eo tandem vsque orificium dextrum auctum, ſiniſtrum imminutum vel

vel deletum, vidimus eſſe, vt illud totum venae cauae inferioris, vt trunci, lumen abſorbeat, hoc, ſiue deletum ſiue apertum adhuc, de venae tamen cauae lumine nihil quidquam participet, et arcus in eodem cum pariete venae ſiniſtro plano exiſtat; cum in infante recens nato dextrum vnam modo tertiam partem huius luminis venae cauae, et ſiniſtrum duas partes tertias habeat; ita contra in embryone, circiter trimeſtri, ſtatus eſt, ſtatui, qui in adulto eſt, e diametro oppoſitus. Arcus enim, cum valuula EVSTACHII et cum pariete dextro venae cauae prorſus in eodem plano conſtitutus, orificium dextrum, quod minimum inter arcum et valuulam EVSTACHII continetur, penitus laterale efficit, quod axin ſuum recta transuerſim in ſinum dextrum directum habeat; cum contra orificium ſiniſtrum maximum hoc tempore ſit, et, horizontaliter poſitum, omne omnino venae cauae lumen abſorbeat, plenaque fauce in ſinum ſiniſtrum hiet.

§. 19. Quod enim PERILLVSTRIS L. B. DE HALLER tam pulchre et tanta cum ſagacitate diuinauit, id ipſum in corculo embryonis, tres pollices cum dimidio longi, microſcopii beneficio vidi, et ſollicite vbertimque perquiſiui, nempe venae cauae orificium ſiniſtrum, vel vt vulgo vocatur, foramen ouale, ſine vlla omnino valuula eſſe. Magnus ille Vir viderat in foetubus variae aetatis, valuulam multo, quam in maturo ſolet, minorem eſſe, et non attingere arcum, quem in foetu maturo multum ſuperat. Indeque, vt et ex analogia pulli in ouo,

Breuis orificiorum venae cauae inferioris, vt ſe habeant in embryone trimeſtri, deſcriptio.

ouo, recte ſuſpicatus eſt, fore aliquot tempus, vbi nulla omnino valuula exiſteret. (Elem. Phyſiol. Tom. VIII. pag. 375 et 376.) Aetatem embryonis mei determinare non poſſum, niſi, vt duobus menſibus maiorem, tribus forte paulo minorem, aeſtimem. Longitudine autem erat accuratius menſuratus trium pollicum et quatuor linearum. Pinxi ipſe huius embryonis, imprimis corculi, microſcopio viſi, icones plurimas, quas conſeruo, donec, idoneo aliquando ſculptore vſus, publici iuris eas facere poſſim. Orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris magnus in hoc corculo hiatus erat, et exacte aequalis lumini venae cauae ipſi. Craſſo illud limbo circumdabatur ex parte poſteriori ſiniſteriori, qui in parte anteriori et dexteriori in crura arcus et in arcum ipſum continuabatur. Hic limbus baſis eſt, ex qua futura valuula ſinus ſiniſtri enaſcitur. Sed eſt quoque idem hic limbus ipſa illa ora ſuprema venae cauae inferioris, de qua toties in ſuperioribus dixi, et cui valuula ſinus ſiniſtri in foetu maturo baſi ſua inſidet. Aequalis autem et glaberrimus erat limbus iſte, vt nullum in eo veſtigium valuulae tenuis ipſius vllius microſcopii vi detegere potuerim. (Sed hic credo, contra inuiſibilitatem partium vt me defendam, haud opus fore.) Denique totum orificium recta hiabat in ſinum ſiniſtrum; vti et vena caua inferior exterius reſpectu ſinuum ita poſita erat, vt vni ſoli ſiniſtro ſinui reſponderet, nullaque, ne minima quidem, ſui parte in latus dextri ſinus vergeret. Omnino ergo vena caua inferior hac vitae periodo in ſinum ſiniſtrum inſeritur

ritur, et cum dextro ſinu nonniſi *laterali* ſuo orificio dextro, quod axin transuerſum habet, quodque inter valuulam EVSTACHII et arcum continetur, communicat. Valuula EVSTACHII denique ſitu non modo, vt dixi, ſed et ipſa figura maxime differebat a foetus maturi infantisue recens nati et adulti valuula. Oblonga enim erat eo modo, vt longitudo eius ſit inter marginem liberum concauum et baſin ſeu fundum, vtque haec longitudo plus quam duplo maior ſit latitudine, ſeu ſpatio, quod inter marginis liberi vnam et alteram extremitatem intercedit. Sic margo ei conuexus nullus, cuius loco autem duo latera, quibus partibus vicinis adharebat, et fundus obtuſus, quo ſimiliter adhaerebat. Sed margo liber paruus, et nulla, quae dicere poſſes, cornua, ſeu valuulae extremitates.

§. 20. Ex his igitur, quae de vario venae cauae inferioris orificiorumque eius ſtatu ſub variis vitae periodis dixi, apparet, venam cauam inferiorem omnino in primo principio, et ad tertium circiter menſem vsque, ſoli ſinui ſiniſtro inſertam eſſe; vt ſolo laterali orificio cum dextro ſinu communicet, et paucas forte guttulas tantum ſanguinis ſui ope dextri huius orificii ſinui dextro cedat; longe maximam vero et modo non omnem eius portionem in ſinum ſiniſtrum effundat. Inde poſt haec paulatim dextro ſinui reſpondere, in eumque inſertam eſſe incipere, adeo, vt, quo tempore foetus in lucem proditurus eſt, tertia iam ſui parte dextro,

Vena caua inferior primo principio ſoli ſiniſtro ſinui inſeritur, inde poſt tertium menſem ſucceſſiue ad dextrum ſinum transferri incipit.

duabus tertiis ſiniſtro adhuc reſpondeat, et tertiam igitur ſui ſanguinis partem dextro, reliquam portionem ſiniſtro ſinui tradat; et in adulto homine tandem, tota ſoli dextro ſinui inſerta, omnem huic ſuum ſanguinem relinquat. Eundem ergo plane fieri effectum, acſi vena caua inferior, durante vita hominis, ex ſinu ſiniſtro, cui inſeritur, in dextrum transponeretur. Quod, qua ratione fiat, facile intelligitur. Eo enim tempore, quo valuula ſinus ſiniſtri ex limbo orificii ſiniſtri, quem §. 19. dixi, enaſcitur, quod poſt tertium embryonis menſem fieri iudico, hoc orificium anguſtari quoque per ipſam valuulam incipit. Valuula enim ex limbo, ceu baſi ſua, oblique verſus arcum adſcendit, adeoque, orificium magis magisque tegendo, eius aperturam minorem efficit. Inde ergo maior ſanguinis portio per dextrum orificium ire cogitur, orificiumque hoc dextrum dilatat, et parietem dextrum venae valuulamque EVSTACHII verſus dextrum ſinum extendit. Quando vero valuula ſinus ſiniſtri eo vsque increvit, vt arcum et ſeptum ſinuum ſupra arcum non modo attingat, ſed arripiat quoque, eique accreſcat, quod in infante recens nato fieri notum eſt; tum valuula, orificium ſiniſtrum plane occludendo, vnumque cum arcu parietem conſtituendo, efficit, vt ſanguis nunc omnis inter arcum et valuulam EVSTACHII tranſire, valuulamque EVSTACHII cum pariete venae dextro dextrorſum magis, arcum vero cum ſepto ſinuum ſiniſtrorſum ſimul diſpellere cogatur, adeo, vt ſeptum ſinuum in idem cum pariete

ſiniſtro venae planum redigatur, vnumque cum eodem verticalem parietem conſtituat. Quo ipſo ergo tota vena caua inferior in dextrum ſinum transponitur.

§. 21. Denique valuulam quoque EVSTACHII ex iisdem et imprimis illis obſeruationibus, quas §. 19. retuli, paulo plenius cognoſcimus. Ea non in infante recens nato, multo minus in adulto, ſed in embryone trimeſtri, ſummum ſuae perfectionis gradum attigiſſe putari debet. Hac enim vitae periodo proportione reliquarum partium maiori magnitudine gaudet, quam vllo poſt haec alio tempore, et figuram ſingularem oblongam habet, quam §. 19. deſcripſi. Ab hoc tempore continuo imminui, imprimis a fundo ſuo verſus marginem liberum breuior fieri, inſimulque figuram ſuam mutare incipit, quae in foetu maturo ſemilunaris fere iam eſt, modo vt latior adhuc ſit a margine conuexo ad concauum; cum in adulto multo proportione anguſtior eſſe, et ſaepe merum filamentum quaſi ſemicirculare referre ſoleat. Scilicet, dum circa tertium, quem dixi, embryonis menſem abſolutum ex margine orificii venae cauae ſiniſtri, qui hactenus liber fuit, valuula huius orificii enaſcitur, quae omni reſpectu valuulae EVSTACHII contraria eſt, eo ipſo, quod haec valuula orificium ſuum anguſtare, ſanguinemque ex vena caua adſcendentem magis magisque verſus dextrum orificium et valuulam EVSTACHII compellere incipiat; hoc orificium dextrum quoque dilatare, valuulamque EVSTACHII repri-

De Valuula EVSTACHII annotatio.

reprimere, in ſpecie marginem eius liberum verſus fundum vrgere, adeoque et imminuere, deſtruereque, et figuram eius antiquam oblongam in ſemilunarem paulatim mutare, incipit. Vnde ergo intelligis, et qui valuulam ſinus ſiniſtri valuulae EVSTACHII contrariam eſſe dixerim, et cur merito tempus ſummae perfectionis valuulae EVSTACHII in tertium embryonis menſem abſolutum, quo nempe valuula ſinus ſiniſtri ex ſuo orificio enaſcitur, poni debeat.

Venae cavae inferioris vitulinae deſcriptio. Tab. VIII.

§. 22. Vitulinum cor conſulere adhuc ſupereſt. In re ipſa hoc cum humano prorſus conuenit. Vena caua inferior, multo hic longior, praeparatuque inde et exploratu facilior, ſimiliter reſpectu ſinuum adeo poſita eſt, (vid. fig. *6.*) vt externe vtrique aeque, vel, vt in aliis vidi, et nunc coram habeo, ſoli ſiniſtro ſinui reſpondeat, a dextroque omnino remota ſit, interne vero arcum, ſiue imum ſepti marginem, offendat, quo lumen venae cauae in duo orificia diuidatur, quorum altero in dextrum, altero in ſiniſtrum ſinum inſeratur. Vt foramen ergo ouale hic non magis quam in homine quidquam aliud ſit, quam orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris, quo in ſinum ſiniſtrum aperitur, et quod ſimili valuula tubuloſa ornatum ſit.

Diuerſitates inter vitulinam et humanam venam.

§. 23. Diuerſitates nihilominus maximi momenti ſunt, atque in his conſiſtunt. Orificium dextrum oblongum quidem et transuerſim poſitum, at non ouale, ſed angulatum eſt, et figuram exprimit, aper-

aperturae palpebrarum oculi fere ſimilem (*n.o p. q.*); proinde duobus angulis, quorum alter poſterior dexteriorque (*p.*), alter anterior et ſiniſterior ſimul eſt (*n.*), orisque totidem, altera ſuperiori (*o.*), altera inferiori (*q.*), gaudet. At ora inferior non valuula EVSTACHII, quae nulla in vitulo datur, ſed limbo craſſo efficitur, carnoſa ſubſtantia facto, quo ſimili modo, ac valuula EVSTACHII in homine, paries anterior dexteriorque venae cauae inferioris ſuperius terminatur. Denique, quod primarium eſt, vti ora inferior dextri huius orificii in vitulo aeque ac homine diuerſa eſt ab ora inferiori orificii ſiniſtri, ita et ipſa ora ſuperior in vitulo alia ac diuerſa dextro, aliaque et diuerſa ſiniſtro orificio datur, adeo, vt plane in omnibus ſuis partibus aliud orificium ſit, quod in dextro, et aliud, quod in ſiniſtro ſinu patet. Nimirum ora haec ſuperior orificii dextri proprius in vitulo eminens limbus eſt, (*o.*) ſimiliter vt inferior, carnea ſubſtantia factus, ſub quo et retro quem, profundius in vena caua, ille denique arcus in conſpectum venit, quo dixi lumen venae cauae ſuperius in duas partes diuidi, (*x. x.*) et qui in hoc loco vna cum limbo, qui baſin valuulae ſinus ſiniſtri cingit, perfectum orificium rotundum poſterius, ſiue ſiniſtrum efficit, (*y.*), plane a dextro angulato diuerſum, et intra hoc, modo in plano, poſterius ſito, ſimul cum illo, ex ſinu dextro aperto obſeruabile (fig. 5.). Vt breuibus tandem verbis me expediam; orificium, quod in dextro ſinu patet (*n. o p. q.*), non venae cauae inferioris ipſius, ſed

Duo venae cauae inferioris orificia in vitulo veri eius rami ſunt. Tab. VIII. Fig. 5.

ſed potius rami orificium eſt, quem vena caua inferior edit, et quo medio haec vena ſe in ſinum dextrum effundit. Et ſimili fere modo cum res ſe habeat cum orificio, ſiniſtro, quod aeque ac dextrum, haud ſimplex vt in homine, orificium, ſed verus, quamuis breuior, ramus eſt; vt paulo poſt dicam; vena caua inferior in vitulo ſuperius omninò in duos, licet breues, tamen veros, ramos diuiditur; quorum altero illa in dextrum, altero in ſiniſtrum ſinum inſeritur, et quorum alter igitur, vti in homine orificia ſe habent, dexter, alter ſiniſter eſt. (Videſis fig. 6. vbi vena caua *v.* in *w.* lateſcit, et diuiditur in ramum ſiniſtrum *x. y.* et dextrum *z.*).

Explicatio anatomica phaenomenorum in vena caua vitulina apparentium; et arcus, etiam in homine, interpretatio.

§. 24. Orificium ergo angulatum, quod immediate in ſinum dextrum hiat (fig. 5. *n. o. p. q.*), rami illius dextri orificium extremum eſt, quo ramus iſte finitur et in ſinum aperitur. Illud autem orificium rotundum (*x. x. y.*), quod intra hoc ex aperto ſinu dextro, atque in ipſa cauitate venae cauae, conſpicitur, quod ex arcu et limbo, qui baſin valuulae ſinus ſiniſtri cingit, componitur, non idem, aut ſimile, orificium extremum eſt rami ſiniſtri, ſed illud eius lumen, quo ramus ex trunco ſuo oritur, quodque a baſi rami efficitur, qua iſte partim trunco inſidet, partim cum vicino ſuo dextro ramo compoſitus eſt. Orificium extremum vero huius ſiniſtri rami ſiue apertura nonniſi quoad minimam partem ex aperto dextro ſinu videri poteſt (fig. 5. *z.*); inte-

integrum autem apparet in aperto ſinu ſiniſtro, (fig. 6. *t.* fig. 7. *q. m. r. s. i.*) et efficitur proprie ab ipſa extrema ora valuulae tubuloſae ſinus ſiniſtri, quae huic aperturae inſidet. Sed lumen ſimile rami dextri venae cauae inferioris, quod nempe a baſi huius rami, qua trunco ſuo partim, venae cauae inferiori, inſidet, partimque cum altero vicino ſuo ſiniſtro ramo cohaeret, efficitur, ſimiliter apparet, ſi vena caua inferior in pariete ſuo ſiniſtro inciditur, eademque ſectione ſimul valuula ſinus ſiniſtri diſſecatur, quemadmodum (fig. 4.) has partes ex infante propoſui. Tum enim idem arcus, qui ex dextro latere viſus in baſin rami ſiniſtri continuat, qua parte hic trunco inſidet, atque hoc modo lumen rami ſiniſtri efficit, ſimili modo in baſin continuat rami dextri, eiusque lumen efficit; quemadmodum haec communis proprietas cuiusuis trunci eſt, in duos, quam minime diuergentes, et fere aequales, ramos diuiſi. Denique etiam, quid arcus ille, iſthmus VIEVSSENII, in homine non minus quam in vitulo ſit, ex vitulina hac ſtructura clarius intelligitur. Vti enim in quolibet trunco, in duos ramos, parum divergentes, diuiſo, eo loco, vbi rami inter ſe cohaerent, angulus efficitur, qui in interna cauitate canalis ſpeciem arcus refert, lumini trunci e diametro oppoſiti, et quo hoc lumen trunci in duo lumina, quae nunc lumina ramorum ſunt, diuiditur, quemque arcum *angulum coniunctionis duorum ramorum* appellabo; ita patet, hunc arcum, iſthmum VIEVSSENII, (fig. 1. 10. fig. 3. *x.* fig. 4. *y.* fig. 5. *x. x.*) nihil aliud eſſe, quam

 ipſum

ipſum illum angulum coniunctionis duorum ramorum, in quos vena caua inferior diuiditur.

Duo venae cauae inferioris rami in vitulo etiam externe apparent. Tab VIII. Fig. 6.

§. 25. Quamuis haec diuiſio venae cauae inferioris in duos ramos etiam in vitulo non adeo comparata ſit, vt cuiuis, obiter has partes intuenti, ilico appareat, et ſponte quaſi ſe oculis offerat; non minus tamen vera ideo eſt, nec minus manifeſta, dummodo cum attentione conſideretur. Non ſolum enim interne hi rami ſe ſatis manifeſtant, ſed externe quoque, dum a parte baſis cordis et in ſuperficie poſteriori vena caua et ſinus conſpiciuntur; euidenter apparet, venam, dum verſus vtrumque ſinum, magis tamen ſemper verſus ſiniſtrum, vel verſus hunc ſolum adſcendit, (fig. 6. *v.*) in parte ſuperiori primo latiorem fieri (*w*), et denique ſe ſatis diſtincte in hoc pariete poſteriori, cum anterior breuior baſi cordis applicatur, diuidere in duos ramos, quorum dexter longior (*z.*) oblique dextrorſum ad ſinum huius lateris adſcendit, eoque ipſum hoc ſpatium, quo truncum venae a dextro ſinu remotum eſſe dixi, emetitur, quod ni fieret, facile vides, venae cauae inferioris truncum aut non remotum a plano verticali ſinus dextri, aut non inſertum huic ſinui eſſe poſſe. Vt ipſe hic ſitus venae cauae reſpectu ſinuum argumentum ſit ramorum, in quos neceſſe eſt, vt vena caua diuidatur. Siniſter ramus breuior, ſed non minus diſtinctus eſt, (*x. y.*) qui oblique ſiniſtrorſum in ſinum ſiniſtrum ſe cito immergit et euaneſcit.

§. 26.

§. 26. Iam certum eſt, in humano foetu vel in infante aut ramos plane nullos, ſed ſimplicia tantum orificia eſſe, quibus vena caua in ſinus inſeritur, aut, ſi ramos vocare volueris, breuiſſimos tamen et vix niſi ex analogia tales vocandos, niſi ex valuulis ipſis EVSTACHII et ſinus ſiniſtri, quae omnino notabilem longitudinem habent, compoſitos putaueris. Interim ſtructura tamen cordis vitulini, cum humana comparata, penitius nobis naturam horum orificiorum ſingularumque partium huc pertinentium explicat atque demonſtrat, quam quidem ſola humanae ſtructurae conſideratio efficere potuiſſet. Si ſimplicia tantum orificia ſunt, videmus tamen, cuius generis haec orificia ſint. Videmus; ſpeciem ſaltem ramorum eſſe, et nonniſi ideo, quod breues nimium ſint, veros non ramos dicendos. Similiter arcus ille Iſthmus VIEVSSENII ex comparatione ſtructurae vitulinae non minus in homine quam in vitulo angulus coniunctionis eſſe intelligitur duorum ramorum, in quos vena caua inferior diuiditur; quamuis hi rami breuiſſimi et vix vlli ſint. Amputa de trunco bifido ramum vtrumque, vt nihil praeter baſes ramorum, quibus inſederant, ſuperſit; habebis ſemiannulum, lumini trunci impoſitum, idemque diuidentem in duo lumina ſeu orificia, qui ipſe angulus coniunctionis eſt horum ramorum abſciſſorum, licet rami ipſi non exiſtant. Atque haec ipſa imago eſt ſtructurae venae cauae inferioris in foetu humano. Denique *foramen ouale* noſtrum ipſum, quod (§. 12.) orificium ſiniſtrum

Structura foetus humani vitulina illuſtratur

venae cauae inferioris eſſe recte eatenus definiui, quo haec in ſinum ſiniſtrum infereretur, ductu et indicatu vitulinae ſtructurae accuratius nunc determinari, et paulo completius definiri poterit. Quando enim ramus, non ſimplex orificium, eſt, quo vena caua inferior in ſinum ſiniſtrum inſeritur; non ramus ipſe, non eius orificium extremum, ſeu apertura, foramen noſtrum ouale erit, ſed lumen huius rami, quo cum trunco coniungitur, et quod baſi rami efficitur, quodque vitulina ſtructura ab orificio extremo et a ramo ipſo diſtinguere docuit. Hoc enim lumen proprie illud eſt, quod et foramen ouale dictum fuit, et, vt ſupra iam monui, omnium facillime, et ſponte quaſi, in conſpectum venit.

Parietes rami dextri in vitulo inaequales. Tab. VIII. Fig. 5.

§. 27. Omitto, quae forte alia in vena caua vituli notatu digna eſſe poſſent, quae nihil ad illuſtrandam humanam conferunt. Pauca modo, quae ad noſtrum ſcopum pertinere videntur, adiicio. Planum, in quo poſitum eſt orificium extremum angulatum rami dextri (*n. o. p. q.*) non parallelum eſt plano luminis, neque perpendiculare ad axin rami; ſed oblique poſitum eſt reſpectu luminis et axeos, adeo, vt orificium extremum rami maius ſit lumine eiusdem, et ramus ipſe parietes habeat, longitudine inaequales. Scilicet poſterior huius dextri rami paries (*w.*) longiſſimus eſt inter omnes, externeque pariter (fig. 6. *z.* 1.) ac interne (*w.*) egregie diſtinguitur. Et interne quidem illud ſpatium hunc parietem efficit, quod inter crus poſterius

rius arcus (*x.*) et angulum poſteriorem ſeu dextrum (*p.*) continetur (*w.*) Paulo breuior inferior eſt, qui oblique dextrorſum ex pariete dextro trunci vsque ad oram inferiorem orificii extremi (*q.*) adſcendit. Anterior autem et ſuperior breuiſſimi ſunt.

Ramus ſiniſter in vitulo et valvula ſinus ſiniſtri. Tab. VIII. Fig. 6.

§. 28. Ramus ſiniſter venae cauae inferioris, quatenus externe apparet, dextro breuior eſt (fig. 6. *x. y.*). Non minor autem eius pars in carne ſinus ſiniſtri haeret, et denique valuula ſinus ſiniſtri ipſa, tubum dum refert, orificio extremo rami ſiniſtri inſidentem, adhuc notabilem partem huic canali addit, adeo, vt, ſi ſecundum longitudinem ramus ſiniſter diſſecetur, vt eius longitudinem ex facie interna aeſtimes; etiamſi valuulam non computes; tamen aliquot lineae longitudinis ramo ipſi propriae ſint; ſi valuulam comprehendas, ſex lineas facile ſuperet. Valuula ſinus ſiniſtri in vitulis, vt vulgo haberi poſſunt, ſex ſeptimanas plerumque excedentibus, valde iam conſtricta (*m. m. p. s.*), canalis anguſtus, et orificium eius extremum (*t.*) vel clauſum vel minimum eſſe ſolet. Valuula autem craſſior eo, carnoſa magis et rigidior eſt. In vitulo tamen, qui nondum reſpirauerat, in ipſo illo monſtroſo, cuius deſcriptionem Tomo horum Commentariorum XVII. inſerui, in cuius corde tamen, ſi magnitudinem exceperis, nihil praeter naturam erat, hanc valuulam reperi tenuem, pellucidam, magnam et pulcherrimam, quae quippe tubum referret, pollicem fere longum, plus quam dimidium latum, eumque Fig. 7.

integrum, nec niſi filamentis ſinuum ſepto adhaerentem, quod ergo nihil quidquam ad tubum efficiendum vel complendum conferret, caeterum mobilem, in aqua libere fluitantem, et in extrema ora pulcherrime reticulatam. (Vid. fig. 7.).

De valuula ſinus ſiniſtri in infante recens nato Deſcriptio. Tab. VII. Fig. 2.

§. 29. Quamuis in hac tractatione, quam, terminis vſus receptis, obſeruationes de foramine ouali inſcripſi, et quae rectius dici debuiſſet *hiſtoria venae cauae inferioris thoracicae*, cuius nempe et adſcenſum et diuiſionem in foetu in duo orificia, vel ramos, quibus ſe inſerat in ſinum vtrumque, et ſtructuram orificiorum ipſorum, et variam denique varia aetate conditionem, ſecundum ordinem deſcripſi, nihil, niſi quod ad incognitam hanc venae cauae inferioris proprietatem pertineret, dictu mihi propoſueram; non poſſum tamen non quaedam de valvula ſinus ſiniſtri annotare, quae haud ſatis perſpecta et cognita mihi eſſe videtur, et quam nimis pulchram et perfectam in eo, quem deſcripſi, infante, qui vix reſpiraſſe videbatur, reperi. Haec valuula ergo omnino, vt ſaepius monui, in humano non minus quam in bouino foetu, tubus, non ſimplex membrana, eſt, vt vulgo repraeſentatur, ea tamen conditione, vt altero ſuo pariete hic tubus ſepto ſinuum ſuper arcum (fig. 3. *w.*) adhaereat, proinde non penitus libèr ſit, vt in foetu bouino. Baſis tubi (*o. p. q. r.*), qua orificio ſiniſtro venae cauae (iisdem litt. denotato vel fig. 3. *h. i. k.*) in ſinu ſiniſtro inſidet, vt hoc orificium ipſum, obliqua eſt, nec parallela orificio extremo ſeu aperturae. (5. 6. 7. 8. 9. 10) Hinc parietes inae-

inaequales. Anterior, qui baſi ſua arcui, ſeu orae orificii ſiniſtri anteriori inſidet, et quo toto tubus ſepto ſuper arcum adhaeret, (fig. 3. *t. v w.*) breviſſimus eſt. Poſterior (*o. p. q. s. t. v.*), qui ſua baſi ſupremo parieti ſiniſtro et poſteriori venae cauae, ſeu poſteriori inferiorique orae orificii ſiniſtri inſidet, et totus liber eſt, longiſſimus eſt. Dexterior ſiue ſuperior (*s r. t.*), et ſiniſterior ſiue inferior (*o. v.*), ſibi fere aequales et liberi ſunt. . Figura totius tubi praeterea curuata eſt, et qui ex baſi ſua obliqua adſcendere incipit, orificio ſuo extremo (5. 6. 7. 9. 10.) ſiniſtrorſum inclinatus reſpicit. Suprema ora parietis ſiniſtri et poſterioris venae cauae, cui baſi ſua valuula inſidet, et ex qua haec continuatur, etiamſi valuula integra ſit, ob craſſitiem opacitatemque, qua, vt vena tota, etiam eius ſuprema ora gaudet, et ualuulae contra tenuitatem pelluciditatemque in ſinu ſiniſtro aperto, dum in aqua fluitat, egregie percipitur et diſtinguitur. (Saepius cit. *o. p. q r.* fig. 3. *h i. k.*). Haec venae cauae ſuprema ora in ſinu ſiniſtro non modo non cognita, ſed etiam, quantum ſcio, nunquam obſeruata, attamen ad cognoſcendam harum partium fabricam et naturam inſigniter vtilis, quin neceſſaria eſt. Ex deſcripta valuulae figura intelligis, nulla ei, vt ſemilunaribus, a quibus toto coelo differt, cornicula eſſe; ſed ſi parietem, quo adhaeret, a parte libera et mobili tubi diſtinxeris; latera notare poſſis, ſeu margines, quibus vtrinque pars affixa a libera diſtinguitur (*w.*), ſeu margines partis liberae, quorum

rum alter dexterior ſuperiorque, alter inferior et ſiniſterior eſt. Ora extrema vero tubi, vbi libera eſſe deſinit (7. 10.), extremitates aliquas magis productas, ſeu ſpeciem aliquam corniculorum efficit (*w.* quod ſuperius, ſed lamella potius eſt, et *x. y.* quod inferius eſt); de quibus tamen notandum, neque vera, quoad figuram, cornicula, neque, ſiue extremitates vocaueris, valuulae, ſed ſolius orae extremae vel extremitates vel cornicula eſſe.

Pertinet ad valuulas annulares ſ. tubuloſas.

§. 30. Dixi in ſuperioribus, maximam valvulae ſinus ſiniſtri cum venoſis valuulis cordis ſimilitudinem eſſe. Haec mihi argumenta ſunt: 1) Valvula ſinus ſiniſtri, vt venoſae cordis, tubuloſa, vel, quod idem, annularis eſt, modo vt altero ſuo pariete proximo ſinus parieti adhaereat, cum in ventriculis cordis valuulae circumquaque liberae ſint. 2) Simili modo *toti* orificio venae cauae, quo haec in ſinum ſiniſtrum hiat, baſi ſua inſidet valuula, ſimilique modo orificium ſuum ſui continuatione inveſtit, ac valuulae cordis orificiis venoſis, (quae auricularum quoque orificia ſunt, quibus in ventriculos hiant) inſident, ac ſui continuatione orificia venoſa inueſtiunt; et ſimili denique modo et ſinus valuula et cordis valuulae, illa in ſinus, hae in ventriculorum cauitates, exporrectae tenentur. 3) Denique functio quoque ſinus et cordis valuulis eadem et eodem modo peragenda eſt. Dum enim ſinus contractus ſanguinem ſuum comprimit, hic valuulam, plurima parte liberam largam et fluitantem, in orificium venae cauae reprimit, et complicat,

coque

eoque modo orificium *obturat*. Idem valuulis venoſis in contractione ventriculorum accidere notum eſt; cum contra ſemilunares a ſanguine regreſſuro non complicentur ſed expandantur, luminaque ſuorum vaſorum non obturent ſed occludant. 4) His adde, quod productiones orae extremae valuulae ſpeciem filamentorum referant, quibus haec valuulae ora, vt in venoſis cordis, parieti ſinus alligatur, ne intra venae cauitatem retrolabi poſſit. In vitulo autem plura eiusmodi filamenta, et libera ſunt, quibus ora valuulae parieti ſinus adnectitur (fig. 6. *p. q. r. s.*). Quodſi ergo valuulas vaſorum ſanguineorum duplicis generis, ſeminulares et annulares, poſueris; harum, quod datur, vnico pari tertium exemplar addere licet, contra tot ſemilunares, quae imprimis venis adeo frequentes datae ſunt.

§. 31. Sagaciſſimus WINSLOWVS, quod ſibi mouebat dubium de hac valuula, cum tanquam ſepti aut foraminis oualis valuulam eam conſideraret, aperiri nempe, contra leges omnium valuularum, viam ſanguini, dum valuula a ſepti, cuius valuula eſſet, pariete remoueretur, et praecludi contra viam, dum eidem ſepti parieti applicaretur; cum reliquae valuulae potius remotae a parietibus ſuorum vaſorum viam occluderent, et applicatae iisdem aperirent, quod dubium effecit, vt munus valuulae huic membranae plane abnegaret; id vnico verbo ſoluas, quo dicas, non foraminis oualis vel ſepti, ſed ſinus ſiniſtri valuulam eſſe. Ergo dum contra ſinus parie- *Dubium WINSLOWI contra hanc valvulam ſolvitur.*

 tes

tes pellitur, aperit viam; praecludit, dum ab iisdem parietibus remouetur; plane vt venoſae cordis valuulae, contra parietes ventriculi pulſae oſtium aperiunt, ab iisdem remotae claudunt.

Cur non dudum error de foramine ovali detectus ſit. Cauſa veriſimilis.

§. 32. Si nunc vera ſunt, mi Lector, quae de vena caua inferiori, de eius orificiis, imprimis de ſiniſtro et de imaginario foramine ouali dixi; miraberis procul dubio, qui tamdiu veritas latere potuerit. Sed idem, ni fallor, paene de omnibus, ſiue minoris ſiue maioris momenti, detectis mirari poteris. Primariam tamen cauſam eſſe arbitror methodum ſecandi, qua ad detegendum foramen ouale vſi ſunt, haud conuenientem, et cognitioni veritatis mire contrariam. Inciderunt ſinum dextrum ex parte dexteriori et poſteriori, ſectionemque continuarunt ſimul per venam cauuam inferiorem; (quae breuiſſima praeterea cum ſit, vix etiam in conſiderationem veniſſe videtur) adeo, vt hanc vna cum ſinu apertam habuerint. Neque fere, ſi vnicam, quam poſtea dicam, ſectionem exceperis, aliter ſinus ad detegendas has partes, quae in regione eius poſteriori exiſtunt, aperiri potuit. Si enim, ſiue in dexteriori, vel poſteriori, ſiue in anteriori hoc fiat parte, ſolus, ſine vena caua inferiori, ſinus aperitur, ſiue etiam ſimplici inciſione id fiat; ſiue reſecando partem auriculae dextrae; ſemper tamen orificia venae cauae et dictum foramen ouale et valuula EVSTACHII ipſa, nimis profunde ſita, ob vmbram, ob impedimentum parietum ſinus et auri-

auriculae, ob complicationemque partium obſeruandarum ipſarum nonniſi obſcure percipi, minime accurate obſeruari, nec manubus tractari, diſponi, examinari poterunt. Sola ſiccata corda facilius hac methodo ſecari, ſed ob alia incommoda minus vtiliter adhiberi poſſunt. Vbiprimum contra ſectionem in corde recenti aut molli produxeris plane per breuiſſimam, quae inferius reſtat, venam cauam; omnia ilico obſtacula euaneſcunt. Nam paries poſterior ſinus nunc vna cum venae pariete reflecti poteſt, quo totus ſinus dexter vna cum partibus contentis explanatur, et omnia manifeſta euadunt. Quid mirum ergo, ſi nemo, niſi in ſiccis praeparatis, aliter ſectionem inſtituit? Verum hac ipſa ſectione nunc primariae quoque earum partium, quas noſſe intereſt, deſtruuntur, et omnia adeo perturbantur, vt et, quae integrae conſeruantur, ipſae cognoſci non poſſint. Primo enim ilico orificium dextrum venae cauae inferioris, quo in dextrum ſinum aperitur, et quo ab hoc ſinu diſtinguitur, neceſſario quidem, deſtruitur. Deinde vna cum orificio etiam valuula EVSTACHII diſſecatur, et cum parietibus venae extra ſuum ſitum reflectitur. Denique, dum orificium dextrum, quo ſolo cauitas ſinus dextri a cauitate venae cauae inferioris diſtingui poteſt, deſtruitur; in pariete poſteriori venae cauae inferioris, quae aequali ſuperficie, maxime in adultis, in ſinus parietem continuat, quid ad venam, quid ad ſinum pertineat, nullo nunc porro ſigno diſtingui poteſt. Quid mirum ergo, ſi, quem

ſemel errorem receptum ab antiquiſſimis temporibus, et a GALENO vsque tenuimus, nemo correxit? ſi nemo, cum neque in ſinus neque in venae, quem manifeſto diſtingueret, pariete foramen iſtuc ouale ſitum eſſe cognouit, non facile, quod dictum doctumque et ſcriptum erat, in ſepto ſinuum eſſe foramen ouale, conceſſit? et ſi, dum *orificium ſiniſtrum* venae cauae inferioris in pariete eius ſiniſtro apparebat, nemo non facile, illud foramen in ſinus pariete eſſe, credidit, vbi tale foramen quaeſiuerat? Atque id eo magis, quo minus vena caua breuiſſima, et ſaepe deſtructa iam, dum cor ex cadauere exſcinditur, in conſiderationem venire, attentionemque Anatomici mouere ſolet. Sed ea, qua dixi, methodo ſinum dextrum, niſi omnino ſemper, tamen maximam partem apertum eſſe, vel ſolis ex iconibus, quas Celeberrimi Viri ſuis, caeterum egregiis, deſcriptionibus addiderunt, cuilibet intuenti apparet; quas tamen citare abſtineo, ne quid forte contemnere velle videar *Eorum, erga Quos, ſiue mortuos, ſiue viuos, ſumma veneratione plenus ſum.*

Methodus aperiendi ſinum dextrum.

§. 33. Neceſſe igitur eſt, vt ſinus aperiatur ſalua et integra vena caua inferiori; ergo in parte anteriori, quae inter auriculam et baſin aortae continetur. Atque vt commode hoc fieri poſſit, incidendus eſt paries anterior ventriculi dextri cordis vsque in extremum ventriculi apicem. Inde ſectio ſurſum continuanda per orificium ventriculi venoſum et, vt dixi, inter auriculam et aortam per totum

totum porro ſinus parietem anteriorem vsque in venam cauuam ſuperiorem. Tum paries ventriculi dextri anterior vna cum pariete anteriori ſinus et cum auricula dextrorſum reflectitur. Quo facto, tota ſinus cauitas vna cum orificio dextro venae cauae inferioris et valuula EVSTACHII integris in conſpectum venit; ſimulque intra cauitatem venae, in pariete eius ſiniſtro apparet orificium ſiniſtrum, ſiue apertum, ſi foetus, ſiue cicatriſatum, ſi adulti cor fuerit, quod ſecaueris. Caeterum EVSTACHIO vſitatam fuiſſe hanc ſectionem ex eius Tabulis apparet.

DE
MOTV SANGVINIS IN FOETV.

§. 34. Ex hac ſtructura cognita vtrumque, et, qui verus motus ſanguinis in foetu ſit, intelligitur, et fieri minime poſſe, vt ſanguis, qui ſemel in ſinum dextrum intrauit, inde rurſus in ſiniſtrum tranſeat, vt hodie facile omnes communi ore affirmant. Vena caua inferior duobus orificiis, altero in ſinum dexttum, altero in ſiniſtrum aperitur; neque, quod ab orificio eius ſiniſtro diuerſum eſſet, foramen aliud vllum datur. Ergo ſanguis ex vena caua inferiori recta partim in dextrum ſinum per orificium eius dextrum, partim in ſiniſtrum adſcendit per orificium ſiniſtrum. Et inde porro, (nam ſane per haec eadem orificia iterum retrogredi ſanguis non poteſt!) ex ſinu dextro recta in ventriculum dextrum, ex ſiniſtro in ſiniſtrum progreditur. Ita paucis verbis B. L. vides rem planam et ſim-

Sanguis ex vena caua inferiori tranſit in ſinum vtrumque; inde recta in vtrumque ventriculum.

ſimplicem exhauſtam, de qua tantum olim diſputatum fuit, et quam hodie quoque tam miro et incredibili modo explicant. Neque tamen minus vſum inde reſultare pro foetu eundem, quem de foramine in ſepto ſperauerant, facile patet. Nam idem ipſe ſanguis, qui per foraman in ſepto a ventriculo dextro et a pulmonibus auerti putatur, per orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris in hac vena iam ab iisdem partibus, a ventriculo cordis dextro nempe et a pulmonibus, auertitur.

Neque poteſt ex dextro ſinu in ſiniſtrum tranſire.

§. 35. Sed non minus clarum etiam eſt, ſanguinem, qui ſemel in ſinum dextrum intrauit, ſiue ex vena caua ſuperiori, ſiue ex inferiori eo peruenerit, nullo modo inde rurſum per orificium venae cauae inferioris ſiniſtrum ſeu foramen ouale in ſinum ſiniſtrum venire poſſe. Neceſſe enim eſſet, vt ſuper valuulam EVSTACHII non modo, ſed etiam ſuper orificium dextrum venae cauae inferioris ſuperque huius venae lumen tranſiret, priusquam ſiniſtrum orificium attingere poſſet. Mirum ergo eſſet, ni potius in orificium dextrum ipſum, vel proprio pondere actus, et in venam cauam inferiorem elaberetur.

Idem aliis argumentis probatur.

§. 36. Finge autem, valuulam EVSTACHII ſatis latam eſſe, vt orificium dextrum venae cauae inferioris tegere, adeoque defendere poſſit, quo minus ſanguis e regione auriculae adueniens, in orificium hoc deſcendat. Finge, quod fieri nunquam poteſt, valuulam EVSTACHII orificium dextrum occludere

cludere poſſe, ſaluo orificio ſiniſtro, ad quod nullus, niſi per ipſum illud dextrum orificium ex auricula et ſinu dextro aditus pater; tamen nullo modo ſanguis ex ſinu dextro per hoc orificium in ſiniſtrum venire poteſt. Neceſſe enim eſt, vt effugiat per hoc orificium ſanguis ipſa auriculae et ſinus dextri vi pulſus; ergo tempore ſyſtolis. Sed eodem hoc tempore etiam ſinus ſiniſter in ſyſtole eſt, et ſanguine, quem comprimit, quemque expellere conatur, repletus. Nihil vltro ergo recipere poteſt. Omitto, quod eodem hoc temporis momento valuula ſinus ſiniſtri, ab vrgente ſanguine ſinus ſiniſtri ad ſeptum compulſa, orificium ſiniſtrum claudat, et aeque minus quidquam intrare ac exire ſinat. Nec quidquam huc facere vides, quod dicunt, ſinum dextrum maiorem eſſe ſiniſtro, adeoque vi vincere. Quando enim proprio ſuo ſanguine ſiniſter repletus eſt, nihil vltro recipere poteſt, ſiue maior ſiue minor fuerit dexter, qui ſanguinem ſuum in illum intrudere conatur. Omitto hic rurſum, quod vires ſinuum non ab eorum capacitate, ſed a robore fibrarum pendeant, quibus gaudent, et quae in dextro non validiores, quam in ſiniſtro ſunt.

§. 37. Sed id velim, hic ante omnia notes: non ideo, quod nullum foramen communicatorium detur inter vtrumque ſinum, quodque hoc putatum foramen orificium potius ſit venae cauae, inter venam hanc et ſinum ſiniſtrum, non inter ſinum ſiniſtrum et dextrum contentum; non ideo dico, fieri non poſſe, vt ſanguis ex dextro

Tranſitum ſanguinis ex vno in alterum ſinum impoſſibilem eſſe demonſtra-

tur; etiamſi foramen in ſepto ſupponitur.

dextro ſinu in ſiniſtrum vel ex ſiniſtro in dextrum tranſeat; ſed hoc omnino impoſſibile eſſe, etiamſi totum ſeptum nonniſi vnum magnum foramen eſſet. Nam, vt demonſtrationem generalem exhibeamus, vel ſyſtoles, vel diaſtoles tempore tranſitus ſanguinis ex vno in alterum ſinum fieri debebit. At neutrum horum fieri poteſt. Syſtole enim vterque ſinus proprio ſuo ſanguine plenus eſt, quem ipſum potius expellere conatur et expellit in patentes ventriculos cordis. Nihil ergo vltro alter ab altero hoc quidem tempore recipere poteſt, etiamſi aditus eſſent, quoscunque, quotcunque poſueris. Diaſtole autem, vel poſt ſyſtolen finitam, vterque ſinus ſanguine vacuus eſt, vel tamen non totam ſuam cauitatem repletam habet. Recipit ergo potius, quam vt expelleret, hoc quidem tempore, ſinus vterque, vndecunque aduenerit, ſanguinem omnem alienum. Non poteſt ergo eodem hoc tempore ſuum, quem non tangit, quem non vrget, expellere.

Idem aliis argumentis adhuc magis confirmatur.

§. 38. Conſidera porro, quod, quo tempore ſinus vterque ſanguinem ſuum expellere poſſit, ſiquidem locus, quorſum pelleret, vacuus exſtaret, nimirum tempore ſyſtoles ſinuum, orificia ventriculorum cordis venoſa, quae toto ſepto ſinuum circumferentia certe maiora ſunt, late pateant, ventriculosque cordis offerant magnos et vacuos, in quos ſanguis illaberetur, quando nulla vi externa ageretur, et videſis an fieri poſſit, nec ne? vt ſanguis ex vtrouis ſinu non in late patentem, qui ſibi reſpon-

reſpondet, et vacuum ventriculum cordis, ſed in alterum ſinum tranſeat, qui ipſe ſanguine iam plenus eſt, et ipſe hunc ſuum ſanguinem potius expellere conatur. Hoc ergo, hoc illud eſt tandem, mi Lector, quod non poſſum non reprehendere paululum Anatomicos et Phyſiologos, quod non viderint, quod adeo planum et adeo manifeſtum eſt.

Vti ex ſtructura partium motus ſanguinis, ita ex motu ſanguinis ſtructura partium quoque colligi poteſt.

§. 39. Vnum adhuc eſt, quod notari velim, quod ideam huius rei et clariorem et vtiliorem efficiet, cauſam nempe, cur fieri non poſſit, vt ex vno in alterum ſinum ſanguis tranſeat, breuibus verbis expreſſam. Ea, vt facile ex demonſtratione §. 37. vides, nulla alia eſt, quam ſimultanea vtriusque ſinus ſyſtole, ſimultaneaque rurſum eiusdem diaſtole, et vno verbo: Synchronus ſinuum motus. Hinc porro ſequitur: Quaecunque generatim vaſa pulſantia (ſe contrahentia alternatim et dilatantia, qualia ſunt ventriculi cordis, ſinus vterque cum auriculis, venae cauae et pulmonales) eodem tempore in ſyſtole et rurſum in diaſtole ſunt, eorum nullo modo poſſe vnum quidquam ſanguinis ſui expellere in alterum. Nam ſemper quoduis eorum, quamdiu in ſyſtole ſunt, proprio ſuo ſanguine plenum, nihil ex altero recipere poterit, quamdiu in diaſtole ſunt, locum adhuc vacuum in ſe habebit, alienumque potius ſanguinem recipiet, et nihil ergo in alterum expellere poterit. Quoduis ergo eorum in ſyſtole nihil de altero recipere, in diaſtole nihil in alterum expellere poterit. Si v. gr. ſeptum cordis perfora-

 tum

tum exiſteret, nequidquam ideo ſanguinis ex vno in alterum ventriculum tranſiret. *Et ſi igitur per orificium venae cauae inferioris, quod foramen ouale dicitur, ſanguis in ſinum ſiniſtrum venit; ex vena caua inferiori eum venire oportet*, quae, dum ille in ſyſtole eſt, diaſtolen ſubit, et ſyſtolen, dum ille in diaſtole eſt, *non ex vicino altero* ſynchrono *ſinu; et orificium ad venam, non ad ſeptum ſinuum, pertinere oportet; quemadmodum pura, nullis mixta ratiociniis, anatomia docuerat.*

Reditur ad hiſtoriam motus ſanguinis veri.

§. 40. Non ergo ex dextro in ſiniſtrum, vt hodie omnium, et plerorumque poſt magnum HARVAEVM ſemper opinio fuit; non ex ſiniſtro in dextrum, quod Celeberrimo MERYO ſuo placebat tempore; non denique ex vtroque in vtrumque ſinum, quam venerabilis WINSLOWVS propoſuit ſententiam, ſanguis tranſire poteſt. Et plane ergo nullum vſum pro foetu habere poſſet foramen, quod in ſepto ſinuum exiſteret. Quod ergo foramen, cum neque ſit, neque eo, quo dicunt, modo eſſe poſſit, mittamus, et redeamus ad ſimpliciorem, quam anatomia docuit, viam, legibusque naturae magis conſentaneam; qua ſanguis, ex vena in ſinus, ex ſinubus in ventriculos cordis recta progreditur; et qua ſola tamen deſideratus pro foetu vſus obtinetur, vt ſanguinis aliqua certa portio a ventriculo cordis dextro et a pulmonibus, nondum explicatis, auertatur, et immediate ad ventriculum ſiniſtrum reducatur.

§. 41.

§. 41. Vidimus ergo (§. 34.), eius ſanguinis, qui per venam cauam inferiorem adducitur, aliquam portionem ire per orificium huius venae ſiniſtrum in ſinum ſiniſtrum, aliam autem per dextrum orificium venire in dextrum ſinum. Illa igitur ea portio ſanguinis eſt, quae ventriculum cordis dextrum, vnaque cum eo pulmones nondum explicatos foetus euitat, et illis intactis, dum ex ſinu ſiniſtro recta in ventriculum ſiniſtrum progreditur, ventriculo huic et aortae redditur; quo denuo per totum corpus produci poſſit. Haec autem ſanguinis portio, quae per orificium dextrum venae cauae inferioris in ſinum dextrum venit, ibi colligitur cum eo ſanguine, qui per venam cauam ſuperiorem ex capite et brachiis aduenit. De hoc nunc ſanguine, ſemel in ſinu dextro atque in eius auricula contento, vt dixi, ne guttula quidem in ſinum ſiniſtrum venit, ſed omnis recta in ventriculum dextrum cordis tranſit, vnde porro per arteriam pulmonalem partim aortae, partim pulmonibus traditur.

Quae portio ſanguinis in foetu a corde dextro et pulmonibus auertatur.

§. 42. Cum iam (§. §. 13. 18. 19. 20.) vidimus, qua ratione orificia venae cauae inferioris, dextrum et ſiniſtrum, variis vitae periodis variam inter ſe proportionem obtineant; vt in embryone trimeſtri haec vena toto ſuo lumine ſe effundat in ſinum ſiniſtrum, et minori, eoque laterali oſtio tantum, aperiatur in ſinum dextrum; vt ab hoc deinde tempore valuula, orificio ſiniſtro dum innaſcitur, hoc orificium paulatim anguſtet, eoque dex-

Haec portio a corde dextro et pulmonibus abducta a primis iam temporibus imminui incipit, et continuo imminuitur.

 trum

trum aperiat magis et dilatet; vt in foetu maturo tamen orificium dextrum nonniſi tertiam tantum circiter partem totius luminis venae cauae abſorbeat, duas autem tertias fere partes adhucdum ſiniſtro orificio cedat; vt in infante nato demum citius orificium dextrum cum decremento ſiniſtri increſcat, et in adulto, clauſo penitus orificio ſiniſtro, tota denique vena caua inferior in orificium dextrum abeat; cum haec inquam fieri vidimus; patet, portionem, quae de ſanguine, per venam cauam inferiorem adducto, in ſinum ſiniſtrum, indeque porro in ventriculum cordis ſiniſtrum abſcedit, et eam, quae per dextrum ſinum in dextrum cordis ventriculum venit, ita ſub variis vitae periodis inter ſe variare, vt in foetu trimeſtri modo non omnis venae cauae inferioris ſanguis in ſiniſtras cordis partes, et paucae forte tantum guttulae per oſtiolum laterale dextrum vna cum ſanguine capitis et brachiorum, per venam cauam ſuperiorem adducto, in dextras tranſire videantur; vt deinde, imminuta continuo paulatim portione pro ſiniſtris deſtinata, continuo augeatur, quae pro dextris cum ſanguine venae cauae ſuperioris coniungitur; donec in foetu maturo tandem tertia circiter pars ſanguinis venae cauae inferioris cum ſanguine ſuperioris ad dextra abeat, et duae tertiae pro ſiniſtris maneant; et in infante aliquot annorum, vt in adulto, denique omnis venae cauae inferioris ſanguis, coniunctus cum ſanguine venae cauae ſuperioris, ſolis dextris, ſinui et ventriculo, tradatur.

§. 43.

§. 43. Vti vero de eo ſanguine, qui in ventriculum dextrum venit, iterum portio per ductum arterioſum BOTALLI abſtrahitur, et quod hinc ſupereſt, pulmonibus denique traditur; vti, quantum ex comparatione embryonis mei, quem in icones tranſpoſui, cum corde infantis, paulo poſt partum mortui, video, ductus ille arterioſus non modo non augetur, nec eandem proportionem cum reliquis partibus cordis conſeruat, ſed manifeſto potius proportione caeterarum partium ſucceſſu temporis lumine imminuitur; patet, hunc ductum arterioſum adeo cum orificiis venae cauae inferioris conſpirare, vt, quem effectum haec primo pro ventriculo dextro, deinde et pro pulmonibus producunt, augendo continuo ſanguinem, has partes tranſiturum, eum ductus adhuc continuo, ſed pro ſolis pulmonibus, augeat. In embryone trimeſtri ſolus fere venae cauae ſuperioris ſanguis in ventriculum dextrum venit; vix quidquam ex vena caua inferiori Atque de hoc ventriculi ſanguine plurima pars abſcedit per ductum arterioſum in aortam, et minima in pulmones peruenit. Deinde, vt continuo plus ſanguinis ex vena caua inferiori ſanguini ſuperioris additur, atque quantitas ergo ſanguinis pro ventriculo dextro continuo augetur; ita de hac quantitate, continuo aucta, continuo minor portio per ductum abſtrahitur, et maior pulmonibus traditur. Et dum ſimpliciter augetur ſanguis pro ſinu et ventriculo dextro, duplici ratione augetur ille, qui pro pulmonibus conſeruatur; donec tandem, dum, clauſo orificio

Ductus arterioſi in eam imminutionem effectus.

venae cauae inferioris ſiniſtro, omnis plane huius venae ſanguis cum ſanguinae ſuperioris cuniunctus ſinui et ventriculo dextro datur; obturato ſimul penitus ductu arterioſo, integra quoque haec ſanguinis quantitas pulmonibus traditur. Qui minimi in illo embryone non modo ſed ſolidi quoque et minori vaſorum copia praediti cum ſint; deinde et increſcunt magnitudine ſimul et rariores fiunt, dum copia vaſorum in iis augetur. Sic pulmones non modo in foetu iam paulatim explicantur, et ad futuram reſpirationem praeparantur, ſed ventriculus quoque et ſinus dexter ſimul dilatantur et apti redduntur, quo omnem, a toto corpore redeuntem, ſanguinem capere et per rariſſimos tunc pulmones reſpirationis ope transmittere poſſint. Ex comparatione caeterum, quam dixi, embryonis cum infante vix nato, de ductu arterioſo talia vidi. Qui ductus in foetu maturo, vel infante nato, dimidio minor eſſe ſolet lumine quam truncus arteriae pulmonalis, et trium vel quatuor linearum longus, is breuiſſimus in embryone, ſed vix minor lumine, quam ipſe dictus truncus pulmonalis; vt dicas potius, truncum hunc ipſum, dato exiguo vtrinque ramulo ad pulmones, in aortam abire.

Alius ductus arterioſi vſus.

§. 44. Praeter eum, quem dixi, etiam alium peculiarem vſum eſſe ductus arterioſi exiſtimo, quo ſcilicet cum orificio ſiniſtro venae cauae inferioris et ea ratione collineat, vt, ſi quid in alterutro eorum acciderit praeter naturam, quominus ſanguis in

in ſufficiente quantitate transmitti poſſit, id repenſetur ab altero. Quum enim foetus actutum moriretur, quamprimum peculiaris haec via intercipetur, qua ſanguis, intactis pulmonibus ad aortam reducitur; cautum eſt, ne id fiat, duplici via inſtituta, quarum ſi altera inutilis quocunque modo fieret, altera tamen traducendo ſanguini ſufficeret.

§. 45. Haec ſunt, quae obſeruaueram. Pauciſſimis tamen nunc reſpiciamus ad primas illas meas de foramine ouali cogitationes, quas ad ſecundum huius diſſertationis paragr. ſcripſi: reperiri ſimile ſimplex foramen, quo duo vaſa ſanguinea inter ſe communicarent, nusquam in toto corpore humano vel animali; et eſſe igitur illud vnicum in ſuo genere, cuiusmodi vnicis tamen in ſuo genere natura vti non ſoleat; ſanguinem vero ambulare per ambages, dum ex dextro ſinu in ſiniſtrum tranſeat. Neutrum ſane horum de *orificio ſiniſtro venae cauae inferioris*, quale in corpore foetus exiſtit, dici poteſt. Siniſtrum hoc orificium, vti dextrum, venae cauae inferioris orificium eſt, vti innumera arteriarum et venarum orificia dantur. Et ſanguis recta ex vena in ſinum, ex ſinu vero in ventriculum cordis tranſit. Hoc contra generalem venarum legem eſt, quod more arteriarum in duo orificia, vel, vt in vitulo, in duos ramos diuidatur, quae ſimplex iam erat, vena caua inferior. Sed exempla tamen dantur ſimilis venarum diuiſionis; et videmus, ne dicam de copioſiſſimis ſubcutanea-

tanearum diuaricationibus, in foetu venam vmbilicalem, in adulto venam portarum, in plurimos intra hepar ramos diuiſas eſſe. Hoc autem de mirabili *foramine ouali* praedicari non poteſt.

EXPLICATIO TABVLARVM.

Tab. VII.

Cor infantis paulo poſt partum mortui.

Fig. 1.

Sinus dexter, vna cum ventriculo dextro apertus, inciſione ab apice ventriculi prope ſeptum ſurſum ducta, et per orificium venoſum ventriculi, interque aortam et auriculam per ſinum, vsque in venam cauam ſuperiorem continuata. Simul arteria pulmonalis cum ductu arterioſo longitudinaliter inciſa et aperta eſt.

A. Ventriculi ſiniſtri, integri, pars.
B. C. D. Ventriculus dexter, vel anterior, apertus.
B. C. Pars parietis anterioris ventriculi dextri, a qua reſectus reliquus paries (*C. D.*) ſiniſtrorſum reflexa.
C. Apex ventriculi dextri.
C. D. Paries anterior ventriculi dextri, reſectus a parte (*B. C.*) eique ergo reſpondens.
D. E. Pars parietis, quae reſpondet baſi arteriae pulmonalis (*L. L.*); ab eaque reſecta eſt.

E. F. G. H K.

E. F. G. H. K. Sinus dexter apertus.

E. F. Pars parietis anterioris ſinus dextri, reſecta a parte (*H. K.*)

F. G. Pars quae reſpondet parti (*G. H.*)

G Finis ſectionis in vena caua ſuperiori.

G. H. Parietis anterioris pars ſuperior, ſiniſtrorſum reflexa, reſpondens ipſi (*G. F.*)

H. K. Paries anterior ſinus, ſiniſtrorſum reflexus, cui reſpondet (*E. F.*)

I. Apex cordis.

L. L. Baſis arteriae pulmonalis pars anterior, qua parieti ventriculi inſidet, reſecta ab hoc pariete (*D. E.*)

M. Sectio craſſae columnae carneae reſpondens loco (*E.*)

N. Columna carnea, quae in *M* ſecta.

O. O. O. O. Septum cordis, faſciculis carneis, obſcurius diſtinctis, facta.

P. Ventriculi apex, fibris irregularibus, haud pulchre reticulatis et intertextis, repletus.

Q. Papilla, quam dico *anteriorem.* Conſtans eſt, et oritur duabus vel tribus radicibus ex angulo inter parietem ventriculi et ſeptum anteriori, ad locum (*R.*), inſeriturque ſuis filamentis in interſtitium inter valuulam anteriorem (*d.*) et poſteriorem (*e.*)

R. Locus, vbi papilla anterior (*Q.*) reſecta.

S. T. Duae papillae, quas *poſteriores* dico, ſi duae ſunt. Saepe vna (*S.*) tantum eſt. Oriuntur

tur ex angulo inter parietem ventriculi et ſeptum poſteriori, et inſeruntur filamentis ſuis in interſtitium inter valuulam poſteriorem (*e.*) et ſepti valuulam (*m.*)

V. Duae radices papillae (*Q.*), reſectae a loco (*R.*)

W. Fibrilla carnea, qua papilla (*S.*) cum columna parietis (*b.*) coniungitur.

X. Fibra, qua papilla (*S.*) et (*T.*) coniunguntur. (*T.*) ſepto adhaeret.

Y. Radices, quibus papilla (*S.*) ſepto adnectitur.

Z. Radix, qua eadem parieti adhaeret.

a. Papillula parua, quam *ſuperiorem* dico, quae nonnunquam tamen minima aut merum filamentum eſt. Oritur ex ſuperiori parte ſepti, cui inſidet; inſeritur filamentis ſuis in interſtitium inter valuulam ſepti (*f.*) et anteriorem (*d.*)

b. Columna carnea, parti poſteriori ventriculi adhaerens.

c. c. Paries ventriculi, faſciculis leuiter diſtinctis, cohaerentibus inter ſe, ornatus.

d. e. f. Valuula annularis, diſſecta, extenſa.

d. Pars huius valuulae, ſeu valuula, quam vocando *anteriorem* vel *ſuperiorem* egregie definivit PERILLVSTRIS L. B. DE HALLER.

e. Valuula EIVSDEM *poſterior.*

f. Ea, quam IDEM VIR PERILLVSTRIS ſepti valuulam merito appellat.

g. h. i.

g. h. i. Orificium ventriculi venoſum, diſſectum extenſum, continuata valuulae lamina interiori inueſtitum.

g. Pars orificii latior, tuberculum efficiens, ex quo fibrae ramificatae oriuntur, per totam auriculam diſperſae.

h. Et haec pars orificii latior, vnde faſciculus fibrarum (*t.*) oritur.

i. Pars orificii ſiniſtra et anterior.

k. Filamenta papillae anterioris, in interſtitium inter valuulam anteriorem (*d.*) et poſteriorem (*e.*), quod annuli pars dextra eſt, inſerta.

l. Filamenta papillae poſterioris (*S.*) in interſtitium inter valuulam (*e.* et *f.*) ſeu partem annuli poſteriorem inſerta.

m. Filamenta papillae poſterioris (*T.*) in eandem inſerta.

n. Filamentum ſimplex, ex aequali facie ſepti ortum, cuiusmodi plura imprimis in interſtitium inter valuulam ſepti (*f.*) et anteriorem (*d.*) inſeruntur.

o. Filamenta ex papillula ſuperiori (*a.*) in modo dictam annuli partem ſiniſtram.

p. Vena caua ſuperior.

q Auricula dextra reflexa.

r. Cauitas baſis auriculae, fibris muſculoſis ramificatis repleta.

s. Truncus, ex quo plurimae harum fibrarum oriuntur, ortus ex pariete orificii venoſi (*g*.)

t. Notabilis faſciculus fibrarum muſcularium, quo cauitas baſis auriculae a parte ſinus ſiniſtra diſtinguitur, ortus ex pariete orificii venoſi (*h*.)

u. Arcus, quo eadem cauitas ſuperius terminatur. In eum continuat faſciculus (*t*.)

w. Faſciculus fibrarum muſcularium tenuiorum, quae partim ex pariete orificii venoſi, partim ex limbo orificii venae coronariae (*z*.) oriuntur, et in eundem arcum (*u*.) inſeruntur.

x. Sinus pars ſuperior laeuis. Paries poſterior.

y. Paries ſinus anterior, ſimiliter laeuis intus.

z. In hoc loco papillula ſeu tuberculum carneum alias eſſe ſolet, ex quo tum fibrae (*w*) tum limbi carnei orificii venae coronariae oriuntur.

1. 2. 3. 4. 5. Orificium venae coronariae.

1. Limbus huius orificii alter, qui ſitu poſterior eſt, craſſa fibra carnea factus.

2. Eiusdem limbus carneus anterior.

3. Valuula orificii venae coronariae. Tenerrima et vix viſibilis in hoc quidem infante erat.

4. Cauitas orificii ipſa.

5. Limbi pars, quae communis eſt orificio venae coronariae et dextro venae cauae inferioris orificio. Ex hoc limbo valuula EVSTACHII extremitate ſua anteriori oritur, quae peculari littera ob defectum loci indicari non potuit. In omnibus, quas vidi, iconibus, hic peculiaris

liaris valuulae EVSTACHII ortus, et limbus, ex quo oritur, ipſe, et plurima alia in his regionibus omnino neglecta ſunt.

6. 6. Spatium hic aliquod fibris muſcularibus vacuum.

5. 7. 8. 9. Valuula EVSTACHII.

5. Eius extremitas anterior, qua ex dicto communi limbo, ſeu, quod idem fere, ex arcus crure anteriori oritur. Limbus enim in crus continuat.

7. Baſis valuulae, ſeu margo conuexus et craſſior, quo ſupremo parieti dextro venae cauae inferioris illa inſidet.

8. Margo acutus, qui pulchre reticulatus in hoc infante erat. Filamenta, quomodo connectantur inter ſe, facile apparent.

9. Extremitas poſterior, ſatis craſſa hic et fortis, qua ipſi ſuperiori parti arcus valuula adhaeret.

8. 10 11. 12. 13. 14. 15. Orificium venae cauae inferioris dextrum, quod, niſi venam cauam ſuperiorem, orificium ventriculi et venae coronariae putes, vnicum orificium eſt, quod in ſinum dextrum patet. §. 4. 11.

8. Ora inferior huius orificii, quae a margine acuto valuulae EVSTACHII formatur.

10. Ora eius ſuperior et ipſe arcus, quem iſthmum VIEVSSENII dicunt.

11. Huius arcus crus dextrum ſiue poſterius, cuius aliqua pars valuula EVSTACHII tegitur.

12. Eiusdem crus ſiniſtrum vel anterius, ex quo limbi ea pars oritur (5.), quae orificiis venae cauae inferioris et coronariae communis eſt. Crus ipſum (12.) pariter ac poſterius (11.) in interna venae cauae ſuperficie deſcendunt. Confer. fig. 4.

13. Cauitas venae cauae inferioris, in quam ſi mittis ſtylum, ille exibit ex vena caua inferiori, qua parte ab hepate reſecta eſt.

14. Hic ergo paries poſterior et ſiniſterior eſt venae cauae inferioris. Efficitur autem haec ſuprema huius parietis pars a valuula, quam ſinus ſiniſtri valuulam dico, et quae vulgo valuula foraminis oualis audit. In hac valuula rugas obliquas vides, quae a dilatatione orificii, quod illa efficit (15.), quo aliqua huius orificii pars appareat, productae ſunt.

15. Orificii, quod ergo in pariete ſiniſtro venae cauae inferioris exiſtit, quod ex cauitate venae cauae inferioris in ſinum ſiniſtrum ducit, et quod ob hanc cauſam *orificium ſiniſtrum venae cauae inferioris* dixi, aliqua pars; ſeu aliqua pars foraminis oualis. §. 12.

16. Superficies interna arteriae pulmonalis apertae. 17. Superficies interna ductus arterioſi BOTALLI, eadem ſectione continuata aperti. 18. 18. Arteriae diſſectae margines. 19. 20. 21. Valuulae ſemilunares. 22. Orificium arteriae pulmonalis dextrae. 23. Orificium ſiniſtrae.

ſiniſtrae. 24. Orificium, quo ductus arterioſus in Aortam hiat. 25. Pars aortae. 26. Vena pulmonalis ſiniſtra ſuperior. 27. Inferior. 28. Dextra ſuperior. 29. Inferior.

Fig. 2.

Sinus ſiniſter, vna cum ventriculo ſiniſtro apertus, inciſione in parte ſiniſtra propre ſeptum facta, ſurſumque ducta inter arteriam pulmonalem et auriculam ſiniſtram et per orificium venoſum ventriculi in ſinum ſiniſtrum vsque. Sinus ipſe transuerſaliter ſimul inciſus eſt. Quibus factis, paries poſterior ventriculi, vna cum auricula ſiniſtra et pariete poſteriori ſinus dextrorſum reflectitur. Haec ſectio conuenit, vbi figuram et ſtructuram valuulae ſinus ſiniſtri examinare volueris. Ad totum ſinum obſeruandum altera praeferenda eſt, qua in integro corde paries ſinus poſterior vna cum venis pulmonalibus reſecatur. Obſeruatio facta corde in aqua ſubmerſo.

A. B. Pars parietis ſiniſtri et poſterioris ventriculi, a qua reliquus paries (B. C,) reſectus.

B. Apex ventriculi inciſus ipſe.

C. B. L. Paries ventriculi, qui nempe poſterior et ſiniſter eſt, reſectus a parte (*A. B.*) et reflexus dextrorſum.

D. Septum, quod craſſum durum conuexum eſt.

E. et *F.* Papillae, quas dico *anteriores* ſiue *ſiniſtras*. Connexae ſunt inter ſe et triplices quoque nonnun–

nunquam inueniuntur. Inhaerent autem lateri ſiniſtro parietis, prope angulum, quem paries cum ſepto includit, anteriorem; oriuntur longis radicibus, inferiori reticulatae parti parietis intertextis, (*G. H. I.*) et inſeruntur filamentis (*f. g. Z.*) in interſtitium ſiniſtrum valuulae anterioris (*X.*) et poſterioris (*Y.*) et in partes ſiniſtras ambarum valuularum ipſas.

G. H. I. Radices harum papillarum, ſeu fibrae quae cum fibris ſepti (*R. R. R.*) et cum fibris papillarum (*M. N.*) textum reticularem (*V*) efficiunt.

K. Aliae tenuiores fibrae, quibus papillae (*E. F.*) cum papillis (*M. N.*) connectuntur.

L. Paries hic vacuus.

M. et *N.* Papillae, quas dico *poſteriores* ſiue *dextras.* Connexae ſunt, ſed etiam ſeparatas vidi. Oriuntur ex textu reticulari (*V.*) prope angulum, quem paries cum ſepto includit, dextrum ſeu poſteriorem; et inſeruntur filamentis ſuis (*a.* et *e.*) in interſtitium dextrum inter valuulam anteriorem (*X.*) et poſteriorem (*Y.*) et in partes dextras harum valuularum ipſas.

O. P. Q. Papillae, quas dico *medias ſublimes.* Sunt fere in vnam commixtae. Oriuntur ex medio pariete, paulo inferius, et inſeruntur filamentis (*b.* et *d*) in interſtitium dextrum

et

et partos dextras valuularum. Ab his (*O. P. Q.*) aliae teguntur, quorum filamenta (*c.*) in interſtitium dextrum inſeruntur. Has dico *medias profundas.*

Atque ſic puto papillas vtriusque ventriculi, quae, quantum ſcio, nondum definitae ſunt, difiniri poſſe.

R. R. R. Fibrae ex ſepto in textum reticularem decurrentes.

S. T. Fibrae ex papillis dextris in eundem textum decurrentes.

V. Textus reticularis, dicto modo ex fibris ſepti et papillarum formatus, apicem ventriculi replens, pulchrior et regularior longe, quam ille in ventriculo dextro.

X. Y. Valuula annularis. *X.* Pars anterior. *Y.* Poſterior.

Z. Filamenta a papilla ſiniſtra (*E.*) reſecta.

a. Filamenta papillae *M.*

b. Filamenta papillae mediae ſublimis *P.*

c. Filamenta papillae mediae profundae.

d. Filamenta papillae mediae ſublimis *Q.*

e. Filamenta papillae dextrae *N.*

f. Filamenta papillae ſiniſtrae *F.*

g. Filamenta papillae ſiniſtrae *E.*

h. Auricula ſiniſtra, vna cum ſinus pariete poſteriori dextrorſum reflexa.

i. Eius Apertura.

k. Vena pulmonalis ſiniſtra inferior.

l. Vena pulmonalis ſiniſtra ſuperior, aperta vna cum ſinus pariete, vt prior dextrorſum reflexa.

m. Vena pulmonalis dextra ſuperior aperta.

n. Orificium venae pulmonalis dextrae inferioris.

o. p. q. r. s. t. v. w. x. y. Valuula ſinus ſiniſtri, quae vulgo foraminis oualis vocatur. Pinxi ad obiectum in aqua ſubmerſum, vbi valuula libere fluitabat, quae tamen, poſtquam a motu conquieuerat, ſemper in eundem hunc ſitum in eandemque hanc figuram rediit, qua bullam hanc refert.

o. p. q. r. Baſis valuulae, qua parte imprimis ſupremae orae venae cauae inferioris inſidet; et haec ora ſuprema venae cauae ipſa, quae, quamuis non nuda, ſed tecta tenui valuulae membrana, quae ei inſidet, tamen ob pelluciditatem membranulae diſtincte et egregie apparet, excepta parte inter (*r.* et *q.*), vbi bulla, quam valuula natans producit, haec ora tegitur. Tota ora in figura 3. apparet. Reliqua pars baſis, qua arcui valuula inſidet, ipſa valuula tegitur.

o. Orae pars ſiniſtra, ſeu quae ad parietem venae ſiniſtrum pertinet.

o p. q. Orae pars poſterior.

q. r. Hac parte lumen ſiniſtrum venae, inaequaliter arcu diuiſae, dextro lumine maius eſt.

p. q.

p. q. Particula cauitatis venae cauae inferioris, ſimplici tenſa membranula, qua tranſparet, tecta. Reliquae ſiniſteriores valuulae partes, vti et ſaccus (*s.*) in bullam eleuatae, adeoque remotiores ſunt a partibus ſubiectis, efficiuntque, vt hae in his locis non tranſpareant.

q. r. s. Saccus caecus, quem valuula in hoc loco producit, totus liber et mobilis, vti apparet ex figura 3. vbi valuula deorſum tracta eſt.

r. In hoc loco tubus valuulae inflexus eſt, et videtur, quaſi totus tubus in hac a baſi diſtantia conſtrictus eſſet, adeo vt pars anterior (*t. v.*) amplior parte hac media et verſus baſin ſimul reclinata ſit. Orificium ipſum tamen iterum magis conſtrictum eſt.

s. Fundus ſacci ad (*q. r. s.*) dicti.

t. v. w. x. y. Pars valuulae, ſeu tubi, anterior, media parte amplior, relinata. Tota haec figura valuulae ab irrumpente ſanguine, quomodo producatur, facile explicari poteſt.

t. Pars tubi dexterior ſuperior.

v. Pars inferior et ſiniſterior.

w Superficies tubi interna, qua parte hic liber et mobilis eſt. Apparet, non corniculo acuto ſed lata membranula, liberam valuulae partem, et margine ergo terminari; generatim nihil minus quam ſemilunarem eſſe.

x. In hac parte inferiori finis partis liberae tenuior eſt.

y. Nodulus, ſeu tuberculum album, in quo extremitates marginis liberi conueniunt.

z. Foſſula oualis altera ſuperior, margine acuto terminata, cui extremitas ſuperior (*w*.) marginis valuulae adnectitur.

1. Talis foſſula altera inferior ad cuius marginem ſiniſtrum extremitas inferior marginis valuulae applicatur.

2. Proxima ſuper arcum pars ſepti ſinuum in ſinu ſiniſtro.

3. Foraminulum. Orificium venae.

4. Alterum tale orificium venae in ſinum inſertae.

5. 6. 7. 8. 9. 10. Margo liber, ſeu ora, valuulae tubiformis. 5. Pars media. 6. Pars ſuperior. 7. Finis marginis, vbi membrana ſepto ſinuum adhaerere incipit. A termino (6.) ad (*y*.) vsque membrana a ſepto ſinuum nulla parte diſtinguitur. 8. Hic membrana valuulae lamellam linearem eminentem, quae extremitas inferior eſt, producit. 9. Pars inferior marginis. 10. Hic extremitas inferior euaneſcere incipit.

Fig. 3.

Solus ſinus ſiniſter apertus, extra aquam poſitus, vbi tenuis valuula collabitur; quae quidem, quan-

quantum fieri potuit, deorſum retracta, quo pars orificii ſiniſtri venae cauae inferioris, ſeu foraminis oualis, appareat.

a. Auricula ſiniſtra. *b.* Eius apertura.

c. d. Vena pulmonalis ſiniſtra inferior. *e.* Superior. *f.* Dextra ſuperior. *g.* Orificium inferioris.

h. i. k. Baſis valuulae, ſeu ora ſuprema venae cauae inferioris, qua parte vena exterioribus ſuis tunicis in ſinus parietes reflexa continuatur. Huic orae valuula inſidet, *h.* orae pars ſiniſter, *i.* poſterior, *k.* dexter.

l. Hic tenuis membrana valuulae contigua incumbit partibus ſubiectis.

m. m. Hic in bullam paulisper eleuata eſt.

n. Orae pars ſuperior, quae nunc cum tota ora deorſum tracta. (Conf. fig. 2. *t.*)

o. Orae pars inferior.

p. Extremitas orae ſuperior.

q. Extremitas orae inferior. Parum deeſt, qùin perfectum circulum ora efficiat.

r. r. r. Ora extrema ipſa.

s. Nodulus, ſeu tuberculum in quo extremitates orae conueniunt.

t. Foſſula oualis ſuperior, cuius margini ſiniſtro extremitas ſuperior marginis valuulae applicata eſt (fig. 2. *z.*)

v. Foſſula oualis inferior, cuius margini ſiniſtro extremitas inferior applicatur (fig. 2. 1.)

w. Proxima ſuper arcum pars ſepti.

x. Arcus ipſe, quoad partem, ob valuulam deorſum tractam, nudus apparens.

y. Orificii ſiniſtri venae cauae inferioris ſeu foraminis oualis pars, ob eandem cauſam nuda apparens.

z. Reliqua pars orificii ſiniſtri, ſeu foraminis oualis, per tenuem membranam valuulae tranſparens.

1. Truncus venae cauae inferioris.
2. Idem truncus deorſum per hepar continuatus.
3. Ductus venoſus, qui coniunctus cum ramo hepatico (4) trunco inſeritur.
4. Ramus hepaticus.

Fig. 4.

In ſinu ſiniſtro, vti hic in figura 3. proponitur, valuula huius ſinus, ſeu foraminis oualis, ſimulque vena caua inferior, cuius illa continuatio eſt, in ſuo latere poſteriori et ſiniſteriori, ſecundum longitudinem inciſae et apertae ſunt, quo parietum venae in valuulam continuatio et venae inſertio in ſinum ſiniſtrum, viſui offerantur. Partes in aqua ſubmerſae ſunt.

a. Pars ſinus, ſimul cum vena caua diſſecti.

b. Venae pulmonalis ſiniſtrae ſuperioris regio.

c. Orificium venae pulmonalis dextrae inferioris.

d. Vena pulmonalis dextra inferior.

e. Pars valuulae annularis ventriculi dextri.

f. Vena caua ſuperior.

g.

g. Extremitas ſuperior orae valuulae.

g. *h*. Pars orae ſuperior, reſecta a parte (*i*. *k*.)

h. Punctum in ora, vbi haec diſſecta.

i. Punctum, quod illi (*h*.) reſpondet.

i. *k*. Orae pars inferior, reſecta a parte (*g*. *h*.)

k. Extremitas orae inferior.

l. Punctum ſectionis, quod reſpondet puncto (*m*)

m. Punctum in altera valuulae parte, quod diſſectum a puncto (*l*.)

n. Punctum ſectionis in baſi valuulae.

o. Punctum, quod reſectum a puncto (*n*.) *h*. *l*. ergo cum *i*. *m*. et *l*. *n*. cum *m*. *o*. cohaeſit. Partes *l*. *m*. ſaccum formabant (fig. 2. 5.)

p. Foſſula oualis inferior. *q*. Foſſula oualis ſuperior. De his vide fig. 3. et 2.

r. Foraminulum oblongum coecum ſeu fiſſura.

s. Foraminulum in parte ſepti ſinuum proxima ſuper arcum.

t. Nodulus ſeu tuberculum, in quo extremitates orae valuulae et foſſulae ouales conueniunt.

v. *v*. *v*. Foſſulae oblongae coecae, ſimilique vt illae (*p*. *q*.) ſtructura, margine tenui acuto eleuabili cinctae. Puto has easdem eſſe, quae in parte inferiori annuli oualis, (orae orificii concreti) exiſtunt, quibus valuula a venae pariete in interna ſuperficie diſtinguitur, et quae ergo baſin valuulae deſignant.

w. Altera talis foſſula, in qua crus dextrum arcus deſinit.

x. Finis cruris ſiniſtri, niſi hoc prorſus in illum limbum (1.) acceſſorium continuari mauelis.

y.

y. Arcus ipſe in ſinu ſiniſtro totus apparens.

z. Orificia venularum.

1. Limbus, qui acceſſorius eſt limbo, quo baſis valuulae EVSTACHII cingitur.

2. Limbus, quo baſis valuulae EVSTACHII in interna venae cauae ſuperficie cingitur, et quo valuula a venae pariete in hac interna facie diſtinguitur.

3. Valuulae EVSTACHII ipſius ſuperficies interna. Notetur, partem ſiniſteriorem huius valuulae a crure ſiniſtro arcus tectam eſſe, et conferatur fig. 1., vbi valuulae extremitas ſiniſtra crus arcus tegit.

4. Limbus partis integrae valuulae ſuperior, quo haec ab reticulata diſtinguitur.

5. Reticulum, quod oculi inermes capere poſſunt, tenerrimum et ſubtiliſſimum, vndulans in aqua et plicas efficiens.

6. Orificium dextrum venae cauae inferioris, quod inter valuulam EVSTACHII et arcum continetur, et in ſinum dextrum hiat. Siniſtrum, quod inter baſin valuulae ſinus ſiniſtri et arcum continebatur, ſeu foramen ouale, diſſectum eſt et deſtructum.

7. Vena caua per hepar adſcendens.

8. 8. Duae partes, in quas diſſectus ductus venoſus.

9. 9. Duae partes, in quas diſſectus ramus ex hepate, venae cauae inſertus.

10. Orificium alterius magni rami hepatici (quod haud male alterum foramen ouale exprimit,

quem

quemadmodum tot facile inuenies foramina oualia, quot aperueris vaſa, quibus in oppoſito latere rami inſeruntur.)

11. 12. 13. Truncus venae cauae inferioris apertus.

11. Paries eius dexter.

12. 13. Paries eiusdem ſiniſter diſſectus.

14. Regio, quae efficiebat parietem venae anteriorem.

15. Regio, quae poſterior trunci venae cauae inferioris paries erat.

16. Et hic locus notandus. Eſt ſummus paries anterior venae cauae inferioris, vbi in ſiniſtrum vertitur, iuxta crus ſiniſtrum arcus.

Tab. VIII.

Sinus cordis vituli quatuor circiter ſeptimanarum, et valuula ſinus ſiniſtri, ex vitulo in partu mortuo.

Fig. 5.

Sinus vterque cordis vitulini apertus et a corde ſeparatus, a parte anteriori.

a. b. c. d. Sinus dexter apertus, *a.* Angulus ſectionis in vena caua ſuperiori. *b.* Paries ſinus anterior dextrorſum reflexus. *c.* Idem a priori reſectus, reflexus ſiniſtrorſum. *d.* Orificium venoſum ventriculi dextri apertum.

e. Auricula dextra. *f.* Vena caua ſuperior.

g. Sinus pars ſuperior lacuis. *h.* Cauitas auriculae.

i. Valuula anterior, *k.* poſterior, *l.* ſepti.

m. Vena caua inferior.

n. o. p. q. Orificium dextrum venae cauae inferioris angulatum §. 23. limbo inſtructum.

n. Angulus ſiniſter. *o.* Ora ſuperior, quae in homine ab arcu formatur. *p.* Angulus dexter. *q.* Ora inferior, loco valuulae EVSTACHII, fortis, muſculoſa.

r. Orae pars craſſior, cauae et coronariae orificiis communis.

s. Orificium venae coronariae. *t.* Eius limbus.

v. Introitus in venam cauam inferiorem.

w. Singularis pars in vitulo. Eſt ſuperficies interna proprii rami dextri, quo vena caua inferior in dextrum ſinum hiat, et quidem parietis poſterioris huius rami. Idem paries externe apparet (fig 6. *Z.*).

x. x. Ea pars, quae in homine arcus eſt. Angulus nempe diuiſionis duorum ramorum (§. 24.)

y. Cauitas rami ſiniſtri, quo vena caua inferior in ſinum ſiniſtrum hiat, ſiue foramen ouale in pariete poſteriori et ſiniſtro venae cauae inferioris. Cauitatis huius parietem efficit valuula ſinus ſiniſtri, quae plicis ſuis apparet.

z. Hiatus huius cauitatis ſeu rami ſiniſtri in ſinum ſiniſtrum.

A. Pars ſuperior ſinus ſiniſtri.

B. Orificium venoſum ventriculi ſiniſtri apertum.

C. Auricula ſiniſtra.

D. E. F.

D. *E*. *F*. Venae pulmonales lateris ſiniſtri.
G. Superior vena pulmonalis dextra.
H. Filamenta valuulae annularis reſecta.

Fig. 6.

Idem vterque Sinus cordis vitulini a parte poſteriori.

a. *b*. *c*. *d*. *e*. *f*. *g*. *h*. *i*. Sinus ſiniſter, diſſecto orificio venoſo ventriculi apertus, pariete poſteriori reſecto. *a*. Paries anterior. *b*. Superior. *c*. Vena pulmonalis dextra ſuperior. *d*. Siniſtra ſuperior. *e*. Media. *f*. Inferior. *g*. Pars orificii venoſi cordis anterior, in homine ſuperior. *h*. Pars eiusdem orificii poſterior, in homine inferior. *i*. *i*. Particula parietis ſinus poſterioris reflexa.

k. Orificium auriculae ſiniſtrae.

l. *l*. *l*. *m*. *m*. *n*. *o*. *p*. *q*. *r*. *s*. *t*. Valuula ſinus ſiniſtri ſeu foraminis oualis, quae tamen orificium fere iam concretum habet, vt in plerisque venalibus eſſe ſolet. Hinc aliam plane quam in foetu naturam habet. Craſſa, contracta, dura, rubicunda, noduloſa.

l. *l*. *l*. Baſis valuulae. Hanc baſin impreſſio circularis denotat, quaſi venae cauae ramus ſiniſter (*x*. *y*.), cuius continuatio valuula eſt, parietem ſinus (*i*. *i*.) perforaret.

m. *m*. Pars poſterior valuulae latior, mollior, rubicunda.

n. P rs anterior, ſeu media tota noduloſa albida.
o. Noduli, quibus pars anterior terminatur.
p. Filamentum, quo valuula parieti ſinus adnectitur, ex parte molliori (*m.*)
q. Aliud filamentum ex parte duriori (*n.*)
r. r. Duo tenuiſſima filamenta. Sed haec non in omnibus ſubiectis inueni.
s. Aliud filamentum. Haec filamenta ſimilia filamentis valuularum annularium cordis.
t. Orificium valuulae anguſtum.
v. Vena caua inferior, ita adſcendens, vt multo plus ſiniſtro, quam dextro ſinui reſpondeat, illique potius, quam huic, ſe inſertura eſſe videatur.
w. Hic vena caua lateſcit, vt ſolet vas, quod ſe diuiſurum eſt in duos ramos.
x. y. Ramus venae cauae ſiniſter, quo ſe in foetu aperit in ſinum ſiniſtrum. Tubus ille cutaneus, qui valuulam refert, continuatio rami eſt, eiusque orificium extremum ſimul rami extremum orificium refert, quo denique ſanguis in ſinum ſiniſtrum venit.
z. Ramus dexter venae cauae inferioris, quo in ſinum dextrum hiat.
1. Haec ſuperior rami pars minus euidenter in nonnullis a pariete ſinus dextri diſtincta eſt. In aliis vt bulla, et tenuior, quam paries ſinus dextri eſt, apparet. Et eadem denique pars eſt, quae in cauitate ſinus dextri (fig. 5. *w.*) apparet. Ergo ſuperficies externa parietis poſte-

poſterioris rami dextri, vt illa (fig. 5. *w.*) ſuperficies eiusdem interna erat.

2. Pars parietis poſterioris ſinus ſiniſtri.

3. Locus, vbi ſeptum dextrum ſinum a ſiniſtro diſtinguit.

4. Locus, vbi ſinus etiam externe ſeparati ſunt.

5. Vena caua ſuperior. 6. Sinus dexter.

7. Auricula dextra. 8. Orificium venoſum ventriculi dextri.

Fig. 7.

Valuula ſinus ſiniſtri ex vitulo, ſub partu mortuo, qui biceps fuit, ſed in corde ipſo praeter magnitudinem nihil a legibus alienum habuit. Valvula, vti in ſinu ſiniſtro, vna cum ventriculo ſiniſtro aperto apparet, et in aqua fluitans repraeſentata eſt. (§. 28.)

a. a. a. Orificia venarum pulmonalium dextri lateris.

b. b. b. Venae iſtae pulmonales ipſae.

c. c. Pars valuulae annularis ventriculi ſiniſtri.

d. e. f. g. Baſis valuulae, qua orificio ſiniſtro venae cauae inferioris inſidet, ſeu orificium hoc ipſum tranſparens, quod oblongum, et fere, vt dextrum, angulatum hic reperi.

d. Angulus inferior et ſiniſterior.

e. Limbus inferior, cui paries valuulae tubuloſae poſterior longior (*e. k.*) inſidet.

f. Angulus ſuperior et dexterior, vbi ligamentum peculiare eſt, quo valuula parieti ſinus adnectitur.

g. Limbus ſuperior, per membranam parietis tubi (*e. k.*) tranſparens, cui paries valuulae, parieti ſinus incumbens, et cuius pars tantum anterior (*o.*) nuda apparet, inſidet.

h. Hic ligamentum alterum eſt, quo valuula parieti ſinus adnectitur. Tota reliqua huius perfecti tubi pars (*h. r.* et *r. d.*) libera et ſurſum, iterumque deorſum, mobilis eſt.

i. Pars orae extremae tubi valuuloſi.

k. Fibrilla ab ora (*i.*) ſoluta, mobilis.

l. Pars reticulata, in natura pulcherrima.

m. Ora extrema parietis valuulae, parieti ſinus incumbentis.

n. Foramen in hoc pariete, quaſi pars exſciſſa eſſet.

o. Superficies interna parietis, ſinui incumbentis, valuulae tubuloſae.

p. Fibrilla, ab ora (*m.*) ſoluta.

q. m. r. s. k. i. q. Ora extrema valuulae.

LYCHNI-

LYCHNI-CVCVBALVS:
NOVVM PLANTAE HYBRIDAE GENVS.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Cum in experimentis, plantarum hybridarum procreandarum cauſa capiendis, aliquando verſarer, in mentem mihi venit, rem fore rariſſimam, omnique dignam attentione, ſi contingeret mihi, vt ex coniunctione plantae cuiusdam dioicae cum hermaphrodita vel eiusdem, vel diuerſi generis numeroque partium fructificationis ab iſta diſcrepante, nouam procreare poſſem prolem hybridam. Optionem itaque feci Lychnidis dioicae, de qua mihi conſtabat, cum plurimis aliis prolixa affinitate eſſe coniunctam, et ecce! poſt permultos irritos ac fruſtra repetitos conatus, quorum conſignationem diſſertationi huic inferius adiungam, auſpicata Lychnidis dioicae ♀ et Cucubali viſcoſi ♂ copulatio exoptatiſſimum habuit euentum.

Exp. I.

Lych. dioic. alb. ♀.
Cucubal. viſcoſ. ♂.

An. 1766. die 29. Mai. Lychnidis dioicae faeminae flos vnicus puluere antherarum Cucubali viſcoſi debito modo ac tempore conſperſus, capſulam

lam dabat maturam, pluribusque ſeminibus foetam, quae colore paullo obſcuriore ac minora mihi viſa ſunt, quam iſta plantae naturalia; ſemina enim Lychnidis dioicae maiora, quam Cucubali viſcoſi, magisque cinerea, Cucubali viſcoſi autem minora, quam Lychnidis dioicae, magisque fuſca, ceterum quoad formam vtraque inter ſe inuicem ſatis ſimilia.

An. 1767. die 10. April ſemina iſta hybrida in fimentum ſata, ſero progerminauere, vnaque alteraue tantum plantula. Eodem anno, ob nimiam forſan vel intempeſtiuam irrigationem, omnes periere, excepta vnica, quae per inſequentem hyemem in fimeto ac ſub dio relicta fuit. Vere ineunte anni 1768, cum iam ſatis adoluiſſet, in ollam transplantata eſt, tandemque die 18. Iun. primum floruit, habitus inter matrem ac patrem in vniuerſum medii: *caulis* ſc. minus ramoſus et rigidior, quam ♀, ſed ramoſior ac gracilior, quam ♂. *Folia* anguſtiora, viſcidiora, ac ad marginem magis vndulata, quam ♀, ſed latiora, minusque viſcida ac vndulata, quam ♂. *Perianthium* non adeo ventricoſum ac inflatum quaſi, vt in ♀, nec cylindricum ac corollae vnguibus appreſſum, vt in ♂. *Vngues petalorum* calyce longiores ac anguſtiores, quam ♀, breuiores ac latiores, quam ♂. *Corona faucis* membranacea parua, in ♀ ſpecioſa, ac in ♂ nulla. *Sexus*, quod inprimis notandum, tantummodo ſemi-hermaphroditus, in ♀ dioicus, in ♂ autem vere hermaphroditus. *Stam.* NB. nec nulla, neque perfecta

fecta, ſed, praeter aliarum hybridarum, e duobus hermaphroditis prognatarum indolem, infra mediam vtriusque parentis proportionem ac perfectionem: *filamenta* ſc. inaequalia tenera valde et quaſi emarcida, germinisque vix longitudine; *antherae* minimae, effoetae, nec vnquam puluerem effundentes. *Germen* minus, anguſtius ac acutius, quam ♀, ſed maius, nec adeo anguſtum et acuminatum, quam ♂. *Stylorum* numerus conſtantior quaternarius, quinarius vero ♀ et ternarius ♂. *Capſula* ac *ſemina* vera nulla vnquam. Reliqua ex ipſis iconibus ſatis patent.

Primo adſpectu, vt ex ante dictis iam inclareſcit, faeminam quaſi mentiebatur haec planta, per totam floreſcentiam, ſtamina ſua effoeta in fundo floris retinendo, nec niſi ſtigmata, Lychnidis dioicae foeminae more, exſerendo. Ex ſe ipſa, et quidem ab vtraque parte, penitus infoecunda erat; flores equidem plurimi, puluere antherarum Lychnidis dioicae conſperſi, impraegnationem admittebant ſpuriam, ſed germina leuiter intumeſcentia, longe ante ipſorum maturitatem, ſenſim ſenſimque contabeſcebant omnia. Idem quoque octo floribus accidit, puluere antherarum ſilenes fruticoſae Linn. die 25. Iun. conſperſis. Sub Septembris medium florere quidem deſiit, aſt nouos iterum cauliculos, vti id plantis hybridis fere omnibus ſolemne eſt, continuo emiſit, quorum nonnulli ante hyemis ingreſſum flores ſuos adhuc explicabant. Variabat quidem, quod non negauerim, durante floreſcentia, ſtylis in-

 terdum

terdum 2, 3, 4, 5 et quandoque pluribus, vt idem quoque, ratione numeri ſtylorum, in hortis maxime variabilis, patris ipſius, matrisque imprimis, mos eſt, attamen numerus quaternarius ſaepiſſime omnium obuenit, ac conſtantior. Inſequente anno, radicis ſuae perennantis vi, Iunii initio ſecunda vice florebat.

An. 1771. ex ſeminibus priori anno, die 16. et 20. Iun. in quatuor floribus felici iterum ſucceſſu praeparatis, plantae hybridae ſex prognatae ſunt, illi ſupra deſcriptae per omnia ſimiles.

Exp. II.

Cucubal. viſcoſ. ♀.

Lychn. dioic. rubr ♂.

An. 1770. die 18. Iun. in tribus floribus Cucubali viſcoſi ♀, quos inuerſo modo puluere antherarum Lychnidis dioicae rubrae conſperſi, impraegnatio vera fruſtra fuit tentata, vtpote vel plane nulla, vel imperfecta tantum inde ſecuta. Idem experimentum in duobus floribus d. 6. Iul. infelici pariter ſucceſſu repetitum. Forſan ipſius capſulae anguſtia ouulorumque ſic dictorum paruitas hic in cauſa erat, cur foecundatio inuerſa hac ratione non ſucceſſerit, vel intra certos tantum limites imperfecta ſubſtiterit. Plura certe alia exempla, quibus opinio haec confirmari videtur, facile in medium proferre poſſem.

Plantae,

Plantae, plus minusue ſibi affines, quarum copulatio foeccunda incaſſum huc vsque facta eſt.

Congeneres, trigyniae.

Exp. III.

Cucubal. viſcoſ. ♀.
Cucubal. Behen. ♂.
An. 1770. d. 28. Iun. flor. 2.
Foecundatio ſpuria.

Exp. IV.

Silene gigant. ♀.
Silene noctifl. ♂.
An. 1765. d. 12. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

Exp. V.

Silene noctifl. ♀.
Silene nocturn. ♂.
An. 1765. d. 9. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Exp. VI.

Silene noctifl. ♀.
Silene gigant. ♂.
An. 1765. d. 5. Iul. Flos. 1.
—— —— d. 12. —— ——
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia. Semina medulloſa, ac Silen. gigant inſtar marginibus acutis praedita.
Vid. Exp inuerſ. IV.

Exp. VII.

Silene noctifl. ♀.
Silene Behen. ♂.
An. 1765. d. 13. Iul. Flos. 1.
—— —— d. 15. —— ——
Foecundatio ſpuria.

Exp. VIII.

Silene noctifl. ♀.
Silene Armeria. ♂.
An. 1765. d. 13. Iul. Flor. 4.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Exp. IX.

Silene paradoxa. ♀.
Silene Armeria. ♂.
An. 1766. d. 31. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Congeneres, pentagyniae.

Exp. X.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Lychn. chalcedon. ♂.
An. 1765. d. 8. Iun. Flor. 3.
—— —— d. 13. —— —— 4.
—— —— d. 12. Iul. —— 2.
—— —— d. 13. —— —— 2.
—— —— d. 14. —— —— 1.
—— 1770. d. 6. Aug. —— 1.
—— —— d. 7. —— —— 2. rubr. ♀.
Foecundatio ſpuria.
Vid. Exp. inuerſ. XI.

Exp.

Exp. XI.

Lychn. chalcedon. ☿.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 20. Iun. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. X.

Exp. XII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Lychn. flos cuculi. ♂.
An. 1765. d. 21. Iun. Flor. 11.
— 1770. d. 29. —— — —— 1.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Bigeneres, trigyniae.

Exp. XIII.

Cucubal. Behen. ♀.
Silene Behen. ♂.
An. 1765. d. 25. Iul. Flos. 1.
—— —— d. 27. —— ——
Foecundatio ſpuria.
Vid. Exp. inuerſ. XVII.

Exp. XIV.

Cucubal. tatar. ♀.
Silene Armeria. ♂.
An. 1765. d. 13. Iul. Flor. 5.
Sterilitas ſumma.

Exp. XV.

Silene gigant. ♀.
Cucubal. Behen. ♂.
An. 1765. d. 8. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.

Exp. XVI.

Silene gigante. ♀.
Cucubal. tatar. ♂.
An. 1765. d. 16. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Exp. XVII.

Silene Behen. ♀.
Cucubal. Behen. ♂.
An. 1765. d. 12. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. XIII.

Exp. XVIII.

Silene Behen. ♀.
Cucubal. tatar. ♂.
An. 1765. d. 25. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Exp. XIX.

Siline noctifl. ♀.
Cucubal. tatar. ♂.
An. 1765. d. 16. Iul. Flos. 1.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Exp.

Exp. XX.

Silene noctifl. ♀.
Cucubal. viſcoſ. ♂.
An. 1766. d. 29. Mai. Flor. 3.
Foecundatio ſpuria.

Exp. XXI.

Silene noctifl. ♀.
Cucubal. Behen. ♂.
An. 1765. d. 4. Iul. Flos. 1.
Foecundatio ſpuria.

Bigeneres, pentagyniae.

Exp. XXII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Agroſtem. Githag. ♂.
An. 1765. d. 25. Iun. Flor. 8.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXIII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Agroſtem. coronar. ♂.
An. 1765. d. 9. Iun. Flor. 4.
—— —— d. 15. —— ——
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.
Semina plura medulloſa.

Bige-

Bigeneres tri - et digyniae.

Exp. XXIV.

Silene noct. fl. ♀.
Saponar. offic. ♂.
An. 1765. d. 10. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Bigeneres, pent. et digyniae.

Exp. XXV.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Saponar. offic. ♂.
An. 1765. d. 6. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Bigeneres, tri - et pentagyniae.

Exp. XXVI.

Cucubal. Behen. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 8. Iul. Flor. 5.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXVII.

Cucubal. viſcoſ ♀.
Lychn. flos cuculi. ♂.
An. 1770. d. 28. Iun. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXVIII.

Cucubal. tatar. ♀.
Lychn. flos cuculi. ♂.
An. 1765. d. 22. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Exp.

Exp. XXIX.

Silene paradoxa. ♀.
Lychn. chalcedon. ♂.
An. 1766. d. 21. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXX.

Silene paradoxa. ♀.
Lychn. flos cuculi. ♂.
An. 1766. d. 18. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXXI.

Silene paradoxa. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1766. d. 18. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXXII.

Silene gigant. ♀.
Lychn. coronar. ♂.
An. 1765. d. 15. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXXIII.

Silene conoidea. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 28. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXXIV.

Silene conica. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 1 1. Iul. Flor. 3.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. XLV.

Exp. XXXV.

Silene noctifl. ♀.
Agroſtem. coronar. ♂
An. 1765. d. 6. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Exp. XXXVI.

Silene noctifl ♀.
Lychn. chalcedon. ♂.
An. 1765. d. 6. Iul. Flos 1.
—— —— d. 10. —— ——
Foecundatio ſpuria.

Exp. XXXVII.

Silene noctifl. ♀.
Lychn. flos cuculi. ♂.
An. 1765. d. 17. Iul. Flor. 5.
Foecundatio ſpuria.

Exp. XXXVIII.

Silene gigant. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 10. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. XLIV.

Exp.

Exp. XXXIX.

Silene gigant. ♀.
Lychn. chalcedon. ♂.
An. 1765. d. 9. Iul. Flor. 5.
Sterilitas ſumma.

Exp. XL.

Silene noctifl. ♀.
Lychn. dioic. alb. ♂.
An. 1765. d. 2. Iul. Flos. 1.
—— —— —— —— —— 1. rubr. ♂.
—— 1771. d. 30. Iun. Flor. 3.
—— —— d. 3. Iul. —— 5. alb. ♂.
Foecundatio ſpuria.
Vid. Exp. inuerſ. XLVII.

Bigeneres, pent. et digyniae.

Exp. XLI.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Cucubal. Behen. ♂.
An. 1765. d. 27. Iun. Flor. 12.
— 1770. d. 29. —— — —— 5. rubr. ♀.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Exp. XLII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Cucubal. tatar. ♂.
An. 1765. d. 17. Iul. Flor. 8.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Exp. XLIII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene nocturna. ♂.
An. 1765. d. 5. Iul. Flos. 1.
Sterilitas ſumma.

Exp. XLIV.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene gigant. ♂.
An. 1765. d. 3. Iul. Flor. 2.
—— —— d. 16. —— —— 3.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. XXXVIII.

Exp. XLV.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene conica. ♂.
An. 1765. d. 2. Iul. Flor. 2.
Sterilitas ſumma.
Vid. Exp. inuerſ. XXXIV.

Exp. XLVI.

Lych. dioic. alb. ♀.
Silene Behen. ♂.
An. 1765. d. 4. Iul. Flos. 1.
Foecundatio ſpuria.

Exp.

Exp. XLVII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene noctifl. ♂.
An. 1765. d. 28. Iun. Flor. 3.
—— —— d. 16. Iul. —— 2.
Foecundatio ſpuria.
Vid. Exp. inuerſ. XL.

Exp. XLVIII.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene cretica. ♂.
An. 1765. d. 4. Iul. Flos. 1.
Foecundatio vel ſpuria, vel adhuc dubia.

Exp. XLIX.

Lychn. dioic. alb. ♀.
Silene Armeria. ♂.
An. 1765. d. 18. Iun. Flor. 6.
Sterilitas ſumma.

CONSECTARIA ALIQVA.

Iam ex indole partium fructificationis Lychni-Cucubali noſtri ſpeciatim, quam ex vniuerſo horum experimentorum grege conſectaria fluunt ſequentia:

I. Semen vtrumque, tam maſculinum, quam foemininum, reſpectu omnium plantae partium ipſiusque ſexus diuerſitatis, reciprocam inter ſe exercere actionem ac reactionem, mutuumque ſemper ac aequalem in generatio-

nis negotium habere influxum, niſi ſingulari aliqua cauſa (*a*), v. g. viuentium a recto tramite declinatione ac degeneratione peruerſaque ac labefactata eorum natura etc. illud aequilibrium turbetur; nec ſtrictiori ſenſu verum atque fundatum eſſe decantatum illud axioma, quod omnes plantarum animaliumue vel naturalium vel hybridarum partes, quae ad ſic dictam corticalem earum ſubſtantiam ſpectant, a patre, eae e contrario, quae ad medullarem pertinent, a matre vnice ortum ſuum ducant; alioquin hybrida noſtra, vt hermaphroditus pleniſſimus ac conſummatus, corolla faucis corona carente, ſtaminibusque Cucubali viſcoſi inſtar elongatis ac vere pentadynamiis, et quinque potiſſimum Lychnidis dioicae ſtylis germineque craſſiore ac obtuſiore inde exſurrexiſſet.

II. Dari interdum, rariſſime licet, plantas bigeneres diuerſique ordinis, foecunda copulatione inter ſe iungendas, mirabili Lychni - Cucubali noſtri exemplo.

III. Fruſtrari e contrario plures ex congeneribus vel bigeneribus felici ſucceſſu, proximiore longe,

(*a*) Vid. opuſc. meor. verracula lingua conſcriptor. Fortſ. der vorl. Nachr. §. 26. it. dritte Fortſ. §. 47. et 56.

longe, quoad externam faciem, affinitate ſibi coniunctas.

IV. Hybridarum e plantis, licet interdum valde ſibi affines, plurimisque propinquitatis vinculis coniunctae ſint, haud ita vulgarem facilemque eſſe generationem, ac multi ſibi perſuadent.

Not. Licet ſemina, e quibusdam harum coniunctionum prognata, medulloſa fuerint, fertiliumque ſpeciem prae ſe tulerint: ſaluo tamen experimentorum errore id contendiſſe velim; facile enim fieri potuit, vt ab inſectis, quae arcere omnimodo difficillimum eſt, proprii ♀ antherarum pulueris aliquid alteri fuerit immixtum. Interim Exp. VI. VIII. XII. XIX. XXIII. XLI. XLII. XLIV. et XLVIII. quamuis ex ſatis eorum ſeminibus hybrida haud vnquam ſit exorta, circumſpectam ac ſtudioſam merentur repetitionem.

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Ser. I. Lychnidis dioicae maſculae flores. Tab. IX.
Ser. II. Lychnidis dioicae feminae flores.
Ser. III. Lychni - Cucubali flores.
Ser. IV. Cucubali viſcoſi flores.

a. a. a. a.

a. a. a. a. Flos integer, a parte poſteriore.

b. b. b. b. Flos integer, a parte anteriore.

c. c. c. c. Calyx diſſectus ac explicatus.

d. d. d. d. Flos absque calyce.

e. e. e. e. Petalum.

f. Stamnia Lychnidis dioicae maſculae.

g. Germen Lychnidis dioicae ſeminae cum ſuis ſtylis.

h. Germen Lychni - Cucubali, cum ſtaminibus ſuis ac ſtylis.

i. Eiusdem germen diſtinctum.

k. Germen Cucubali viſcoſi, cum ſtaminibus ſuis ac ſtylis.

l. Eiusdem germen diſtinctum.

SCHA-

SCHACALAE HISTORIA;

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Homines primaeui numero pauci, in vno eodemque antro probabiliter omnem vitam abſoluentes, curta admodum ſuppellectili et vix vlla gaudentes nec Camelo, nec Aſino, nec Equo indigebant, quos pronepotes ad migrationes propter generis humani multiplicationem ineuitabiles abſoluendas ſubigerunt. Boue atque Bubali, ſociis laboris atque agriculturae, pariter per plurima ſaecula homines primaeui migrantes, arborum fruticumque fructibus plantarumque radicibus atque foliis victitantes carere potuerunt. Sue minime opus habuiſſe primaeuos phytophagos, ſed illum a ſeriori hominum progenie gulae nimis indulgente et diaeta vegetabili minus contenta numero animalium domeſticorum additum eſſe, euidentiſſimum eſt. Ad Felis, Murium hoſtis, receptionem apud primaeuos nulla ratio exſtat; hanc tandem homo in aedibus degens et varia ſupellectili et annona inſtructus, a Muribus moleſtiam ſentiens vtilem eſſe duxit, vt in domos recipiat. Sed Oues et Capras, vt ex illis amictum ſumant, atque Canes, vt ferae nociuae et a gregibus et ab ipſis hominibus arcerentur, antiquitus et primo omnium animalium cicurare tentaſſe hominum primaeuos, ex ipſa eorum conditione et vitae

genere euidenter patet. Idem ex multifaria, qua hodie haec animalia veniunt, forma concludere licet; nam varietatum a prototypo ſecedentium per ſtatum domeſticum progenitarum numerum durationi ſubactionis animalium proportionatum eſſe, ipſa rei natura ſuadet. Quod attamen Canis magis variet, quam Ouis et Capra, exinde eueniſſe putes, quia a Canibus et Oues et Caprae numero generationum deſcendentium atque numero indiuiduorum ſuperantur; nec non quia Canis, inſeparabilis hominum comes, per omnia globi noſtri climata, quorum plura Oui et Caprae adire non licuit, diſſeminatus, hinc ab eorum influxu eo magis transfiguratus eſt; accedit etiam maior ciborum varietas, qui Ouibus Capriſque magis vniformes exhibentur, atque arbitrarium hominis copulam Canum ſollicite dirigentis, incrementum eorum ſupprimentis, atque partes eorum varias v. g. caudam, aures, forte etiam roſtrum mutilantis, et qualitates morboſas propagantis in Canes dominium, quod Oues ac Caprae vix vnquam expertae ſunt. Exinde adeo polymorpha Canum hodierna figura.

Animalia haec domeſtica antiquiſſima in illis globi noſtri regionibus, quas homines primaeui inhabitauerunt, indigena et fera fuiſſe, neceſſe eſt vt coniiciatur. At ex hiſtoria et ſacra et profana elucet, his Aſiam minorem cum terris proxime adfinibus adnumerandam eſſe; hinc et eadem pro patria horum animalium domeſticorum antiquiſſimorum

rum habenda eſt, nam ex analogia euidentiſſimum, his pariter ac reliquis quadrupedibus limitatam aliquam prouinciam pro ſtatione a ſummo rerum conditore aſſignatam fuiſſe. Cum porro probabiliter ſit, homines primaeuos troglodytes fuiſſe, haud in planitiebus campeſtribus, ſed in tractubus montoſis, ſpeluncas vel naturales, vel facili negotio conficiendas pro domicilio largientibus, commoratos eſſe; hinc ſequitur, etiam animalia illa, quae primo omnium domeſtica fecerunt, eiusmodi naturae fuiſſe, vt illis magis montoſa, quam campeſtria arriſerint, vel vt ipſis hominibus proxima loco fuerint. Quaerenda igitur ſunt prototypa numeroſarum varietatum Ouis, Caprae et Canis in montoſis Aſiae minoris; nam in omnibus animantibus cuiuscunque generis vllum eſt placidum, eiusdem inuenitur et ferum, affirmante PLINIO *libr.* 8. *cap.* 53.

Iudicioſo *Ill. Comitis de* BVFFON ingenio in *Tomo* XI. *Hiſtoriae Naturae* demonſtratum eſt, quod pro Oue in ſtatu fero habendum ſit animal in montoſis depreſſis Aſiae minoris et in adfinibus quoad clima analogis orientem occidentemque verſus extenſis obuium, a veteribus Muſmon ſeu Muſimon, a Gallis hodie Muflon appellatum, quod *Ill. Equiti de* LINNE, veritati huic, (ex collatione oſſium capitis et cornuum mihi euidentiſſimae), nondum adſentienti Capram Ammonem vocitare placuit.

In determinanda Capra fera minus felix fuit Zoologus ille conſummatiſſimus. Propoſuit nimirum in *Tomo* XI. *Hiſt. Natur.* Ibicem et Rupicapram eiusdem ſpeciei, illum marium, hanc feminarum varietates feras eſſe, et earum connubio Capram domeſticam ortum debere. Quanquam haec animalia, pariter ac Muſnon, in montoſis Aſiae adſint, attamen ſententia haec omni probabilitatis gradu deſtituta eſt. Nulla enim ratio ſufficiens exſtat, quare animalia haec in alpibus, in vno eodemque climate, in vna eademque ſtatione occurrentia, in tantam corporis varietatem externam, qua nunc veniunt, et ante plura ſaecula iam venierunt, degenerauerint. Potius ex ipſa Ibicis et Rupicaprae vitae genere, ſi vel ad alia momentoſiora attendere nolles, certiſſime concludi poteſt, quod ſpecies diſtinctae antiquitus fuerint, et diſtinctae omne connubium reciprocum reſpuentes permanebunt.

Ibicem proprie patrem varietatum Caprae domeſticae cum *Cel.* PENNANT (vid. *Ei. Synopſis of Quadrupeds pag.* 13.) nuncupare, vix haeſitarem, niſi in montoſis depreſſioribus inter mare caſpium et nigrum et in omni Aſia minori aliud animal ferum adeſſe comperuerim et viderim, quod omni partium habitu et ſtructura multo magis quam Ibex Capram domeſticam refert.

Paſen ſeu Capricerna, de qua KAEMPFERVS in *Amoenit. exot.* p. 198. agit, quam *Ill. Eques de* LINNE Capram bezoarticam appellat, idem hoc animal

animal eſt, quod pro Capra fera ſeu ſpontanea habemus. quanquam *Ill. Comes de* BVFFON et *Cel.* PENNANT longe aliter ſentiant, animal hocce *Kaempferianum* Gazellis ſeu Antilopibus adnumerantes. Confirmet ſententiam noſtram figura illa KAEMPFERI, cui nomen Paſen adſcriptum. Figura, quanquam rudiſſima ſit, attamen minime Gazellam, ſed Capram refert corporis habitu; mento barbato; cornubus praelongis, reclinatis, minus arcuatis, antice tuberculatis ſeu ſecundum KAEMPFERVM annulis diſtinctis inſignïoribus, non omnem cornu peripheriam, vt ex figura patet, ambientibus, ſed tantum antice protuberantibus, hinc a cornubus Paſen BVFFONII *Tom.* XII. *Tab.* 33. repraeſentatis diuerſiſſimis.

Tandem ex ipſa Ibicis et Paſenae KAEMPFERI natura argumentum grauiſſimum deſumi poteſt, Capram domeſticam non ab Ibice ſed a Paſena deriuandam eſſe. Natura Ibicis, non niſi ſumma alpium iuga, rupeſtria, aeterna niue tecta et plantas vix alibi prouenientes pro eius pabulo exhibentia inhabitantis adeo ſingularis, imo ſingulariſſima eſt, vt pariter impoſſibile videatur illum, ac Elephantum ſeu Tarandum per omnia telluris climata, quorum plurima a ſtatione eorum naturali diuerſiſſima ſunt, domeſticum facere. Natura autem Paſenae ab alpeſtribus abhorrentis, et montoſa Aſiae minoris hieme niue refrigerata, aeſtate calore fere ſummo exaeſtuata, nunc ſicciſſima, nunc larga pluuia irrorata, plantas haud paucas per omnia telluris cli-

mata obuias alentia frequentantis pro omni climate, pariter ac Muſmonis natura, facta fuiſſe videtur, hinc felici ſucceſſu in omne clima recipi, multiplicari potuit. Sufficiant haec, quae in poſterum, de animali alio huc vſque ignoto alpino caucaſico inter Muſmonem et Ibicem medio acturus, fuſius tractabo.

Accedamus ad tertium animal domeſticum antiquiſſimum, ad Canem. Ferum hunc et ſpontaneum in iisdem cum Oue et Capra regionibus Aſiae minoris et adfinibus quaerendum eſſe, antea probauimus. Occurrunt autem in Aſia minori animalia fera quatuor, quae Cani plus minusue ſimilia ſunt; Hyaenam volo, Lupum, Vulpem atque Lupum aureum KAEMPFERI ſeu Schacalam Turcarum atque Gallorum. Non defuerunt auctores vnum alterumue horum animalium pro Cane fero habentes; noſtrarum partium nunc eſt, probare nec Hyaenam, nec Lupum, nec Vulpem, ſed Schacalam Canem ferum eſſe.

Ex deſcriptione Hyaenae in *Tomo* IX. *Hiſtoriae Buffonianae* data luce meridiana clarius patet, illam a Cane ſtructura inteſtini caeci, glandularum analium, penis ac dentium, eorumque et digitorum numero eſſentialiter differre, imo diuerſiſſimam eſſe, adeo vt plane impoſſibile ſit, Canis varietates ex Hyaena proueniſſe.

Lupus ſtatura, partium numero et moribus variis Cani ſummopere analogus eſt, adeo vt diffi-
cillimum

cillimum ſit, notas diſtinctiuas horum animalium enodare; attamen varia repugnant, quo minus Lupus pro Cane fero habeatur. Patria Lupi non ea eſt, quae pro animali antiquiſſimo domeſtico requiri viſum eſt; nam ille zonae frigidae fere proprius eſt, in Aſia minori vix occurrens et in regionibus meridionalioribus plane deficiens. Magnitudo Lupi adverſatur; nam probabile eſt, animal, ex quo Canis varietates ortae ſint, magnitudine naturali tali gaudere, quae media ſit, inter maximos et minimos nunc occurrentes Canes; ſed Lupo maiores vix dantur Canes, certo nunquam duplo maiores, cum attamen quadruplo eo minores frequentes ſint. Inteſtini caeci ſtructura, cuius icon in *Hiſtoriae Buffonianae Tomo* VII. *Tab.* 2. exſtat, Lupus eſſentialiter differt a Cane, pariter etiam tractus inteſtinalis proportionibus; nam longitudo inteſtini tenuis ad corpus a roſtri apice ad caudae radicem metitum Lupi vt 4 : 1; Canis villatici vt $4\frac{1}{2}$: 1; longitudo inteſtini caeci ad illam tenuis Lupi vt 1 : $16\frac{2}{3}$; Canis vt 1 : 29; longitudo craſſi ſeu coli et recti ad tenue Lupi vt 1 : $7\frac{1}{2}$; Canis vt 1 : $5\frac{3}{4}$. Accedunt experimenta *Buffoniana*, ex quibus patet, quod Lupus et Canis non ſolum coitum reſpuant, ſed etiam antipathiam ſummam in conuiuio teſtificent; quae attamen nondum omni exceptione maiora ſunt, quippe *Cel.* PENNANT hybridum ex Lupo mare et Cane femina vidiſſe affirmat, (vid. *Ei. Synopſis of Qradrupeds p.* 144.) Vtinam! ne ſiluiſſet, an hybridum hocce animal ſterile, vel non fuerit.

Vulpi.

Vulpi varia a Cane fero neceſſario praedicanda attributa, quibus Lupus caret, propria ſunt. Patria nimirum Vulpis ea eſt, vt potius quam Lupus hominibus primaeuis innoteſcere et in numerum animalium domeſticorum recipi potuerit; et magnitudo Vulpis media eſt inter maximas et minimas Canis varietates, quae ergo commode ex ipſo deriuari poſſent. Attamen Vulpes magis adhuc, quam Lupus a Cane eſſentialiter differt, quoad partium variarum ſtructuram.

Teneritate pilorum Vulpes Canes domeſticos, ſi pauciſſimos excipias, adeo exſuperat, vt plane non veroſimile ſit, Canem ex Vulpe ortum duxiſſe, quia hic eſt ſtatus domeſtici effectus, vt pili teneriores, non rudiores euadant, id quod ratiocinio euinci poteſt ac inſuper Caprae, Ouis, aliorumque exemplo ſatis ſuperque patet.

Finge figuram Canis feri idealem, et conuenies nobiscum, roſtrum illius medium obtinere debere inter acutiſſima et obtuſiſſima Canis domeſtici roſtra. Sed Vulpis roſtrum minime hanc medietatem tenet, nam acutiſſimis Canum roſtris analogum eſt; hinc nec propter hanc qualitatem Canes domeſticos a Vulpe deriuare licet.

Quoad ſtructuram inteſtini caeci, in *Hiſtoria Buffoniana Tomo* VII. *Tab.* 5. repraeſentati, Vulpes a Cane magis adhuc differt, quam Lupus, qui nec tractus inteſtinalis proportionibus ad Canem accedit; nam ex *D'aubentonianis* in *Hiſtoria Buffoniana* traditis

tis obſeruationibus inteſtini tenuis longitudo ad corpus a roſtri apice ad caudae radicem metitum in Vulpe vt $3\frac{1}{2} : 1$; in Cane vt $4\frac{1}{2} : 1$; atque longitudo craſſi ſeu coli et recti ad tenue inteſtinum in Vulpe vt $1 : 6$; in Cane vt $1 : 5\frac{3}{4}$.

Tandem dentium primorum figura, quibus Lupus omnino cum Cane conuenit, Vulpes a Cane longe differt; nam in Vulpe nec ſuperiores horum trilobi, nec inferiores bilobi, ſed omnes integerrimi, nec vllo ſulco exarati. Quam Vulpis qualitatem, de qua *Hiſtoria Buffoniana* ſilet, in indiuiduis a me viſis, conſtantem obſeruaui.

Vulpem, quanquam obiter conſideratus Cani ſimillimus ſit, quis eſt qui, notis hiſce differentialibus allegatis, pro Cane ſero habere poſſet? Experimenta ab *Ill. Comite de* BVFFON circa inſtinctum venereum Vulpis inſtituta, et *Tomo* V. in capite de Cane atque *Tomo* VII. in capite de Vulpe recenſita, pariter Vulpem a Cane ſpecifice remouere iubent.

Expoſitis illis, ex quibus differentia ſpecifica inter Lupum, Vulpem et Canem elucet, reſtat, vt demonſtretur, inter Canem et Schacalam nullam differentiam ſpecificam exiſtere et omnia reliqua conſentire, Canem ex Schacala ortum eſſe.

Patria Schacalae, quae proprie Aſia minor cum regionibus adfinibus, ea eſt, quae pro animali domeſtico antiquiſſimo, hominibus primaeuis innoteſcendo requiritur. Praeterea ille Schacalae inſtinctus,

 ſecun-

ſecundum quem potius montoſa, quam campeſtria pro ſtatione ſibi eligit, probabile reddit, quod homines primaeui pariter montoſa inhabitantes potius Schacalam, quam Vulpem, in iisdem regionibus equidem obuium, ſed campeſtria non montoſa frequentantem, ſibi adſociauerint atque cicurauerint.

Ea Schacalae audacia, qua non ſolum loca habitata, vt Lupus et Vulpes ſolent, ſed ipſos homines viatores, ſub dio ſeu ſub tabernaculis pernoctantes, quos Lupi et Vulpes fugiunt, adit et in ipſo intinere longius comitat, vt omnes peregrinatores teſtantur et egomet ipſe expertus ſum, probabile facit, hocce animal quaſi inuito homine primaeuo troglodyte eius ſocietatem iniiſſe et comitem inſeparabilem ſubſequentis aeui nomadibus ex inſtinctu naturali ſeſe obtuliſſe. Hinc et hanc ob cauſſam Schacala multo veroſimilius, quam Lupus et Vulpes pro Cane ſero habenda eſt.

Magnitudo Schacalae naturalis media eſt inter maximas et minimas Canis varietates; pili Schacalae rigidiores ſunt, ac vnquam illi Canis eſſe ſolent; longitudo eorum media eſt inter longiſſimos et breviſſimos pilos, quibus variae Canis varietates praeditae ſunt; tandem roſtri Schacalae figura medium tenet inter acutiſſima et obtuſiſſima variarum Canis varietatum roſtra, quae ergo propter haec quatuor attributa facilius ex illa, quam ex Vulpe ſeu Lupo oriri potuerunt.

Dentium

Dentium primorum ſtructura, qua Canis a Vulpe differt, et inteſtiui caeci figura, qua Canis a Vulpe et Lupo recedit, Schacala omnino cum Cane conuenit; quod conferenti iconem in *Hiſtoria Buffoniana Tomo V. Tab.* 46. Canis caecum repraeſentantem, et Tab. X. Schacalae caecum ſiſtentem patebit. Tandem etiam proportionibus tractus inteſtinalis Schacala propius, quam Lupus et Vulpes, ad Canem accedit. Inteſtinum tenue cum longitudine corporis totius collatum in Lupo longius, quam in Vulpe; ſed in Cane villatico longius adhuc, quam in Lupo, et in Shacala eiusdem cum Cane dimenſionis, imo nonnunquam adhuc longius. Etenim inteſtinum tenue Schacalae ad eiusdem corporis longitudinem vt 5 : 1; inteſtinum caecum ad tenue eiusdem vt 1 : 31 : et craſſum ſeu colon et rectum ad tenue vt 1 : $5\frac{1}{7}$. Tab. X.

Moribus Schacalam ſimiliorem adhuc, quam ipſa partium ſtructura, Cani eſſe, certiſſimum eſt. Catulus captus facile cicuratur; et in hoſpitio adultus blanditur, homines laete adſpiciendo, caudam motitando, corpus proſternendo, vel in dorſo ſeſe proiiciendo, leui murmure ganniendo. Dominum diſtinguit a reliquis; ad nomen proprium ipſi impoſitum attendit; in menſam inuitatus inſilit; contortuplicatus dormit; lambendo bibit; ſcybala dura cacat; ad latus mingit; in ſocietate canum pacificus anum eorum odorat. Odor, quem Schacala per glandulas anales ſpargit, nec teterrimus, vt DVMON

voluit, nec Moſcho analogus, vt alii voluerunt; hunc eo Vulpis mitiorem et illo Canis foetore inſtante tempeſtate erumpente vix deteriorem eſſe ſentio.

Experimentum, quo coitum Schacalae maris cum Cane femina tentaui, non ſucceſſit; quia Schacala longo itinere Aſtrachania Petropolin inſtituto nimis confecta et inflammatione inteſtinorum (forte ex climate nimis frigido per tranſpirationis inſenſibilis ſuppreſſionem orta) vexata prius periit, antequam vnum alterumue horum animalium ad pubertatis et oeſtri venerei periodum peruenerit. Schacalam cum Cane facile generare, plurimis teſtimoniis conſtat, affirmante *Ill. Comite de* BVFFON; vid. *Ei. Hiſt. Nat.* Tom. XIV. in capite de animalium degeneratione.

Pruritu menſibus brumalibus Schacalis superveniente, alias rarius, cateruatim nocturno tempore incedunt et miſerrime clamitant. Vox eorum eiulantibus, non latrantibus Canibus analoga eſt. Nec dubitare licet latratum Canis hoſpitii effectum eſſe; nam Canis non niſi ex adfectu erga dominum latrat, vt periculum quodcunque inſtans indicet; quae vocis modificatio apud Schacalam, cauſſa in ſtatu fero deficiente, etiam deficit. Canes pygmaei, qui ſemper hominum ſocietati adſunt, impetuoſiſſime latrant; ſed magni, qui raro ad hominum ſocietatem admittuntur, vix vnquam vocem attollunt. Praeterea ex itineratorum experientia conſtat, Canes in regionibus per Zonam torridam et frigidam

ſitis

ſitis (quia ibidem vix hominum ſocietate fruuntur) taciturnos euadere, nec vnquam latrare, ſed tantum (fame ſeu venere ſtimulante) eiulare. Hinc latratus defectus nihil impedit, quo minus Schacala pro Cane fero habeatur.

Et hominibus et gregibus Shacalae multo minus, quam Lupi, et vix magis, quam Vulpes metuendae ſunt; nec naturam earum adeo ferocem comperui, ac in *Hiſtoria Buffoniana* deſcribitur. Animal hocce carniuorum equidem eſt; animalia minora phytophaga ſubigit; cadauera, etiam humana, adit; coriacea quaecunque auide deglutit; vuas, vt Canis, appetit; in captiuitate farinaceis et pane fere vnice per annum et vltra enutritum, quod propter nimiam tractus inteſtinalis longitudinem probabiliter Lupo et Vulpe minus vorax habendum eſt.

Canis caudam recuruatam minime pro charactere eſſentiali habere queo, ſed quod haec tantum ſtatui cicurato debeatur mihi perſuadeo. Canis non niſi hilaris et contentus caudam recuruat, quam timidus et metuens inter femora inflectit. Nec omnes Canum varietates aequaliter caudam recurvant, aliae plus, aliae minus, et illae, quae auriculis erectis inſtructae ſunt, (vt Canis villaticus ſeu paſtoralis, in *Hiſtor. Buffon. Tom.* V. *Tab.* 28. repraeſentatus), caudam extenſam et deflexam gerunt, pariter ac Schacalae. Nullam praeterea corporis partem magis cauda apud animalia domeſtica variare, patet Ouium et Canum exemplo. Quare nec

ob caudae figuram Schacalam a Cane ſpecifice diuerſam putare velis.

Nullos igitur characteres eſſentiales differentiales, quamquam tales *Ill. Comes de* BVFFON in *Tomo* V. *Hiſtor. Natur.* in capite de animalibus veteris mundi, adeſſe autumet, inter Schacalam et Canem inuenio. Omnis partium externarum internarumque ſtructura et proportio, nec non exiſtentia attributorum quae Cani fero ideali neceſſario competere debent, ſuadent, imo iubent, vt Schacala pro Cane fero habeatur, ex qua omnes, quae nunc exiſtunt, Canis varietates ortum duxerunt.

Quod Thos ARISTOTELIS cum Schacala noſtra animal idem ſit, mihi cum *Ill. Comite de* BVFFON veroſimile videtur, quia ſecundum PLINIVM libr. 8. cap. 34. " Thoës, luporum genus procerius longi-„ tudine, breuitate crurum diſſimile, velox ſaltu, „ venatu viuens, innocuum homini. „ An autem Pantheram ARISTOTELIS pro ſynonimo Thois, vel pro nomine varietatis Schacalae habere liceat, indeterminatum relinquo; nec affirmare audeo, an Adiue ſeu Adil Arabiae, Deeb Barbariae, Iaqueparel Bengaliae, Zenlie ſeu Kenlie Capitis bonae ſpei, Mebbia Aethiopiae et Nori Madurae vnum idemque animal, ſcilicet Shacalam noſtram, vt *Ill. Comes de* BVFFON vult, indicent. Illa, quae ARISTOTELES et itineratores varii de animalibus variis his nominibus imbutis tradiderunt nimis curta et indeterminata ſunt, vt exinde aliquid certi concludi poſſet.

poſſet. Ex incertis hariolari nolo; ſed hoc certo ſcio, quod nomen Tulki, quod *Ill. Comes de* BVFFON OLEARIO fidens pariter inter Schacalae ſynonima (vid. *Hiſtor. Natur. Tom.* XIII.) recepit, in Turcia aſiatica nunquam Schacalae ſed Vulpi imponatur, id quod ex ipſa OLEARII deſcriptione patet, ſecundam quam animali illi obuio auriculae nigrae attribuuntur, quae Vulpibus vbique nigrae, Schacalis autem ſemper brunneae ſunt. Pariter per curas *Cl.* PENNANT nouiſſimas certiſſimum eſt, quod Iakal BOSMANI in Guinea viſus, quem *Ill. Comes de* BVFFON etiam pro Schacala noſtra habet, animal ſit ab illa diuerſiſſimum, a *Cl.* PENNANT Hyaena maculata appellatum; vid. *Ei. Synopſis of Quadrupeds* p. 162.

Ita facillime errant peregrinatores, qui vel notitia Zoologica, vel patientia ad incolarum examen neceſſaria carent. Eiusmodi peregrinator, nominibus incolarum ſimpliciter contentus, iuraret etiam in Vcrania et Polonica et Ruſſica cis et trans Dynaprin Schacalas dare, quia animal ibidem frequens eſt, cui incolae nomen Tſchacal imponunt. Gnarus autem ipſo animale examinato perſpiciet animal hocce in Vcrania Tſchacal dictum idem eſſe, quod in reliquis Ruſſiae et Poloniae prouinciis ſlavonice Wolk dicitur, quodque Lupus vulgaris eſt.

Dari in rerum natura, praeter Lupum et Vulpem, et alia animalia Schacalae plus minusue adfinia, certiſſimum eſt. Iſatis, animal in Sibiria indigenum,

genum, cuius deſcriptio et in *Commentariis nouis Petropolitanis Tom.* V. et in *Hiſtoria Buffoniana Tom.* XIII. tradita eſt; atque Corſac, animal in campis ad maris caſpii orientem vulgare, cuius ſuccincta determinatio in *Syſtemate Naturae Linneano editionis duodecimae* occurrit, probant hoc. An ad vnum alterumue horum animalium nomina antea prolata referri debeant, an diſtincta his adfinia animalia denotent, merito quaeri poteſt? Eademque quaeſtio circa animalia americana, Goſchis ſeu Goſques et Alco dicta, mouenda eſt. Nec certi quid reſponderi poterit, antequam Zoologi rite inter ſe haec animalia contulerint.

Quibus omnibus perpenſis nihil amplius affirmare audemus, quam animal hocce, quod nobis Canis ferus eſt, in omni Perſia et Turcia aſiatica indigenum, in campeſtribus rarius, in ſubmontoſis frequentiſſimum, ſed non vltra Caucaſi iugum ſeptentrionem verſus obuium eſſe. Tatari, Turcae, Perſae et Ruſſi per gubernium Aſtrachanenſe communi nomine Schacal appellant animal hocce, vocales *a* varie cum *i* et *e* mutando, et litteram initialem variter nunc lenius, nunc aſperius, vel vt *Sch*, vel vt *S* latinum, vel etiam vt *I* gallicum, nunquam autem, quantum ſcimus, vt *I* germanicum ſeu latinum pronunciando; hinc male in verſione germanica *Hiſtoriae Buffonianae* Iacal dicitur hoc animal, quod ſat recte gallice Iacal ſeu Chacal appellatum eſt ab auctore. Hanc denominationem, vt vul-

vulgatiſſimam et realem, retinemus, quae inſuper illa Lupi aurei ſeu Chryſei magis determinata eſt. Nam caue, ne habeas Schacalam pro Lupo per clima degeneratum. Et Schacala, et Lupus, pariter ac Vulpes in vno eodemque climate per Georgiam frequentes inueniuntur, notis diſtinctiuis ſpecificis ſemper caſte ſeruatis et vulgo georgiano euidentiſſimis, cui Schacala Tura, Lupus Gmeli, Vulpes Mela dicitur.

Criticis his praemiſſis ad Schacalam pertinentibus, atque ponderatis illis a KAEMPFERO in *Amoenitatibus exoticis p.* 413. relictis, atque a collega olim coniunctiſſimo optimo GMELINO noſtro in *Tomo* III. *Itinerarii p.* 80. traditis, vt hodoeporica reliqua taceamus, per peregrinatores equidem celebratiſſimum, attamen minime diſtincte notum eſſe conſtat animal hocce. Tradamus igitur amplam et ſcientificam, a Zoologis, inter quos inſtar omnium LINNE (*a*) et PENNANT (*b*) denominandi ſunt, ſummopere deſideratam animalis huius, ſaepius in Georgia contemplati et cultro anatomico ſubiecti deſcriptionem, quo in poſterum de differentia,

(*a*) Vid. Ei. Syſtem. Natur. Edit. 12. Tom. I. p. 60. Deſcriptio, inquit, genuina etiamnum deficit.

(*b*) Vid. Ei. Synopſis of Quadrupeds p. 159. It is ſtrange, that an animal ſo common in the Levant, ſhould never have been brought over to be deſcribed by any modern Naturaliſt. The deſcriptions yet remain very obſcure.

tia, vel conuenientia animalium affinium, vel ſub eodem, vel ſub alio nomine oblatorum absque hallucinatione iudicare poſſent Zoologi.

DESCRIPTIO SCHACALAE.

Schacala *magnitudine* Vulpem vix ſuperat, quae *phyſionomia* et reliquo corporis habitu inter Lupum et Vulpem media eſt. Indiuidua longitudine trium pedum cum dimido, qualia GMELINVS *l. c.* indicat, nunquam vidi; attamen *Gmelinianae* obſeruationi fidem derogare nolo. Indiuiduorum, quae mihi obuiam iuerunt, corpus a roſtri apice ad caudae radicem linea recta metitum, inter 26. et 28. pollices pariſinos variauit. *Icon* Tab. XI. hic adnexa ſiſtit animal magnitudine naturali quadruplo minus. Hanc ob exactum ſimilitudinem Phyſiophilis gratiſſimam fore confido, cum figurae, quas VALENTINVS in *Muſeo Muſeorum Tom.* I. *pag.* 452. et KAEMPFERVS atque GMELINVS *l. c.* dederunt, peſſimae ſint.

Tab. XI.

Caput multo breuius, *roſtrum* obtuſius, *buccae* minus gibbae, *frons* conuexior magisque carinata, quam Vulpis. *Oculi* magis conuergentes atque minores vulpinis; *iride* brunneo-luteſcenti. *Naſus* vltra labium ſuperius tantillum prominens, nudus, niger, humidiuſculus, naribus extrorſum recuruis. *Labia* laxiuſcula, nigra, inferiore ſubemarginato. *Lingua* laeuis.

Myſtaces labii ſuperioris ſex ordinum, ſupremo remotiori, breuiſſimo, recuruo; reliquis horizontalibus;

libus; labii inferioris minus regulariter ordinatae, ad margines laterum illius occurrentes, longitudine variae, ſed tres pollices non excedentes.

Verrucae facici ſeptem; ſupraorbitalis vtrinque vnica, in medio palpebrae ſuperioris tripilis; infraorbitalis vtrinque vnica, ſuperiori ſuboppoſita, in eadem cum oris commiſſura linea, tripilis; parotica vtrinque vnica, in medio inter oris angulum et auriculae foramen ſita, bipilis; gularis impar, detrita, multipilis; harum verrucarum *ſetae* myſtacibus ſubaequales et concolores, omnes aterrimae, rigidiſſimae et ſubcorneae; ſed accedunt in ſingula verruca tres ſeu plures ſetae minus rigidae atque detritae, pariter ac Vulpi et Lupo.

Auriculae erectae, vulpinis analogae, ſed breviores, totae piloſae, intus albidae, extus brunneae, fuliginoſo tantillum ſubadumbratae, ſed nunquam vt in Vulpe atrae.

Collo et *corpore* Vulpi ſimillima, attamen corpus magis compreſſum vulpino; nam diameter trunci maxima perpendicularis ſeptem, transuerſalis quinque pollicum pariſinorum.

Pedes iis Vulpis ſimillimi, niſi altiores; digiti toti piloſi, ita vt vngues vix promineant; ſed in planta et palma tubercula quinque nuda, nigra, quibus animal incedit; quorum quatuor apicibus digitorum reſpondent, ſed quintum his interpoſitum,

 approxi-

approximatum et maius; accedit verruca conica parua, nigra, in flexura carpi obuia.

Digiti pedum quatuor, quorum duo intermedii aliquantum longiores lateralibus, omnes ſubpalmati; *pollex*, in pedibus poſticis deficiens, in anterioribus ad latus interius metacarpi adeſt breuiſſimus, eleuatus. *Vngues* in omnibus digitis et in pollice obuii, aequales, nigri, compreſſi, ſubincurui, acutiuſculi, breues, fixi.

Cauda medio ſubincraſſata, apice attenuata, vbique piloſa, calcaneum vix attingens, lupinae valde, vulpinae minime ſimilis, quam animal currens rectam extendit, ceterum deflexam gerit.

Perinaeum ſeſquipollicem latum, piloſum; *vuluae* labia ſtricta, piloſa, clitoridem conicam, tres lineas longam obtegentia; vagina $3\frac{1}{2}$ pollicem longa; ſcrotum et praeputium ſtrictum, ſubpiloſum; *penis* nodoſus, oſſe ſcatens, canino ſimillimus. *Mammae* in mare plane non viſibiles; in femina non lactante difficillime detegendae, quarum vtrinque vel 4. vel 5. plus minusue diſtincte numeraui.

Pili vulpinis multo, ſed lupinis vix rigidiores; in roſtro breuiſſimi; in reliquo capite et pedibus aliquantum longiores; in abdomine multo longiores; in dorſo iterum longiores, tres pollices ſuperantes; in caudae apice longiſſimi, quadripollicares. *Suturae* et *vortices*, quae in Canibus pilis vbique breuibus veſtitis

ſat

ſat euidentes ſunt, in Schacala, pariter ac in Canibus longitudine pilorum illi aequalibus, obſoletiſſimae et vix diſtinguendae. Pilis trunci interpoſitum *vellus* cinereum, illis dimidio breuius. *Colorum* elegantiam non tantam, ac auctores depraedicauerunt, certe nullum auri nitorem percipio; animal totum ſupra ſordide fuluum, nigro in dorſo plus, in lateribus minus adumbratum, ſubtus luteſcerti-albidum. Pedes vnicolores brunneo-fului, carpi flexura anterius ſaepius, non ſemper, macula obſoleta nigricante notata. Cauda dorſo concolor, apice nigro. Pili dorſi faſciis quatuor picti, quae ad baſin alba, dein nigra, tum fulua, apice iterum nigra, duabus primis $\frac{2}{3}$ longitudinis totius pili occupantibus; ſed pili apicis caudae baſi tantum albidae, dein totae nigrae.

Dimenſiones partium externarum, quae in animali a plurimis affinibus non niſi proportione partium differente maximi momenti ſunt, dabo conformes illis, quas *Cel.* D'AVBENTON in *Tomo* VII. *Hiſtoriae Buffonianae* de Lupo et Vulpe dedit. Menſura adhibita eadem eſt pariſina ſecundum pollices et lineas.

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae radicem	27	9
Altitudo ab interſcapulio ad apicem digitorum anticorum - - - - - -	17	6
Altitudo a lumbis ad apicem digitorum poſticorum - - - - - -	18	—
Longitudo capitis a roſtro ad occiput - -	6	—

 Cir-

	poll.	lin.
Circumferentia roſtri pone nares	4	9
—— —— —— —— ad oculos	6	3
—— —— —— oris	6	—
Diſtantia inter nares	—	4
—— —— —— apicem roſtri et cantum anteriorem	2	6
—— —— —— cantum poſticum et aurem	2	1
—— —— —— cantos oculi	—	9
—— —— —— —— anticos in linea curua	1	7
—— —— eadem in linea recta	1	3
Circumferentia capitis inter oculos et aures	11	—
Longitudo auricularum a vertice	2	9
Diſtantia inter aures interne in vertice	2	4
Longitudo Colli a gula ad oſſis ſterni caput	5	—
Circumferentia colli contracti	9	—
—— —— —— corporis pone pedes anticos	14	—
—— —— —— —— — maxima	15	4
—— —— —— —— — ante pedes poſticos	13	4
Longitudo caudae ad pilorum extimorum apicem	10	—
Circumferentia caudae ad baſin laxa	6	—
Longitudo antebrachii a flexura cubiti ad carpum	5	9
Circumferentia carpi	3	6
—— —— —— metacarpi	2	10
Longitudo a carpo ad apicem vnguium	4	3
—— —— cruris a genu ad calcaneum	6	—

Cir-

	poll.	lin.
Circumferentia calcanei - - - -	4	—
——— ——— metatarſi - - - -	2	7
Longitudo a calcaneo ad apicem vnguium -	5	6
——— vngium maximorum - - - -	—	8

Deſcriptione atque dimenſionibus hiſce collatis cum illis, a *Cel.* D'AVBENTON in *Tomo* V. *Hiſtoriae Buffonianae* de Canis varietatibus traditis, euidens eſt, quod Canis vulgo domeſticus ſeu villaticus dictus et in eodem *Tomo* V. *Tab.* 28. repraeſentatus proxime ad Schacalam accedat. Attamen non diffitendum, Canes dari maiori adhuc ſimilitudine cum Schacala gaudentes; vidi per Ruſſiam Canes vulgares vellere luteſcenti - brunneo haud nimis longo, auriculis erectis, roſtro acuminato inſtructos, Schacalae magnitudine et has ob cauſſas Schacalae ſimillimos.

Viſcera Canis, Lupi et Vulpis, vt ex obſervationibus *D'aubentoneanis* conſtat, non niſi ſtructura inteſtini caeci et proportionibus inter ſe diſcrepant; ſed Schacala plana non a Cane differt. *Inteſtini caeci* Schacalae, Tab. X. magnitudine naturali exhibiti, Tab. X. curuaturae duplices (*a* et *b*); crure primo (*c*) inteſtinum tenue (*d*) verſus procedente; crure ſecundo (*e*) huic incumbente, colon (*f*) verſus retrogrado; ambobus celluloſa arcte connexis; tertio (*g*) ſublibero, reliquis ſaepe anguſtiore, fundo caeco (*h*) prominulo, iterum tenue verſus ſpectante. Conferenti iconem eiusdem partis Canis, *Tab.* 46. in

in *Tomo* V. *Hiſtoriae Buffonianae* occurrentem, patet, differentiam praeter variam repraeſentationis methodum nullam exiſtere. Ea quae datur inter longitudinem canalis cibarii Lupi, Vulpis, Schacalae et Canis diuerſa proportio iam ante allegata eſt.

Sequuntur *dimenſiones viſcerum* Schacalae eaedem, quas *Cl.* D'AVBENTON in *Hiſtoria Buffoniana* de Vulpe et Cane dedit.

	poll.	lin.
Longitudo lobi ſiniſtri hepatis maximi -	6	9
Eiusdem lobi latitudo maxima - -	3	6
—— —— craſſities maxima - - -	—	3
Longitudo veſicae felleae - - -	1	5
—— —— lienis ab extremitate ſuperiore ad angulum - - - - - -	7	3
—— —— —— ab angulo ad extremitatem inferiorem - - - - - -	4	4
Latitudo maxima ad angulum - - -	2	—
—— — minima lienis - - -	—	11
Longitudo pancreatis - - - -	12	—
Latitudo pancreatis - - - -	—	11
Longitudo renis - - - -	1	10
Latitudo renis - - - - -	1	1
Craſſities renis - - - - - - -	—	7
Longitudo veſicae vrinariae - - -	2	3
—— —— inteſtini tenuis a cardia ad caecum - - - - - - - -	140	—
—— —— coli et recti - - -	22	—
—— —— cruris primi caeci - - -	2	2

Lon-

	poll.	lin.
Longitudo cruris ſecundi caeci - -	3	3
Diameter inteſtini tenuis - - -	—	10
——— inteſtini coli - - - -	1	3
———————— caeci - - -	1	3
Ventriculi diameter in linea recta a cardia ad angulum atrii pylori - - -	3	3
Diameter ventriculi a cardia ad fundum -	2	6
—— —— —— — longitudinalis maxima -	7	6
—— —— —— — perpendicularis maxima	4	6
—— —— eiusdem transuerſalis maxima -	4	9
Longitudo arcus maioris ventriculi in linea curua a cardia ad pylorum - -	19	10

Quanta eſt quoad partes externas et viſcera conuenientia inter Lupum, Vulpem, Canem atque Schacalam, tanta etiam de *oſſibus* horum animalium depraedicanda eſt. Accuratiſſimae a *Cel.* D'AVBENTON in *Hiſtoria Buffoniana* traditae Oſteologiae horum animalium addamus quasdam in Schacala inſtitutas animaduerſiones.

Cum ex capitis figura et inter varias Canis varietates et inter Vulpem et Schacalam facillime et euidentiſſime differentiam perſpicere liceat; conſultum eſſe duximus, *icones oſſium capitis* et Schacalae et Vulpis dare. *Tabulae* XII. *figura* 1. ſiſtit oſſa Tab. XII. cranii Schacalae inter ſe ſuturis iuncta, maxilla inferiore remota, quam *figura* 2. repraeſentat; atque in *Tabula* XIII. *figura* 3. et 4. exhibent easdem Tab. XIII.

 Vulpis

Vulpis (*) partes magnitudine ſemper naturali. Quoad arcus zygomatici figuram et orbitae marginem, nec non quoad oſſa frontis, naſi et roſtri, atque quoad dentes et hamulum apophyſeos pterygoideae Schacala magis cum Lupo, quam cum Vulpe; ſed quoad oſſa parietalia et occipitale, et quoad ſuturas earum Schacala magis cum Vulpe, quam cum Lupo conuenit. *Arcus zygomaticus* Schacalae (*a*) minus extrorſum curuatus, quam Vulpis (*b*); ex margine ſuperiore *zygomatis* Schacalae prominet *ſpinula* (*c.*), ex eminentia apophyſeos zygomaticae oſſis malae atque ex apice eiusdem apophyſeos oſſis temporum orta, interſtitium ad cantum poſteriorem ſeu exteriorem orbitae anguſtius reddens, quam in Vulpe, quia apud illum haec ſpinula deficit. *Oſſa frontis* Schacalae (*d.* fig. 1.) conuexa ſunt, quae in Vulpe introrſum plana, extrorſum autem, in eo ipſo loco, quem littera *d.* fig. 4. occupat, in foſſam depreſſa ſunt. *Oſſa naſi* (*e*) et *roſtri* (*f*) Schacalae multo latiora ſunt, quam eadem Vulpis (*g.* et *h.* fig. 4.) oſſaque naſi Schacalae verſus apicem roſtri minus extenſa ſunt, quam Vulpis, hinc apertura narium Schacalae longior, quam Vulpis; atque *oſſa malae* Schacalae ad foramen infra orbitale (*B.* fig. 1.) multo conuexiora ſunt, illis Vulpis ad idem foramen (*c.* fig. 4.), exinde roſtrum Schacalae multo obtuſius illo Vulpis.

Dentes

(*) Vulpis, cuius caput repraeſentatum, longitudo ab apice roſtri ad caudae radicem erat 23. poll. pariſ. Schacalae autem 27. poll. 9. lin. pariſ.

Dentes primores ſuperiores Schacalae (*i.*), quorum vtrinque tres in arcu ſat conuexo diſpoſiti, qui in Vulpe in linea fere recta ſiti ſunt (*k.*). Quatuor intermedii dentes primores Schacalae, quos *figura* 3. *Tab.* XII. exhibet, vtrinque ſulco exarati et denticulis aucti ſunt; ſed vtrinque extimi integerrimi. Dentes iidem Vulpis omnes integerrimi, vt ex *figura* 6. *Tab.* XIII. patet; ſed inquiratur per indiuidua plura, an ſemper ita, an tantum animale vel catulo, vel ſene, vt Canibus ſolemne. Dentes primores ſuperiores Iſatis omnino denticulati. *Dentes primores inferiores* Schacalae (*l.* fig. 2.) emarginati et bilobi ſunt, lobulo exteriore minore, qui pari medio minimus et ſaepius vix vllus; dentes iidem Vulpis (*l.* fig. 5.) integri, truncati. *Dentes laniarii* Schacalae (*m. m.* fig. 1. et 2.) breuiores et craſſiores ſunt iis Vulpis (*n. n.* fig. 4. et 5.). *Dentes molares* Schacalae (*o. o.* fig. 1. et 2.) et laniario et inter ſe approximati; Vulpis (*p. p.* fig. 4. et 5.) diſtantes. Et Shacalae et Vulpis radix dentis molaris primi ſuperioris et inferioris ſimplex; ſecundi et tertii ſuperioris atque ſecundi, tertii et quarti inferioris bifida; quarti et quinti ſuperioris atque quinti inferioris trifida; ſexti ſupra infraque bifida; ſeptimi inferioris iterum ſimplex. Quoad figuram coronae dentium molarium, et quoad ſitum dentium ore clauſo Schacala exacte cum Cane conuenit, ſecundum exactiſſimam Canis deſcriptionem a *Cl.* D'AVBENTON datam. Nec Lupi molares dentes ab iis Schacalae differunt, niſi in eo, quod ſextus ſu-

Tab. XII.

Tab. XIII.

 perior

perior et ſeptimus inferior ſaepius adeo detritus ſit, vt vix alueoli veſtigium adſit.

Hamulus apophyſeos pterygoideae oſſis ſphenoidei Schacalae horizontalis eſt (*q.* fig. 1.) ac idem Lupi, quem Vulpes perpendicularem (*q.* fig. 4.) habet.

Oſſa bregmatis Schacalae (*r.* fig. 1.) aliquantum conuexiora, hinc et theca cranii amplior, quam Vulpis (*s.* fig. 4.), qui his qualitatibus Lupum iam multum ſuperat. Nonne hanc ob cauſſam Vulpes Lupo, atque Schacala et Canis Vulpe aſtutior? *Proceſſus ſagittalis* ex angulo ſuperiore *oſſis occipitalis* procedens et vltra medium ſuturae ſagittalis oſſium parietalium extenſus (*u.* fig. 1.) vix prominet et reliqua ſuturae ſagittalis pars (*t.* fig. 1.) omnino plana eſt in Schacala; hinc criſta illa ſagittalis, quae in Lupo eminentiſſima et in Vulpe obſoleta eſt (*v.* fig. 4.), in Schacala fere deficit. *Sutura lamdoidea* Schacalae (*w.* fig. 1.) pariter minus criſtata ac in Lupo et Vulpe (*w.* fig. 4.)

Apophyſis condyloidea (*x.*) et *maſtoidea* (*y.*), *petra* (*z.*) et *eminentia articularis apophyſeos zygomaticae* (*A.*) Schacalae (fig. 1.) et Vulpis (fig. 4.) vix differunt, quae etiam Lupo ſtructurae eiusdem.

Vertebrae, *coſtae*, *oſſa ſterni*, ac *peluis* Schacalae et quoad numerum, et quoad figuram atque proportionem, cum partibus iisdem Canis a *Cl.* D'AVBENTON in *Tomo* VII. *Hiſtoriae Buffonianae* deſcriptis conueniunt, ſi pauca minus momentoſa, quae ſequuntur, excipere velis.

Apophyſes transuerſales vertebrae primae lumborum integrae, non bifidae; *apophyſes ſpinoſae vertebra-*

tebrarum lumborum ſubaequales, nec apophyſis quintae reliquis longior, ſed potius pariter ac ſeptimae breuior; *vertebrae oſſis ſacri* tres et *caudae* 19. vltima breuiſſima, ſexta, ſeptima, octaua, nona et decima longiſſimis inter ſe aequalibus. Numerum vertebrarum caudae Schacalae inter 18. et 20. variare fere crederem, pariter ac Canis et Vulpis; illius *Cl.* D'AVBENTON 16 – 20. vidit, huius idem 19. ego 20. numeraui. *Manubrium oſſis ſterni* Schacalae rectum, pariter ac reliqua eiusdem oſſis membra, nec ſurſum curuatum. *Proceſſus ſtyloidei* ad apophyſes articulares poſteriores vertebrarum lumborum primae et tertiae acutiſſimi et euidentiſſimi; iidem vertebris dorſalibus vndecimae, duodecimae et decimae tertiae obtuſiores et breuiores; ſed vertebris lumborum ſecundae, quartae, quintae et ſextae obſoletiſſimi.

Oſſa extremitatum pariter cum illis Canis, Vulpis et Lupi conueniunt. *Scapula* Schacalae aliquantum ab illa Canis a *Cl.* D'AVBENTON deſcripta differt; nam et baſis et margo anterior eiusdem leviſſime arcuata ſunt, et angulus anterior rotundatus ac obtuſiſſimus; margo poſterior rectilineus et angulus poſterior acutus. *Oſſa metacarpi* quinque, ſed metatarſi tantum quatuor, accedente, ſub oſſe cuneiformi tertio tarſi, oſſiculo ſeu rudimento quinti oſſis metatarſi, pariter ac in Cane (vid. *Hiſtor. Buffon. Tom.* V. *Tab.* 52. *fig.* 3. ſub *litt.* A.). Pollicis in pede poſteriore rudimentum, quod in Canibus ſaepius adeſt, in Schacala nunquam obſeruatum.

Dimenſiones oſſium Schacalae equidem iam aliquae in *Tomo* XIII. *Hiſtoriae Buffonianae* datae ſunt;

addamus attamen plures coronidis loco ex eodem indiuiduo, cuius partium externarum et viſcerum menſurae antea exhibitae ſunt, quo omnia ad hiſtoriam huius animalis pertinentia eo euidentiora euadant. Menſura ſemper eadem pariſina ſecundum pollices et lineas.

	poll	lin.
Longitudo capitis a dentibus primoribus intermediis vsque ad angulum ſuperiorem oſſis occipitis - - - - - -	5	4
Latitudo capitis maxima ad zygoma - -	2	10
—— — thecae cerebri maxima - -	1	11
Longitudo maxillae inferioris a dentibus primoribus intermediis vsque ad angulum -	4	—
Latitudo maxillae inferioris ad dentes laniarios - - - - - - -	—	7
—— — eiusdem ad interſtitium dentis quarti et quinti molaris - - - -	1	2
—— — eiusdem maxima ad angulos - -	2	2
—— — maxillae ſuperioris ad dentes primores extimos - - - -	-	10
—— — eiusdem ad dentes laniarios - -	1	—
—— — —— — maxima ad interſtitium quarti et quinti molaris - - -	1	11
Diſtantia minima inter orbitam et nares -	1	7
Longitudo aperturae narium - - -	—	9
Latitudo aperturae narium - - -	—	7
Longitudo oſſis narium maxima - -	1	8
Latitudo eius maxima ad extremitatem anteriorem - - - - -	—	3

Latitudo

	poll.	lin.
Latitudo orbitae - - - -	—	10
Altitudo eiusdem - - - -	—	11
Latitudo foraminis vertebrae colli primae perpendicularis - - - -	—	8
—— — eadem transuerſalis - - -	—	8
Longitudo apophyſeos transuerſalis eiusdem vertebrae - - - - - -	—	10
—— —— corporis eiusdem vertebrae inferius ſeu antrorſum - - -	—	$2\frac{1}{2}$
—— —— eadem ſuperius ſeu retrorſum -	—	6
—— —— corporis ſecundae vertebrae colli -	1	2
Altitudo apophyſeos ſpinoſae eiusdem - -	—	5
Longitudo ſeptimae vertebrae colli, quae breuiſſima - - - - -	—	6
Altitudo longiſſimae apophyſeos ſpinoſae vertebrae ſeptimae colli - - - -	—	7
—— —— breuiſſimae apophyſeos ſpinoſae vertebrae tertiae colli - - -	—	3
Longitudo vertebrarum dorſalium omnium -	7	—
Altitudo apophyſeos ſpinoſae longiſſimae vertebrae dorſi primae - - - -	1	4
—— —— apophyſeos ſpinoſae breuiſſimae vertebrae decimae dorſi - - -	—	5
Longitudo corporis vertebrae decimae tertiae dorſi, quae longiſſima - - -	—	8
—— —— corporis vertebrarum dorſi primarum breuiſſimarum - - -	—	5
—— —— coſtae primae - - -	1	6
Diſtantia inter coſtas primas maxima - -	1	1

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo coſtae ſeptimae, quae longiſſima -	3	6
—— —— —— vltimae ſpuriae - -	2	11
Latitudo coſtarum maxima - - -	—	4
—— —— —— minima - - -	—	2
Longitudo oſſis ſterni - - - -	6	2
Altitudo apophyſium ſpinoſarum vertebrarum lumborum - - - -	—	7
Longitudo apophyſeos transuerſalis vertebrae lumborum quintae, quae longiſſima -	—	10
—— —— corporis vertebrae eiusdem, quod longiſſimum - - - - -	—	11
—— —— oſſis ſacri - - - -	1	2
Latitudo eiusdem interius - - -	1	2
—— —— —— exterius - - -	1	1
Longitudo longiſſimarum vertebrarum caudae, quae intermediae - - - -	—	8
—— —— oſſium inominatorum maxima -	4	—
Diameter acetabuli - - - -	—	8
—— —— peluis perpendicularis - -	1	8
—— —— eiusdem transuerſalis - -	1	3
Longitudo foraminis oualis - - -	—	9
Latitudo eiusdem - - - - -	—	6
Longitudo ſcapulae maxima - - -	3	5
Latitudo baſeos ſcapulae - - - -	1	6
—— — eius minima - - -	—	8
Altitudo maxima ſpinae ſcapulae - -	—	7
Diameter cauitatis glenoideae ſcapulae -	—	8
Longitudo humeri - - - -	4	8
Diameter eius minima - - - -	—	4

Latitudo

	poll.	lin.
Latitudo maxima extremitatis ſuperioris humeri - - - - - -	1	2
—— — maxima extremitatis inferioris -	—	11
Longitudo cubiti - - - - - -	5	2
Altitudo olecrani - - - - - -	1	1
Latitudo minima cubiti - - -	—	2
Longitudo radii - - - - - -	4	6
Latitudo eius in medio - - -	—	4
Longitudo femoris - - - - - -	5	3
Latitudo maxima extremitatis ſuperioris femoris - - - - - -	1	1
—— — in medio femoris - - -	—	4
—— — extremitatis inferioris femoris - -	1	1
Longitudo tibiae - - - -	5	1
Latitudo extremitatis ſuperioris tibiae maxima	1	1
—— — in medio tibiae - - - -	—	5
—— — extremitatis inferioris tibiae maxima	—	8
Longitudo fibulae - - - -	4	8
Latitudo extremitatis ſuperioris fibulae maxima - - - - - - -	—	3
Latitudo extremitatis inferioris fibulae maxima - - - - - - - - -	—	4
Longitudo carpi maxima - - -	—	5
Latitudo carpi maxima - - - -	—	9
Longitudo tarſi maxima - - -	1	9
Latitudo tarſi maxima - - - -	—	8
Longitudo oſſis primi metacarpi - -	—	8
—— —— —— ſecundi et quinti metacarpi -	1	7

	poll	lin.
Longitudo oſſis tertii et quarti metacarpi -	2	—
—— —— —— primi et quarti metatarſi -	2	—
—— —— —— ſecundi et tertii metatarſi -	2	2
—— —— primae phalangis pollicis antici -	—	4
—— —— —— —— —— ſecundi et quinti digiti - - - - - - -	—	7
—— —— eadem tertii et quarti antici -	—	9
—— —— ſecundae phalangis pollicis - -	—	2
—— —— eiusdem phalangis digiti ſecundi et quinti pedum anteriorum - -	—	4
—— —— eiusdem phalangis digiti tertii et quarti - - - - - - -	—	6
—— —— tertiae phalangis digiti ſecundi et quinti pedum anteriorum - - -	—	4
—— —— —— —— —— —— tertii et quarti pedum anteriorum - - -	—	5
—— —— primae phalangis primi et quarti -	—	7
—— —— eiusdem phalangis ſecundi et tertii -	—	9
—— —— ſecundae phalangis primi et quarti	—	4
—— —— —— —— —— — tertii et ſecundi	—	6
—— —— tertiae phalangis primi et quarti -	—	4
—— —— —— —— —— ſecundi et tertii digiti pedum poſteriorum - - -	—	5

CHAVS.

CHAVS,
ANIMAL FELI AFFINE DESCRIPTVM

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Affinitas, qua animalia plurima, quorum *Cel.* Pennant, (vid. Ei. *Synopſis of Quadrupeds*), ſpecifice diſtincta enumerauit octodecim, Feli ſeu Cato, quem ceu notiſſimum nominamus, coniuncta ſunt, adeo arcta ac multiplex eſt, vt vix niſi magnitudine corporis, caudae et auricularum proportione, atque pilorum colore tantillum inter ſe externe differant. Illa, quae auriculis barbatis gaudent, facile a reliqua affinium cohorte diſtinguuntur. Olim praeter Lyncem, nulla alia ad hanc familiam pertinens, hac nota inſtructa ſpecies cognita fuit. Innotuit dein ſaeculo praeterito labente per itineratores Africam et Perſiam auſtralem viſitantes, quos inter Schaw et Thevenot eminent, alterum cognatum animal auriculis pariter barbatis inſtructum, a Lynce ſat diuerſum, quod tandem in *Hiſtoriae Naturae Buffonianae Tom.* IX. et XII. ſcientifice ſub nomine Caracalis (*) deſcriptum atque

Ppp 2 icone

(*) Nomen huius animalis turcicum: Karrah Kulak; et perſicum: Siyah Ghuſh, non Catum nigrum, ſeu Catum auriculis nigris, vt Schaw, (vid. Voyages de Monſieur Shaw T. I. p. 320.) et ill. Comes de Buffon illi peregrinatori

icone bona repraeſentatum, nec non a D. PARSONS in *Transact. Philoſoph.* T. LI. p. 648. atque a *Cel.* PENNANT in Synopſi quadrupedum (ſp. 137.) illuſtratum eſt. Addidit nuper Zoologus hic acutiſſimus, (vid. ſp. 136. in *Synopſ. of Quadrup.*) animal americanum Lynci proximum, quod illi Felis ruffa (bay cat) dicitur. Addamus nunc alterum animal aſiaticum Caracali adeo cognatum, ac Felis ruffa Lynci, quod a nobis Chaus appellatur.

Denominationem hanc a nemine neotericorum triuialiter receptam, de qua haud certo conſtat, an per illam Lyncem, an aliud analogum animal indicauerit PLINIVS, animali huic hucusque Phyſiophilis vix cognito propriam reddere conſultiſſimum duximus, deficiente nomine vernaculo ſat diſtincto. Ruſſis enim, pariter ac Tataris et Tſchircaſſis ad maris caſpii littora, quae animalis huius patria, habitantibus, illud in linguis eorum haud aliud nomen, quam feri ſeu ſylueſtris Cati ſortitum eſt; Ruſſis nimirum: dikaja Koſchka; Tataris: kir Myſchak; Tſchicaſſis: moes Gedu dicitur, atque ab illis cum vero Cato fero, a quo Cati domeſtici ortum duxerunt, in regionibus mari caſpio conterminis etiam indigeno, eodemque nomine ſalutato, plerumque confunditur. Reliqua congenera animalia, Lynx ſcilicet

---

grinatori fidens volunt, ſignificat; ſed ſimpliciter nigrauritum, ſeu melanotum indicat. Nam tatarice ſeu turcice Kara: niger, et Kulach: auris; et perſice Sia: niger, et Guſsh: auris, vt iam ſat recte CHARLETON in *Exercitationibus de differentiis et nominibus animalium* annotauit.

ſcilicet atque Leopardus BVFFONII, regiones caucaſicas inter mare caſpium et nigrum ſitas pariter inhabitantia, incolis propter pellem generoſam adeo memorabilia ſunt, vt propriis nominibus diſtinctiſſima reddiderint; Lynx Ruſſis: Rys; Tataris: Sylauſyn; Georgianis: Potzchori; Oſſetinis: Iſtai; Tſchezenſis: Zoak; Leopardus autem Ruſſis: Bars; Georgianis: Wepchy; Tataris ac Awaris et reliquis: Kaplan ſeu Chaplan.

Quatuor haec affinia caucaſicis regionibus propria animalia ſtationibus haud parum inter ſe differunt. Lynx fere vbique, et in montoſis, et in alpeſtribus, quatenus ſyluatica ſunt, occurrit; Catus ferus illius plerumque ſocius, attamen in montoſis ſyluaticis frequentior, quam in alpinis; Leopardus caucaſica montoſa rupeſtria, eaque maxime meridionalia frequentat, circa Teflifium, Georgiae metropolin, a nobis viſus, vix vlterius ſeptentrionem verſus procedens; Chaus in campeſtribus praeſertim inundatis vel arundine vel arboribus obſitis, mare caſpium et fluuios illud petentes ambientibus degit. Ad fluuium Terek circa caſtellum ruſſicum Kislar, et inferius vſque ad oſtium illius obſeruauimus Chaum; qui ſeptentrionem verſus rarior et circa Wolgae oſtium haud inueniendus, auſtrum verſus autem frequentior, praeſertim circa Cyri oſtium et in prouinciis perſicis Gilan et Maſanderan.

Chaus moribus, voce et diaeta ſummopere analogus eſt Cato fero. Interdiu plerumque latitat,

noctu vagatur in inundatis et campis, rarius arbores ſcandit, piſces, Rattos Muresque varios atque aues in arundinetis et arboribus nidificantes venaturus, in praedam inſiliens. Ad loca culta non accedit animal ferox, impatientiſſimum atque iracundum, vnguibus dentibusque ſaeuiens. Antebrachio forcipe venatoria ferrea, qua captum fuit animal, diffracto, abſtinuit omnino a pane et piſcibus duobus integris coram in eadem ciſta per duodecim dies, quas in captiuitate adhuc ſuperſtes fuit, iacentibus; e contra baculum in ciſta obuium, cui alligatum erat, et palmam propriam pedis fracti momordit ita, vt et ligni fruſtula et vngues phalangesque digitorum in ventriculo poſt mortem inuenierentur. Pertinaciſſimo hoc morſu dentes fere omnes deſtruxit, praeſertim laniarios, qui, ceu tubercula obtuſa et carioſa, vix e gingiuis adhucdum prominuerunt. Phaenomenon mehercle! ſingulare animalis in proprium corpus, cibo non deficiente, ſaeuientis, atque a cibo, naturae conuenientiſſimo et alias expetito, (nam et ad forcipem piſce allicitum fuit), abſtinentis, et quaſi pica lignum appetente laborantis. Anne mortem promouere maluit, quam vitam doloraſam atque ſeruilem viuere? Indiuidium alterum in captiuitate piſcibus large victitans, alto ſilentio ſemper ſeruato, inquietiſſimum ſemper et ore ſpumante iraſcens tribus menſibus praeterlapſis pariter periit. Hinc etiam ferociſſima agilitate et Cato et reliquis congeneribus ſimillimus Chaus. Quo pateat in quo hic ab illis differat, tradamus

deſcriptio-

deſcriptionem partium illius externarum internarumque huc vſque deſideratam.

DESCRIPTIO CHAI.

Statura Chai media inter Catum et Lyncem, quae ex icone, Tabula XIV. repraeſentata, euidentiſſime patet. *Magnitudine* Chaus plerumque Catum ſuperat, vt pariter ex icone, quae naturali quadruplo minor, conſtat. Longitudo ab apice roſtri ad caudae radicem vulgatiſſima duorum pedum cum dimidio; ſed occurrunt etiam indiuidua tribus pedibus longiora. Tab. XIV.

Caput equidem rotundatum, ac illud Cati, attamen nonnihil oblongius, *phyſionomia* parum differente. *Oculi* fulgentes, inquieti; *iride* nitidiſſime aurea; *pupilla* in vmbra circulari et ampla, ſed interdiu perpendiculari - oblonga; *membrana nyctitante* albida; margine nigra; *palpebris* eciliatis. *Naſus* oblongus, obtuſus, labio ſuperiore breuior, totus piloſus; naribus anguſtis rotundatis, nigris. *Labium ſuperius* ſubbifidum, *inferius* integrum, tantillum ſuperiore breuius; vtrumque nudum, nigrum. *Lingua* latitudinis vbique aequalis; apice obtuſo, tenui, papillis tenuiſſimis viſu, non tactu percipiendis obſito; ſed in medio linguae papillae longae, acuminatae, rigidae, omnes retrorſum ſpectantes, atque ad radicem papillae calyculatae ſex, vtrinque tres convergentes obuiae; verbo lingua ſimillima linguae Lyncis; (vid. *Hiſtor. Natur. Buffon.* Tom. IX. Tab. 22.).

Rugae

Rugae palati octo tranſuerſae, antrorſum conuexae, (quarum octaua vltima obſoleta), anteriorem palati regionem occupantes, vtrinque papillis plurimis tuberculoſis mollibus obſitae. *Myſtaces* labii ſuperioris plurimae, detritae, vix bipollicares; *verruca* ſupraocularis ſeptempilis, porotica bipilis; ſetae hae myſtacibus breuiores; omnes albae. *Auriculae* erectae, ouatae, illis Cati non dimiſſiles, ad baſin marginis exterioris conchula auctae, intus albido-piloſae, pilis verſus marginem interiorem longioribus, verſus marginem exteriorem ſumme detritis, extus totae ruffae; ſed apice pilis pollicaribus nigris, non in penicilli modum, vt in Lynce, barbatae, ſed potius vt in Caracale (vide icones a *Cel.* PENNANT et PARSONS *l. l. c. c.* datas) fimbriatae.

Trunci figura omnino eadem ac Cati.

Pedes pariter illis Cati ſimillimi, toti piloſisſimi; anteriores pentadactyli, pollice remoto et eleuato; poſteriores tetradactyli; digitis inſiſtentes, quorum quilibet tuberculo nudo, nigro, ſubcalloſo terminatur, accedente in vola plantaque tuberculo magno rotundato et in carpi flexura alio paruo conico. *Vngues* retractiles, albi, compreſſi, acuti.

Cauda vix calcaneum attingens, cylindrica, truncata, vbique piloſa.

Perinaeum pollice anguſtius, ſubpiloſum. *Scrotum* et praeputium ſtrictum, piloſiſſimum. *Labia vaginae* ſtrictiuſcula, rugoſa, *clitoridis* rudimento, vix capitulo aciculae maiore, nudo aucta. *Mam-*

mae

mae octo ; duae vtrinque pectorales , totidemque abdominales , et a perinaeo et inter ſe quatuor pollicibus diſtantes ; in mare vix percipendae.

Pili lyncinis et felinis rigidiores, ſed lupinis teneriores ; in capite breuiſſimi ; in regione vmbilicali longiſſimi ; ii , qui in dorſo longitudinis mediae ſunt , duorum pollicum et ſex linearum. *Color* capitis et trunci ſupra et extremitatum fuſco-luteſcens ; gulae et regionis vmbilicalis albidus; pectoris et abdominis dilute luteſcens. *Auriculae* extus brunneae, apice nigro. *Cauda* dorſo concolor, ſed apicem verſus albido et nigro obſolete ter annulata , ipſo apice nigro. Ad cubiti et genu flexuram introrſum faſciae duae transuerſae obſoletae , nigrae. *Palmae* et *plantae* atque digiti ſubtus etiam nigrae. *Vellus* pilis, praeſertim in dorſo, interpoſitum tenue, pilis dimidio breuius , baſi griſeum , apice albido-luteſcens. *Pili* dorſi fuſci , ante apicem faſcia luteſcenti , ſed pili laterum luteſcentes , faſcia ante apicem fuſca picti ; pili pectoris et abdominis totae luteſcentes. Sutura in pectore cruciformis.

Sequuntur *dimenſiones* aliquae *partium externarum* Chai , ſecundum londinenſes

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad anum	30	—
Altitudo ab interſcapulio ad digitorum apicem	19	—
——— a lumbis ad digitorum apicem	20	—
Longitudo capitis a roſtro ad occiput	5	6
Peripheria extremi roſtri	4	6

	poll.	lin.
Peripheria roſtri ante oculos - - - -	6	9
Circumferentia rictus oris - - -	4	6
Longitudo inter roſtrum et cantum anteriorem - - - - - -	1	8
—— —— inter cantum poſticum et aurem - - - - - - -	2	4
Diameter oculi - - - - -	—	11
Peripheria capitis inter oculos et aures -	10	6
Longitudo auricularum a baſi marginis interni ad apicem auris - - - -	2	9
—— —— eadem vſque ad apicem pilorum - - - - - -	3	9
Diameter inter auricularum baſin internam -	2	9
—— —— —— cantos oculi anteriores - -	1	1
—— —— —— —— —— — poſteriores -	2	5
Peripheria thoracis ante pedes anteriores -	12	—
—— —— eadem pone pedes anteriores -	14	9
—— —— abdominis maxima - - -	18	—
Longitudo caudae - - - - -	11	4
Peripheria caudae piloſae - - -	6	—
Longitudo antebrachii - - - -	6	3
—— —— a flexura carpi ad apicem digiti medii - - - - - -	4	—
—— —— cruris - - - - - -	8	—
—— —— a flexura calcanei ad apicem digitorum mediorum - - - -	6	3
—— —— vnguium - - - -	—	6

Quoad ſtructuram Chai internam ſequentia notatu digna videntur.

Pulmo

Pulmo vterque trilobus; ſed accedit lobulus quartus ad pulmonem dextrum pertinens, inter cor et diaphragma ſitus, in mediaſtino poſtico ſacculo quaſi proprio incluſus. *Tracheae* annuli linea latiores, poſtice quoad quartam partem circumferentiae ſtrato muſculari muniti. *Cor* apice ſternum attingens, ouo gallinaceo maius, pericardio pinguedine ſtipato. Ex arcu *aortae* rami duo. *Diaphragmatis* ſpeculum ſubrotundum, anguſtum, ſpinam verſus ſpectans.

Hepar vix hypochondrium ſiniſtrum attingens, diaphragmati ſub coſtarum curuatura a ventriculo adpreſſum, vt aperto abdomine plane non in conſpectum veniat; *ventriculus* ſub hepate hypochondrium ſiniſtrum replens, per regionem epigaſtricam dextrorſum extenſus; *lien* ſub ventriculo per ſupremam regionis vmbilicalis partem ex hypochondrio ſiniſtro procedens; *pancreas* pone lienem et pylorum ſitus; *inteſtina* in hypogaſtrio repoſita, in pelui nulla; *veſica vrinaria* ſupra ſymphyſin pubis prominens; *omentum* ab arcu ventriculi maiori et hilo lienali deſcendens ad veſicam vrinariam vſque, inteſtina in regione iliaca dextra obuoluens et pone inteſtina ad latus ſpinae dorſalis dextrum iterum hepar verſus adſcendens; *inteſtinum craſſum* a margine exteriore renis ſiniſtri recta ad anum procedens, *caeco* ſupra extremitatem ſuperiorem huius renis dextrorſum verſus ſpectante et ſpinae dorſi incumbente. Haec de *ſitu viſcerum* aperto abdomine animaduertendo; nunc *ſpecialia*.

Hepatis lobi tres dextri, atque totidem ſiniſtri, qui iis multo minores; lobus dexter ſuperior omnium maximus, hypochondrium dextrum et cardiacam regionem occupans, ſiniſtrorſum ad medium fere vſque fiſſus, pro recipenda veſica fellea; lobus dexter inferior ſuperiore quadruplo minor, reni dextro concauitate ſua incumbens; inter quem et ſuperiorem dextrum lobus medius, magnitudine media et figura acuminata; loborum ſiniſtrorum duo ſuperiores, quorum exterior ventriculo incumbens maior, interior minor et ligamento ſuſpenſorio a lobo dextro ſeparatus, ambo baſi adeo connexi, vt non improprie pro vno lobo bipartito haberes; ſiniſtrorum tertius minimus, vix auellana maior, ſpinae incumbens ſub collo veſicae felleae; color hepatis extus lateritius, intus violaceus.

Veſica fellea vulgo ſubcylindrica et rugoſa; ſed in animale, quod ieiunio per duodecim dies ſeruato exſpirauit, pyriformis, laeuis, ampliſſima, oui gallinacei magnitudine, bile viridiſſima, tenaci, deficientibus cibis eam conſumentibus in tantam copiam accumulata.

Lien tenuis et fere membranaceus, oblongus, medio anguſtior, extremitatibus rotundatus et emarginatus, ſeptempollicaris, vix ſeſquipollicem latus, atro-rubens.

Pancreas duodecim pollices longum, pollice anguſtius, tenue, aequale, integrum, ex hypochondrio ſiniſtro ab extremitate ſuperiore lienis tranſuerſaliter

ſaliter per ſex pollices procedens et laxe omento adnexum, dein in latere dextro per ſex pollices deſcendens et duodeno adhaerens.

Ventriculus ſubouatus, ſimplex, arcu minori tres pollices et ſex lineas, atque arcu maiori ſex pollices et ſex lineas longo; diametro maxima trium pollicum; cardia ſtricta et incraſſata; fundo obtuſo; pyloro dilatato; membranis tenuibus; ſuperficie interna laeui et aequali.

Inteſtinum tenue diametri vbique ſubaequalis vix pollicaris, a pyloro ad caecum ſexaginta tres pollices longum; *caecum* pollice breuius, conicum, initio colo non anguſtius, tenue verſus recuruatum, pariter ac in Cato, quod in *Hiſtoria Buffoniana Tom.* VI. *Tab.* 7. *fig.* 1. optime repraeſentatum eſt; *craſſum* nec ſtructura, nec diametro a tenui differens, pariter laeue et aequale, absque cellulis et ligamentis externis, duodecim pollices longum. Ad omnem inteſtinalem tractum a pyloro vſque ad anum *meſenterium* adhaeret. *Superficies interna inteſtini* tenuis et caeci laeuis, ſed craſſi a caeco ad medium vſque longitudinaliter rugoſa, dein ad anum vſque iterum laeuis. Cauitas inteſtini tenuis mucum rubicundum et frequentiſſima Faſciolae inteſtinalis conuoluta continebant; feces in craſſo oblongae, conſtipatae.

Ad latera *ani* in vtroque ſexu adeſt vtrinque *conglomeratum glanduloſum*, rubicundum, ſubgloboſum, iuglande maius, externe capſula muſculari tenui

munitum, interne concauum; cauitas anguſta collabeſcens, vix vltra medium ſubſtantiae extenſa, tunica albicante, membranacea, facile ſecedente, foetente veſtita, et in inteſtinum rectum proxime pone ani aperturam foramine ſtylum ſat craſſum admittente vtrinque hians. Glandulae hae anales illis Leonis, quas *Cel.* D'AVBENTON in *Hiſtoria naturae Buffoniana Tom.* IX. graphice deſcripſit, equidem ſimillimae, ſed minus veſiculares et potius ſolidae, cum cauitas earum interna anguſtiſſima ſit parietibus plane contiguis. An eiusmodi glandulis Lynx et Caracal gaudeant, in *Hiſtoria Buffoniana* minime indicatum eſt.

Renes ouati, integri, absque hilo, ouo gallinaceo vix minores, ſubſtantia interna duplici euidentiſſima; capſula vera membranacea inuoluti; ſiniſter aliquantum altior dextro. *Capſulae atrabilariae* ad marginem internum renum ſitae, ſubmembranaceae, luteſcentes, non concauae. *Veſica vrinaria* ouata, e membranis craſſis muſcularibus conflata, oue gallinaceo maior.

Cornua vteri a ſymphyſi peluis pone veſicam ad renes vſque extrorſum adſcendentia, recta, nouem pollices longa, penna anſerina vix craſſiora, laeuia; alis veſpertilionum laxiſſimis regioni iliacae alligato, extremitate ſubintegra, et ouario oblongo, auellana minori, vireſcenti-luteo, introrſum pendulo aucta. *Ceruix vteri* duobus pollicibus longior, cylindrica, cornubus non amplior, interne obſolete

ſtriata,

ſtriata, et in medio valuula fundo caeco retrorſum ſpectante inſtructa. *Orificium vteri* ſtrictum, vix ſtylum tenuem recipiens, rugoſum. *Vagina vteri* vix pollicem longa, longitudinaliter rugoſa, nigricans, in fundo ſupra vteri orificium apertura *vrethrae* perforata.

Teſtes auellanae magnitudine, *epididyme* ſtricte adnexa, vaſis deferentibus immediate ad caput gallinaginis ſat prominulum in medio vrethrae hiantibus; *veſiculis ſpermaticis* et *proſtata* minimis ac vix vllis. *Corpora cauernoſa penis* cylindrica, bicruralia, a bifurcatione ad praeputii inſertionem ſeſquipollicem longa. *Vrethra* cylindrica, laxiuſcula, a collo veſicae vrinariae ad corporum cauernoſorum radicem fere quatuor pollices longa, in glandis extremitate ſimpliciter hians. *Glans penis* acuto-conica; apice laeuis, baſi vltra medium papillis rigidiuſculis muricata, quinque lineas longa, oſſiculo tenuiſſimo et lineari ſtipata.

Sceleton Chai ſummopere analogum eſt ſceleto Cati. Oſſa capitis Chai magnitudine naturali Tab. XV. repraeſentare operae pretium eſſe duximus, vt Zoologi in poſterum habeant, quo cum oſſa reliquorum animalium affinium conferre poſſint. *Dentes inciſores ſuperiores* ſex; intermedii quatuor parui, obtuſi, laterales maiores, acutiuſculi (*a.*); *inferiores* totidem (*b.*), obſolete bilobi, intermediis duobus minimis. *Dentes laniarii ſuperiores* (*c.*) ab inciſoribus remoti, conici, ſubincurui, tribus ſulcis Tab. XV.

in

in ſuperficie exteriore exarati; *laniarii inferiores* (*f.*) ſuperioribus analogi, tantillum breuiores, vnico ſulco in ſuperficie exteriore notati. *Dentes molares ſuperiores* quatuor (*d.*), a laniario remotiuſculi; primus minimus, tuberculoſus, vix e gingiua prominens, radice ſimplici; ſecundus magnus, tres lineas longus, compreſſo - conicus, retrorſum denticulo auctus, radice bifida; tertius omnium maximus quadridenticulatus, denticulis tribus exterioribus, vno interiori, radice triplici; quartus (*g.*) primo vix maior, tuberculoſus, introrſum ſitus, radice duplici. *Dentes molares inferiores* tres (*e.*), pariter a laniario remoti, ſubaequales; duo anteriores compreſſo - conici, denticulis vtrinque aucti; tertius ſeu poſterior quadratus, bifidus; radix his tribus bifida. Dentes igitur in vniuerſum triginta, quorum ampliorem deſcriptionem neceſſariam eſſe putauimus, cum nec de Cato, nec de reliquis illi affinibus talis in *Hiſtoria Buffoniana* data ſit. Situs dentium Chai ore clauſo idem eſt ac Cati, a *Cel.* D'AVBENTON in *Tomo* VI. *Hiſtoriae Naturae* ſatis ſuperque determinatus.

Criſta occipitalis in Chao euidentiſſima et fere cruciformis eſt. Sutura lamdoidea (*h.*) et os ſupernumerarium (*i.*), parti poſteriori ſuturae ſagittalis interpoſitum, tres criſtas primarias conſtituunt, ad quas accedit quarta criſtae ſagittali oppoſita, ad foramen magnum occipitale deſcendens, ſed obſoletior.

Figura apophyſeos condyloideae (*k.*) et maſtoideae (*l.*), foraminis ſtylo - maſtoidei (*m.*), aperturae

turae auris (*n.*), petrae (*o.*), cauitatis articularis (*p.*) pro recipienda apophyſi condyloidea maxillae inferioris (*z.*), partis ſquamoſae oſſis temporum (*q.*), alae magnae (β.) et apophyſeos orbitariae (γ.) oſſis ſphenoidei, portionis orbitariae oſſis palati (*t.*), oſſis et ductus lacrymalis (*u.*), oſſis zygomatici (δ.) et maxillaris ſuperioris (*w.*), oſſium roſtri (*x.*), naſi (*y.*), frontis (*s.*) et verticis (*r.*), atque *ſuturae* haec *oſſa capitis* inter ſe coniungentes ex icone ſat euidenter patent.

Reſtat, vt *dimenſiones* quaedam *oſſium capitis*, quae ex icone vix diuinari poſſunt, ſubiungantur, ſecundum londinenſes

ſecundum londinenſes - - -	poll.	lin.
Longitudo capitis a dentibus inciſoribus vsque ad centrum criſtae cruciformis occipitis - - - - - - -	5	—
—— —— ab eodem dentium puncto vſque ad marginem anteriorem foraminis magni occipitalis - - - -	4	4
Latitudo maxima capitis in medio zygomatis - - - - - -	3	4
—— — inter dentes inciſores ſuperiores -	—	6
—— — ad dentium laniariorum ſuperiorum radices - - - - -	1	$2\frac{1}{2}$
—— — inter dentes molares ſuperiores poſticos - - - - - - -	1	6
—— — inter foramina infraorbitalia - -	1	$4\frac{1}{2}$
—— — —— partes ſquamoſas oſſium temporum - - - - - -	2	—

	poll.	lin.
Latitudo inter aperturas auris - - -	1	8
—— — —— apophyſes coronoideas maxillae inferioris - - - - -	2	3
—— — —— extremitates interiores apophyſium condyloidearum maxillae inferioris - - - - -	1	5
—— — —— dentes molares inferiores vltimos - - - - - - -	1	3
—— — —— dentium laniariorum maxillae inferioris radices - - - -	—	8

Oſſa trunci et *extremitatum* Chai numero et figura cum oſſibus Cati, quae *Cel.* D'AVBENTON in *Tomo* VI. *Hiſtoriae naturae* deſcripſit, conueniunt; ſed *vertebrae caudae* tantum octodecim, quarum Cato viginti tres; *apophyſis lateralis* non ſolum *vertebrae ſextae colli* bifida, vt in Cato, ſed etiam ſeptimae obſolete bifida; apophyſis ſpinoſa vertebrae primae dorſalis omnium longiſſima, pollicem et tres lineas exſuperans, fere perpendicularis, reliquarum decreſcens et reclinata.

Ex hac Chai deſcriptione nunc abſoluta euidentiſſimum eſt, illum non ſolum a Cato fero, ſed etiam a reliquis proxime affinibus, Lynce, Feli ruffa et Caracale ſpecifice diſtinctum eſſe.

A Cato fero differt Chaus capite oblongiore; cauda minus attenuata atque breuiore; pelle vnicolore et plane non ſtriata; pilis rigidioribus; auriculis barbatis; papillis linguae omnibus retrorſum ſpectanti-

ctantibus; papillulis glandis penis minus frequentibus, minusque rigidis; tractu inteſtinali longiore; vertebris caudae quinque paucioribus.

A Lynce recedit Chaus cauda longiore, magisque attenuata; pelle vnicolore, nec maculato; pilis rigidioribus; dentibus duobus et vertebris caudae quinque pluribus; tractu inteſtinali breuiore.

A Fele ruffa facile diſtinguitur Chaus colore faciei et corporis vniformi, nec ſtriato, nec maculato.

A Caracale tandem Chaus ſeparandus capite minus oblongo; pilis auriculae apicis dimidio brevioribus; colore auricularum brunneo, non nigro; cauda annulata; glande penis echinata, quae Caracali laeuis; pulmone ſiniſtro trilobo, non bilobo; tractu inteſtinali breuiore; vertebris caudae quinque paucioribus.

Liceat tandem, ceu corollaria, ex antea dictis deriuata, addere nomina animalium horum quatuor proxime affinium ſpecifica, methodo *Linneana* confecta, in vſum *Syſtematis Naturae Linneani* in poſterum forte conuertenda. Sit igitur

Lynx: Felis auriculis apice barbatis; capite et corpore albido-ruffo, nigro maculato; cauda obſolete annulata, apice nigra;

Felis ruffa: Felis auriculis apice barbatis; capite ruffo, fronte et temporibus nigro ſtriatis; corpore ruffo, fuſco maculato; cauda ſubtus et apice alba, ſupra nigro faſciata;

 Caracal:

Caracal: Felis auriculis apice barbatis, extus nigris; capite, corpore et cauda vnico coloribus fuſcenti-brunneis;

Chaus: Felis auriculis apice nigro barbatis, extus brunneis; capite, corpore et caudae baſi vnicoloribus, fuſceſcenti-luteis; cauda apicem verſus albido et nigro annulata, ipſo apice nigro.

Chaus igitur Caracali omnium proximus; Caracal autem animalia Feli affinia illis, quae Cani affinia ſunt, arctiſſime adiungit.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE TRAIECTV CITISSIMO STELLAE PER DVOS CIRCVLOS ALMICANTARATH DATOS PRO QVALIBET ELEVATIONE POLI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Referat circulas BAZPab meridianum loci propoſiti, in quo punctum Z ſit zenith et P polus; tum vero circuli AMa et BNb ambo almicantarath dati, ac ponamus quantitates, quae nobis dantur, 1°. complementum eleuationis poli ſeu diſtantiam poli a zenith $PZ = c$. 2°. Diſtantiam ſuperioris almicantarath Aa a zenith Z ſiue arcum $ZA = Za = a$, inferioris autem almicantarath diſtantiam a zenith $ZB = Zb = b$, interuallum autem inter hos circulos vocetur breuitatis gratia $AB = d = b - a$. His igitur datis quaeritur ſtella S, quae motu ſuo diurno percurrens parallelum SMN ambos almicantarath ita ſecet in punctis M et N, vt ductis circulis horariis PM et PN angulus MPN fiat omnium minimus, quandoquidem hic angulus praebet menſuram temporis, quo ſtella ſpatium inter hos almicantarath contentum traiiciat. Pro hac igitur Tab. XVI. Fig. 1.

tur ſtella ponamus eius diſtantiam a polo $PS = PM = PN = s$; vnde ſtatim innoteſcet declinatio huius ſtellae. Vocetur vero etiam angulus horarius $MPN = Z$.

§. 2. Ante omnia autem hic obſeruandum occurrit, hanc quaeſtionem tantum ad eas ſtellas fixas extendi, quae motu ſuo diurno per ambos circulos Aa et Bb tranſeunt. Primo igitur omnes eae ſtellae hic excluduntur, quarum diſtantia a polo minor eſt arcu $Pb = b - c$, propterea quod tales ſtellae non tranſirent per circulum Bb; deinde etiam excluduntur omnes ſtellae, quarum diſtantia a polo maior eſt arcu $PZA = a + c$, propterea quod tales ſtellae non per circulum ſuperiorem Aa tranſirent. His excluſis eae tantum ſtellae fixae relinquuntur, quorum diſtantia maior eſt quam $b - c$, ſimul vero minor quam $a + c$; ita vt iam certum ſit diſtantiam quaeſitam $PS = s$ contineri intra hos limites $s > b - c$ et $s < a + c$; vnde intelligitur, limitem $a + c$ maiorem eſſe debere quam $b - c$. Quodſi enim foret $a + c < b - c$ ſiue $2c < b - a$ ſiue etiam $c < \frac{1}{2} d$, quaeſtio noſtra foret impoſſibilis; quocirca neceſſe eſt, vt arcus $PZ = c$ ſuperet dimidium diſtantiae $AB = d$. Hoc autem niſi contigerit, etiam ſolutio, quam quaerimus, fieri debet imaginaria.

§. 3. Quoniam igitur ea diſtantia ſtellae a polo $PS = s$ requiritur, vnde angulus MPN oriatur omnium minimus, ſecundum methodum maximorum et minimorum concipiamus aliam ſtellam s a quaeſita infinite parum remotam, quae motu ſuo diurno

diurno ambos almicantarath traiiciat in punctis m et n; ac ductis horariis Pm et Pn neceſſe eſt, vt angulus mPn etiamnunc ſit aequalis angulo MPN. Vnde manifeſto ſequitur, angulos elementares MPm et NPn inter ſe aequales eſſe debere; quare cum ſit $PM = PN$ et $pm = pn$, ambo triangula elementaria PMm et PNn inter ſe perfecte erunt aequalia, ideoque erunt etiam anguli PMm et PNn inter ſe aequales. Auferantur vtrinque anguli recti PMS et PNS ac remanebit iſta aequalitas

$$\text{ang } SMm = \text{ang.} SNn \text{ ſiue ang.} SMA = \text{ang.} SNB.$$

Quoniam igitur iſta aequalitas ex conditione minimi eſt deducta, diſtantia ſtellae a polo $PS = s$ ita definiri debet, vt parallelus a puncto P deſcriptus ad ambos noſtros almicantarath Aa et Bb aequaliter inclinetur; ex qua proprietate ſolutio noſtri problematis facillime deriuabitur.

§. 4. Ducatur nunc ex puncto Z ad ambo interſectionum puncta M et N circuli verticales ZM et ZN, qui ergo circulis Aa et Bb normaliter inſiſtent. Vnde cum inuenerimus eſſe ang. SMA = ang. SNB, erunt etiam complementa SMZ et SNZ inter ſe aequalia; et quia anguli PMS et PNS etiam ſunt recti, erunt quoque anguli ZMP et ZNP inter ſe aequales. Quare cum ſit $ZA = ZM = a$ et $ZN = ZB = b$, praeterea vero poſuerimus $PM = PN = s$, bini triangula ſphaerica ZMP et ZNP non ſolum latus $PZ = c$ habent commune, ſed etiam tam latera PM et PN, quam angulos ZMP et Tab. XVI. Fig. 2.

Z N P habebunt aequales. Quodſi ergo in verticali Z N abſcindamus portionem N Q $=$ M Z $= a$, erit portio Z Q $= b - a = d$; et quia iam in binis triangulis ſphaericis P M Z et P N Q primo ſunt latera P M $=$ P N $= s$, deinde etiam M Z $=$ N Q $= a$, atque inſuper anguli intercepti Z M P $=$ Z N P, haec triangula perfecte inter ſe erunt aequalia. Hinc ergo etiam aequalia erunt tertia latera P Z $=$ P Q $= c$ et angulus Z P M $=$ ang. Q P N, a quibus ſi auferatur angulus communis M P Q, remanebunt anguli aequales Z P Q $=$ M P N $=$ Z. Sicque quia nunc in triangulo Z P Q omnia tria latera ſunt cognita, ſcilicet Z P $=$ P Q $= c$ et Z Q $= d$, inde ſtatim inveniri poteſt angulus Z P Q $=$ Z, qui nobis praebet menſuram temporis illius minimi, quo ſtella S ambos circulos almicantarath datos A a et B b traiicit.

§. 5. Cum triangulum Z P Q ob P Z $=$ P Q $= c$ ſit iſoſceles, biſecetur angulus Z P Q arcu P O, qui ergo erit normalis ad latus Z Q idque in O biſecabit, ita vt ſit angulus Q P O $=$ ang. Z P O $= \frac{1}{2}$ Z et latus Q O $=$ Z O $= \frac{1}{2} d$; quare cum in triangulo rectangulo P O Q ſit hypothenuſa P Q $= c$ et cathetus Q O $= \frac{1}{2} d$, ex regulis Trigonometricis erit

$$\text{ſin. OPQ} = \frac{\text{ſin. QO}}{\text{ſin. PQ}} \text{ hoc eſt ſin. } \tfrac{1}{2} Z = \frac{\text{ſin. } \frac{1}{2} d}{\text{ſin. } c}.$$

Sicque innoteſcit minimum tempus, quo ambo circuli A a et B b a ſtella traiici poſſunt. Ex hac formula iam ſtatim intelligitur, niſi fuerit ſin. $\frac{1}{2} d <$ ſin. c, talem tranſitum fieri impoſſibilem, quia prodiret

ſin. $\frac{1}{2}$

ſin. $\frac{1}{2}Z > 1$ id quod egregie conuenit cum conditione initio memorata, qua obſeruauimus eſſe $c > \frac{1}{2}d$.

§ 6. Vt nunc etiam alteram noſtram incognitam s, ſiue diſtantiam ſtellae a polo PS obtineamus, ex triangulo PQO definiemus angulum PQO ope regulae cognitae, qua eſt

$$\text{coſ.}\, PQO = \frac{\text{tang.}\, QO}{\text{tang.}\, PQ} = \frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}d}{\text{tang.}\, c}.$$

Hinc autem pro triangulo PQN erit

$$\text{coſ.}\, PQN = -\frac{\text{tang.}\, \frac{1}{2}d}{\text{tang.}\, c}.$$

Sicque in hoc triangulo habemus duo latera $PQ = c$ et $QN = a$ cum angulo intercepto PQN; vnde colligitur tertium latus $PN = s$ ope formulae

$$\text{coſ.}\, PN = \text{coſ.}\, PQ\, \text{coſ.}\, NQ + \text{ſin.}\, PQ\, \text{ſin.}\, NQ\, \text{coſ.}\, PQN$$

hoc eſt

$$\text{coſ.}\, s = \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, a - \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, c\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}d$$

quae formula reducitur ad hanc

$$\text{coſ.}\, s = \frac{\text{coſ.}\, c}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}d}\, (\text{coſ.}\, a\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}d - \text{ſin.}\, a\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}d).$$

Cum autem in genere ſit

$$\text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, q - \text{ſin.}\, p\, \text{ſin.}\, q = \text{coſ.}\, (p + q)$$

hac reductione adhibita ob $a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a + b)$ habebimus iſtam formulam ſatis concinnam

$$\text{coſ.}\, s = \frac{\text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, \frac{1}{2}(a + b)}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}(b - a)}.$$

§. 7. Haec autem ſolutio elegantiſſima ſine vlla analyſi ſequenti modo geometrice repraeſentari poterit: interuallum binorum circulorum almicanta- Tab. XVI. Fig. 3.

 rath,

rath, ſcilicet arcus A B biſecetur in puncto, C eritque $AC = BC = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(b-a)$ et arcus $ZC = \frac{1}{2}(a+b)$; quibus notatis primo pro loco ſtellae S ſeu eius diſtantia a polo P S habebitur iſta determinatio

$$\text{coſ. } PS = \frac{\text{coſ. } PZ \text{ coſ. } ZC}{\text{coſ. } AC}$$

ac pro ipſo tempore traiectus minimo, cuius menſura eſt angulus M P N, erit

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} MPN = \frac{\text{ſin. } AC}{\text{ſin. } PZ}$$

vbi arcus P Z eſt complementum eleuationis poli. Hoc igitur modo ſine dubio ſolutionem ſimpliciſſimam problematis propoſiti ſumus nacti, quae, niſi hoc artificium fuiſſet adhibitum, in calculos vehementer prolixos praecipitaſſet.

DE

CIRCVLO MAXIMO FIXO IN COELO CONSTITVENDO, AD QVEM ORBITAE PLANETARVM ET COMETARVM REFERANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nunc quidem ſatis ſuperque ſit euictum, planetas ob eorum actionem mutuam in motu ſuo aliquam perturbationem pati, quae potiſſimum in promotione apheliorum cernitur: nullo modo dubitare licet, quin etiam poſitio et inclinatio mutua, quam orbitae planetarum inter ſe tenent, non leues mutationes ſubire debeat, quae quidem demum poſt longum temporis interuallum fiant notabiles. Hinc in recentioribus tabulis aſtronomicis progreſſio annua nodorum cuiusque planetae ſollicite aſſignari ſolet, etiamſi Aſtronomi circa quantitatem huius motus parum inter ſe conſentiant; ex quo intelligitur, plurimum adhuc abeſſe, vt iſta nodorum mutatio ſatis ſit explorata. Quod quo clarius appareat, ex tabulis tam *Caſſinianis* quam *Halleianis* promotionem

tionem ſecularem nodorum cuiusque planctae excerpamus

Promotio ſecularis lineae nodorum

	ex tabulis Caſſinianis			ex tabulis Halleianis		
Pro Saturno	1°	35′	11″	0°	30′	0″
Pro Ioue	0	40	9	1	23	20
Pro Marte	0	56	40	1	3	20
Pro Venere	0	56	40	0	51	40
Pro Mercurio	1	24	40	1	23	20.

§. 2. Cauſſa huius enormis diſſenſus manifeſto in hoc eſt quaerenda, quod ex recentioribus obſeruationibus, etiamſi aliquot ſeculis a ſe inuicem diſtent, vix quicquam de vero loco nodi cuiusque planetae definire licet; cum error aliquot graduum in loco nodi commiſſus tam exiguum diſcrimen in latitudine planetae pariat, vt in obſeruationibus, niſi ſint exquiſitiſſimae, vix ſentiri poſſit, propterea quod inclinationes orbitarum ad eclipticam nimis ſunt paruae, quam vt effectus ex tali errore oriundus ſatis diſtincte definiri queat. Antiquiſſimae vero obſeruationes plerumque tantopere ſunt incertae, vt errores plurium minutorum primorum in iis agnoſci debeant; vnde nihil prorſus pro ſitu nodorum, qui illo tempore locum obtinuerit, concludi poſſit. Solae obſeruationes illius temporis, vnde aliquid certi definiri poſſe videtur, ſunt ſine dubio occultationes ſtellarum fixarum a planetis commemoratae, quae autem rariſſime occurrunt; ac praeterea haud leuis incertitudo circa loca illarum ſtellarum fixarum hunc

hanc diſquiſitionem plurimum impedit. Multo maiorem autem fontem huius incertitudinis in inclinatione, quam orbitae planetarum antiquiſſimis illis temporibus tenuerint, mox detegemus.

§. 3. Quamuis autem Aſtronomi ſuper motu nodorum tantopere inter ſe diſſentiant: tamen in hoc inter ſe omnes conuenire videntur, quod inclinationem orbitarum ad eclipticam inuariabilem ſtatuant, quemadmodum ex ſequenti comparatione tabularum aſtronomicarum patebit

Inclinatio orbitarum planetarum ad eclipticam

	ex tabulis Caſſinianis			ex tabulis Halleianis		
Pro Saturno	2°	30′	36″	2°	30′	10″
Pro Ioue	1	19	30	1	19	10
Pro Marte	1	50	54	1	51	0
Pro Venere	3	23	20	3	23	20
Pro Mercurio	7	0	0	6	59	20.

Verum ex hoc egregio conſenſu plus concludere non licet, quam quod his poſterioribus ſeculis inclinationes planetarum ita ſe habuerint, prouti hic aſſignantur. Nihil autem hinc certi pro antiquoribus temporibus colligi poteſt, dum iſti auctores ſine vlla ratione quaſi tacite ſupponunt, eandem inclinationem pro ſingulis planetis omni tempore locum habuiſſe; id quod non ſolum theoriae maxime aduerſatur, vti mox clariſſime oſtendemus, verum etiam nullis plane obſeruationibus confirmari poteſt. Atque hinc ſimul patebit, etiam poſitionem nodorum pro temporibus anti-

antiquiſſimis maxime incertam eſſe debere. Si enim his temporibus inclinatio cuiuspiam planetae maior minorue fuiſſet quam hodie deprehenditur, nihil certi nequidem ex occultationibus ſtellarum fixarum illis temporibus obſeruatarum concludi poterit; vnde intelligitur, hanc incertitudinem etiam in motum nodorum maxime redundare. Ex quo patet, aſtronomos etiamnunc circa hoc argumentum in Aſtronomia vtique maximi momenti in grauiſſimis tenebris verſari.

§. 4. Si quidem ecliptica, vti omnes Aſtronomi ante hac ſunt arbitrati, in coelo perpetuo eundem locum occuparet: rationes non deeſſent, cur orbitae planetarum ſemper eandem inclinationem ad eclipticam ſeruarent, non obſtante eorum actione mutua, prorſus vti inclinatio media orbitae lunaris ad eclipticam omni tempore eadem eſt obſeruata. Verum cum nunc quidem nullum amplius dubium ſuperſit, quin obliquitas eclipticae ab antiquiſſimis temporibus ingentem diminutionem ſit paſſa, atque hinc etiam inſignem alterationem non ſolum in longitudine ſtellarum fixarum, ſed etiam in earum latitudine eſſe ortam: certum omnino eſt, eclipticam hodie longe alium ſitum inter ſtellas fixas occupare quam ſeculis praeterlapſis. Quare cum ſolae ſtellae fixae nobis in coelo loca reuera fixa exhibere ſint cenſendae, ſi quidem hinc non nullas ſtellas peculiares excludamus, in quibus Aſtronomi quandam mutationem obſeruarunt: certiſſimis rationibus iam eſt euictum, poſitionem eclipticae in coelo inſigni mutationi eſſe

ob

obnoxiam. Tanto minus igitur praetendi poterit, orbitas planetarum reſpectu eclipticae eandem perpetuo inclinationem conſeruare. Si enim hodie ecliptica vltra 20 minuta prima a ſitu quem tempore Hipparchi tenuit receſſit, quo iure quisquam affirmare poterit, inclinationem orbitarum planetarum reſpectu eclipticae illis temporibus eandem fuiſſe, quanta hodie obſeruatur?

§. 5. Quae cum ita ſint, facile intelligitur, neque ex obſeruationibus neque etiam ex theoria quidquam certi circa motum nodorum et inclinationem orbitarum planetarum cognoſci et ſtatui poſſe, quamdiu haec elementa ad circulum in coelo tantopere variabilem, qualis eſt ecliptica, referuntur: ſed omnino neceſſe eſſe, vt ea perpetuo ad circulum quendam fixum in coelo, qui omni tempore eundem ſitum obtinuerit, reducantur; quandoquidem hinc demum concludi poteſt, quantum lineae nodorum ſuper tali circulo fuerint promotae et quantam variationem inclinatio orbitae cuiusque planetae reſpectu eiusdem circuli ſit paſſa. Atque adeo hanc neceſſitatem iam nonnulli inſignes Geometrae, qui hoc ipſum argumentum tractare ſunt aggreſſi, agnouerunt et aequatorem ſolarem propoſuerunt, ad quem perpetuo orbitae planetarum referantur. Cum autem ſuper hoc aequatore ſolari Aſtronomi nondum ſint ſatis certi et introductio talis circuli ab ecliptica tantopere diuerſi calculos nimium moleſtos poſtularet, quibus opus eſſet ad loca planetarum obſeruata eo

reducenda, praeterquam quod adhuc incertum ſit, vtrum ille aequator Solis tandem non aliquam alterationem patiatur nec ne: multo commodius hoc negotium confici poſſe videtur, ſi loco talis circuli in coelo immoti ipſae eclipticae ſitus ſubſtituatur, quem certo quodam tempore obtinuit. Sic enim multo facilius loca planetarum, quae tempore quocunque fuerit obſeruata, ad iſtam eclipticam determinatam reuocari poterunt; vnde non dubito, eum circulum maximum in coelo pro hoc ſcopo ſtabilire, quocum ipſo initio huius ſeculi ecliptica conuenerit.

§. 6. Poſitio igitur quam ecliptica ipſo initio huius ſeculi in coelo tenuit, nobis commodiſſime eum circulum fixum in coelo ſuppeditare videtur, ad quem quouis tempore tam loca planetarum et cometarum quam eorum orbitae referantur. Hic enim circulus reuera in coelo ſtellato tanquam immobilis ſpectari poterit, propterea quod perpetuo per easdem ſtellas fixas tranſibit eiusque reſpectu omnes plane ſtellae fixae ſemper eandem longitudinem et latitudinem ſint habiturae, quem in finem etiam principium huius circuli, a quo longitudines ſtellarum computentur in ipſo puncto aequinoctii verni, in quo illo tempore verſabatur, conſtitui conueniet. Hinc autem eas pauciſſimas ſtellas fixas excludi oportebit, in quibus Aſtronomi quempiam alterationem animaduerterunt.

Tab. XVI. Fig. 4. §. 7. Sit igitur M A B N iſte circulus maximus immotus ſeu poſitio eclipticae pro initio huius

ſeculi,

ſeculi, in quo A ſit eius principium ſeu punctum aequinoctiale vernum, quod huic epochae reſpondebat, in quo exiſtere fingamus ſtellam fixam notabilem, quae ergo perpetuo in hoc loco A haerere eſt cenſenda. Praeterea vero concipiamus aliam ſtellam fixam in B ab illo interuallo quadrantis $AB = 90°$ remotam; ita vt his duabus ſtellis fixis in A et B poſitio noſtri circuli maximi fixi perpetuo in coelo determinetur, vbi arcus A B a principio A ſecundum ſignorum ſeriem porrigi eſt cenſendus. Hoc igitur circulo conſtituto ante omnia inquirendum erit, quemnam ſitum ecliptica ad quoduis tempus tam ante quam poſt hanc epocham eius reſpectu tenuerit. Sic enim faciliime omnia loca in coelo reſpectu eclipticae determinata ad noſtrum circulum fixum M A B C transferri poterunt.

§. 8. Quo autem facilius hanc inueſtigationem inſtituam, in ſubſidium vocabo ea, quae olim in Memor. Academiae Reg. Boruſſ. pro anno MDCCLIV. pag. 296. de Variationibus quibus latitudo ſtellarum fixarum eſt obnoxia, ſum commentatus. Hinc igitur reſumam regulam, cuius ope ex data tam longitudine quam latitudine cuiuspiam ſtellae fixae pro initio huius ſeculi eius locus pro quouis alio tempore facile aſſignari poteſt. Sit igitur λ longitudo cuiuspiam ſtellae fixae pro initio huius ſeculi, atque elapſo vno ſeculo huius ſtellae longitudo erit $= \lambda + 1°, 23'$, eius vero diſtantia a polo boreali eclipticae interea diminuitur quantitate $47\frac{1}{2}''$ ſin. $\lambda + 6\frac{1}{2}''$ coſ. λ;

 vnde

vnde facile eius latitudo innoteſcit, vti videre licet pag. 328 libri citati.

§. 9. Hinc igitur definiamus loca, vbi ambae noſtrae ſtellae fixae A et B elapſo vno ſeculo reſpectu eclipticae reperientur. Et cum ſtellae A longitudo fuerit $\lambda = 0$, eius longitudo poſt vnum ſeculum erit $1^\circ. 23'$; et quia eius diſtantia à polo eclipticae erat $= 90^\circ$, eius latitudo borealis erit $6\frac{1}{2}''$. Deinde alterius ſtellae B, quia eius longitudo initio huius ſeculi erat $\lambda = 3^s$, et diſtantia a polo pariter $= 90^\circ$ eius poſt vnum ſeculum longitudo erit $3^s. 1^\circ. 23'$, latitudo vero borealis $= 47\frac{1}{2}''$. Hinc igitur elapſo vno ſeculo ecliptica eiusmodi tenebit ſitum, vt ſtellae A latitudo fiat $6\frac{1}{2}''$, ſtellae vero $B = 47\frac{1}{2}''$ vtraque borealis. Aequinoctium autem vernum tum ibi erit, vt ſtellae A longitudo euadat $1^\circ. 23'$.

Tab. XVI. Fig. 5. §. 10. Manente igitur M A B N noſtro circulo immobili, qui ſimul erat ecliptica pro initio huius ſeculi ſeu pro anno 1700, hinc elapſo vno ſeculo referat circulus Oab eclipticam pro illo tempore ſeu pro anno 1800, quae priorem circulum ſecet in puncto O; ad quam ex punctis A et B demittantur perpendicula Aa et Bb, quorum ergo illud eſſe debebit $6\frac{1}{2}''$ hoc vero $= 47\frac{1}{2}''$. Vt autem noſtram determinationem generalem reddamus ponamus $Aa = a$ et $Bb = b$; tum vero pro puncto O, quod praecipue quaeritur, ſit arcus $AO = x$ et angulus $AOa = \omega$, eritque ex triangulo OAa, $\sin a = \sin. x \sin. \omega$, et ob arcum $AB = 90^\circ$, ideoque $OB = 90^\circ + x$, ex triangulo

angulo B O b coſ. x ſin. ω = ſin. b; vbi, quia arculi a et b ſunt quam minimi, noſtrae aequationes ita exhiberi poterunt

I. ſin. x ſin. $\omega = a$ et II. coſ. x ſin. $\omega = b$

vnde quadratis addendis fiet ſin. $\omega^2 = aa + bb$ ſiue ſin. $\omega = \sqrt{aa + bb} = \omega$, quia etiam angulus ω erit quam minimus. Tum vero aequatio prima per ſecundam diuiſa praebet tang. $x = \frac{a}{b}$. Fiat igitur nunc $a = 6\frac{1}{2}''$ et $b = 47\frac{1}{2}''$, ac reperietur $\omega = \sqrt{2298\frac{1}{2}''} = 48''$ proxime. Porro vero erit tang. $x = \frac{13}{95}$, hinc $l$tang. x = 9, 1162198, ideoque $x = 7°. 27'$; vnde reperitur arcus A O, a quo arcu plane non diſcrepabit arcus O a = 7°. 27', in quo ſi capiatur arcus a ♈ = 1°. 23'. erit ♈ aequinoctium pro hoc tempore, ſcilicet pro anno 1800.

§. 11. Cum iſtae mutationes ſint quam minimae, per ſe patet, eas per plura ſecula tam antecedentia quam ſequentia eosdem valores retinere; vnde elapſis ω ſeculis ab epocha noſtra 1700, hinc ex iisdem formulis colligetur angulus A O a = ω = n. 48; arcus vero A O = x manet vt ante = 7°. 27', ita vt punctum O in noſtro circulo immoto quaſi fixum ſit cenſendum. Pro aequinoctio autem huius temporis capi debebit a ♈ = n 1°. 23'. At ſi poſitionem eclipticae deſideremus pro tempore quod n ſeculis noſtram epocham anteceſſit, inueſtigatio ſimili modo inſtituetur. Si enim circulus O α β eclipticam huius temporis referat, punctum O etiamnunc eundem tenebit locum; ita vt ſit arcus A O = 7°. 27'. Tab. XVI. Fig. 6.

 Nunc

Nunc autem ecliptica $O\alpha\beta$ in regionem borealem verget, eritque angulus $AO\alpha = 48.\,n''$, at punctum aequinoctiale cadet in ♈, vt ſit α♈ $= n\,1^\circ.\,23'$ ſeu $83\,n'$, ita vt ſit arcus O♈ $= 7^\circ.\,27' + 83\,n$, cum caſu praecedente fuiſſet $7^\circ.\,27' - 83\,n'$. Denique quia punctum O eſt fixum, notaſſe iuuabit, eius longitudinem initio noſtrae epochae fuiſſe $11^s.22^\circ.33'$.

§. 12. Hoc igitur punctum O ſine dubio maxime eſt notatu dignum, cum omni tempore ecliptica per id tranſeat, quod etiam de puncto coeli ipſi oppoſito eſt tenendum. Quare cum ecliptica ſemper per haec duo puncta tranſeat et circum ea motu angulari conuertatur, ea aptiſſime tanquam cardines eclipticae ſeu orbitae terrae ſpectare licet, hocque nomine ea etiam in poſterum deſignabo. Haec ergo duo puncta in coelo ita ſunt conſtituta, vt initio huius ſeculi eorum longitudo fuerit ſiue $11^s.\,22^\circ.\,33'$ ſiue $5^s.\,22^\circ.\,33'$. Atque orbita terrae circa hos cardines ita motu angulari vertetur, vt ſingulis ſeculis conficiat angulum $48''$ a ſeptentrione meridiem verſus. Tum vero cum initio huius ſeculi puncta aequinoctialia ab his cardinibus diſtarent quantitate $7^\circ.\,27'$, elapſis n ſeculis ab iis diſtabunt quantitate $7^\circ.27' - 83.n'$. Totidem vero ſeculis ante noſtram epocham diſtantia punctorum aequinoctialium ab his cardinibus erit $7^\circ.\,27' + 83.\,n'$.

§ 13. Haec omnia perinde ſum perſecutus quaſi eſſent certiſſima, et ſiue per obſeruationes ſiue per theoriam accuratiſſime determinata, quod autem

lo ge

longe ſecus ſe habet; quandoquidem ex obſeruationibus vix quicquam certi definire licet. In theoria autem, qua loco ſupra allegato ſum vſus, ratio praecipue habetur maſſae Veneris cuius quantitas adhuc penitus eſt ignota. Interim tamen ob Solis parallaxin nuper accuratius definitam maſſa Veneris aliquanto maior ſtatuenda videtur, quam in illis calculis aſſumſeram, vnde motus ſecularis circa illos cardines aliquanto maior quam $48''$ prodiret; atque ob eandem rationem interuallum A O quod inuenimus $= 7^\circ. 27'$ pro non parum incerto haberi debet. Aſtronomorum igitur erit, haec elementa accuratius definire: ad quod ſine dubio multo maior apparatus tam obſeruationum quam Theoriae requiretur. Mihi autem hoc loco ſufficiet, fontem detexiſſe, vnde in poſterum maxima incrementa Aſtronomiae ſunt petenda.

§. 14. Quemadmodum idea cardinum maxime ideoneum modum ſuppeditat, motum et mutationes eclipticae ad quoduis tempus determinandi: ita etiam pro orbitis omnium planetarum dabuntur cardines circa quos ſimili modo conuertantur; ita vt, ſi pro qualibet orbita cogniti fuerint cardines et promotio ſecularis, inde ad quoduis tempus vera poſitio huius orbitae in coelo commodiſſime aſſignari poſſit. Et cum iſte motus ſit lentiſſimus, facile intelligitur, eosdem cardines vna cum motu ſeculari nullam mutationem pati. Interim tamen, quoniam conſtitutio cardinum a nodis reliquorum planetarum, a quorum actione hae mutationes producuntur, pen-

det,

det, ſi numerus ſeculorum nimis magnus ſtatueretur, tandem in locis cardinum perinde atque in motu ſeculari quaepiam alteratio oriri poſſet; vnde patet, quantopere adhuc incerti ſimus, ſi tabulas aſtronomicas, quae nuncquidem ad coelum perfecte eſſent accommodatae applicare vellemus. Ceterum vſu non carebit, ſi, quantum obſeruationes permittunt, etiam in cardines reliquorum planetarum inquiramus.

De cardinibus orbitae Saturni eiusque motu ſeculari.

§. 15. Pro initio noſtrae epochae ad annum 1700 tabulae aſtronomicae praebent nodum aſcendentem

$3^s. 21^\circ. 13'. 29''$ ſecundum Caſſini et
$3. 21. 5. 6$ ſecundum Halleium

at vero poſt vnum ſeculum elapſum ſeu anno 1800 locus nodi aſcendentis eſt

$3^s. 22^\circ. 48'. 40''$ ſecundum Caſſini et
$3. 21. 35. 0$ ſecundum Halleium.

Pro vtroque autem tempore eadem ſtatuitur inclinatio

$2^\circ. 30'. 30''$ ſecundum Caſſini et
$2. 30. 10$ ſecundum Halleium.

Tab. XVI. Fig. 7. §. 16. Sit igitur pro anno 1700 OAN ecliptica, in qua capiatur ſecundum Caſſini arcus $AN = 3^s. 21^\circ. 13'$, et cum ſit interuallum $= 7^\circ. 27$ erit arcus $ON = 3^s. 28^\circ. 40'$. Deinde in ecliptica pro anno 1800 capiatur arcus $♈ n = 3^s. 22^\circ. 49'$ vnde

vnde ob arcum $O \gamma = 7^\circ. 27' - 83' = 6^\circ. 4'$, erit arcus $On = 3^s. 28^\circ. 53'$; vbi angulus ad O, vti vidimus, erat $48''$. Hinc ſi circulus ☊ N ☊ repraeſentet orbitam Saturni pro 1700, at n ☊ orbitam pro 1800 erunt anguli O N ☊ $= 2^\circ. 30'. 36'' = O n$ ☊. Quoniam vero maxime probabile eſt, inclinationem per ſeculum aliquantillum mutari, ſtatuamus angulum $O n$ ☊ $= 2^\circ. 30'. 36'' + \alpha''$ et cum ſit $Op = ON$, erit $np = 13'$. Nunc autem ob angulum O minimum erit hoc perpendiculum $Np = 48''$ ſin. $ON = 42''$. Hinc ſi orbita N ☊ ſecet arcum On in s, ob angulum $N s n = 2^\circ. 31'. 24''$ erit ſpatium $sp = 15'. 56''$, ideoque $s n = 28'. 56''$; ſicque in triangulo s ☊ n habemus latus sn cum angulis On ☊ $= 2^\circ. 30'. (36 + \alpha'')$ et angulum externum $N s n$, quem ſuppoſuimus proxime $2^\circ. 31'. 24''$.

§. 17. Cum autem minima differentia in his angulis ingens diſcrimen in loco cardinis ☊ pariat, iſtos angulos accuratiſſime noſſe oporteret. Cum igitur angulus ONp a recto non diſcrepet, erit angulus $sNp = 87^\circ. 29'. 24''$, vnde ex triangulo rectangulo Nsp reperitur coſ. $Nsp =$ ſin. sNp coſ. $Np =$ ſin. sNp, vnde colligitur angulus $N s p = 2^\circ. 30'. 36''$. Omni autem accuratione adhibita cum ex triangulo rectangulo ONp ſit coſ. $ON =$ cot. O. cot. ONp, erit tang. $ONp = \frac{\text{cot. } O}{\text{coſ. } ON}$. Vnde ſi ponamus angulum $ONp = 90^\circ + x''$ reperietur $x = -48''$ coſ. ON, vnde fit $x = 23''$, ideoque $ONp\ 90^\circ. 0'. 23''$, hincque $sNp = 87^\circ. 29'. 47''$, ex quo colligitur $Nsp = 2^\circ 30'. 13''$,

ideoque notabiliter minor quam ante ſumſeramus. Concipitur ex n in arcum N s demiſſum perpendiculum $n\,q$, eritque angulus $s\,n\,q = 90^\circ - 2^\circ.\,30'.\,13''$, cui addatur angulus $s\,n\,\Omega = 2^\circ.\,30'.\,(36 + \alpha'')$, proditque angulus $\Omega\,n\,q = 90^\circ.\,0'.\,(23 + \alpha'')$. Quod ſi ergo iſte angulus eſſet rectus, arcus $n\,\Omega$ et $q\,\Omega$ forent quadrantes et angulus ad Ω aequaretur perpendiculo $n\,q$, cuius ſinus $=$ ſin. $s\,n$. ſin. $q\,s\,n$, vnde fit perpendiculum $n\,q = 1'.\,16''$, cui ergo aequalis foret angulus ad Ω, quo ſimul promotio orbitae ſecularis circa cardinem Ω indicaretur, exiſtente arcu $n\,\Omega = 90^\circ$. Hoc ergo eueniret ſi angulus $\Omega\,n\,q$ eſſet rectus, hoc eſt ſi eſſet $\alpha = -23''$.

§. 18. Quod ſi autem cum Aſtronomis ſupponamus $\alpha = 0$, foret in triangulo $\Omega\,n\,q$ angulus $\Omega\,n\,q = 90^\circ + 13''$, quem, quo rem in genere conſideremus, ponamus $90^\circ + n''$, eritque ex Trigometria $\tang.\,n\,\Omega = \frac{\tang.\,n\,q}{\cos.\,(90^\circ + n'')} = -\frac{\tang.\,n\,q}{\sin.\,n''} = -\frac{76''}{n}$, ita vt ſi n fuerit numerus poſitiuus, arcus $n\,\Omega$ futurus ſit quadrante maior. Ponamus ergo arcum $n\,\Omega = 90^\circ + z$, eritque $\cot.\,z = \frac{76}{n}$. Inuento autem z reperietur angulus exiguus $\Omega = \frac{76''}{\sin.\,90^\circ + z} = \frac{76''}{\cos.\,z}$. Hinc igitur ſi ſumamus $\alpha = 0$, vt ſit $n = 23''$, erit $\cot\,z = \frac{76}{23} = 3{,}330$, ideoque $z = 16^\circ.\,17'$; ex quo porro colligitur angulus ad $\Omega = 1'.\,19''$, exiſtente arcu $n\,\Omega = 90^\circ + 16^\circ.\,17'$.

Tab. XVI. Fig. 8. §. 19. Secundum tabulas igitur Caſſinianas, ſi omni numero eſſent abſolutae, ambo cardines orbitae Saturni ſequenti modo determinarentur. Sumatur in

circulo

circulo noſtro fixo arcus O N $= 3^s. 28^\circ. 40'$, et per punctum N agatur circulus maximus ♄ N ☊, faciens angulum O N ☊ $= 2^\circ. 30'. 36''$, in quo capiatur arcus N ☊ $= 106^\circ. 17'$; tum vero ad alteram partem N ♄ $= 73^\circ. 43'$, eruntque puncta ☊ et ♄ et orbitae Saturni cardines et ipſe circulus ♄ N ☊ exhibebit orbitam Saturni pro anno 1700; tum vero ſi proximus ducatur circulus ♄ n ☊ ab illo declinans angulo $= 79''$, is poſitionem orbitae Saturni pro anno 1800 exhibebit. Sic itaque orbita Saturni ſingulis ſeculis circa ſuos cardines conuerteretur per angulum $= 79''$; vnde pro quouis tempore propoſito tam ipſa poſitio orbitae Saturni quam eius interſectio et inclinatio ad eclipticam determinari poterit.

§. 20. Videamus nunc, quantum hae determinationes ſint diſcrepaturae ab iis quas tabulae Halleianae praebebunt. Iisdem igitur veſtigiis inſiſtentes habebimus arcum O N $= 3^s. 28^\circ. 32'$, et pro anno 1800 O $n = 3^s. 27^\circ. 39'$, inclinatio autem pro vtroque tempore ſtatuitur $2^\circ. 30'. 10''$; hinc iterum erit O $p =$ O N $= 3^s. 28^\circ. 32'$, vnde fit $np = -53'$. Praeterea vero erit vt ante N $p = 42''$ et angulus O N $p = 90^\circ + 23''$, hincque s N $p = 87^\circ. 30'. 13''$; vnde fit angulus N $s p = 2^\circ. 29'. 47''$, vnde colligitur $s p = 16'. 7''$ et hinc $s n = - 36'. 53''$, quod interuallum quia prodiit negatiuum peculiari figura nobis erit opus, in qua erit $s n = 2213''$. Ducto igitur ex n ad s ☊ perpendiculo $n q$, ob angulum $n s q = 2^\circ. 29'. 47''$, reperietur $n q = 1'. 36''$, et angulus $s n q = 87^\circ. 30'. 13''$, qui ſubtractus ab angulo Tab. XVI. Fig. 7. Fig. 9.

 $s n$ ☊

$s\,n\,\Omega = 177^\circ.\,29'.\,50''$ relinquit angulum $\Omega\,n\,q = 89^\circ.\,59'.\,37''$. Vnde cum ſit $\text{tang.}\,n\,\Omega = \frac{\text{tang.}\,n\,q}{\text{coſ.}\,\Omega\,n\,q}$, ponamus $\Omega\,n\,q = 90^\circ. - 23''$ erit $\text{tang.}\,n\,\Omega = \frac{96}{23}$, ideoque $n\,\Omega = 76^\circ.\,32'$, hincqueporro angulus $\Omega = \frac{n\,q}{\text{ſin.}\,n\,\Omega} = 99'$.

§. 21. Quoniam puncta N et n parum a ſe inuicem ſunt remota, ſecundum Halleium ambo cardines orbitae Saturni ita erunt conſtituti in punctis ☊ et ♄, vt ſit $N\,☊ = 76^\circ.\,32'$ et $N\,♄ = 103^\circ.\,28'$, qui ergo plurimum differunt a cardinibus Caſſinianis. Maxime autem enorme diſcrimen cernitur in ipſo motu, quo orbita Saturni circa hos cardines gyrari deberet, cum adeo iſte motus angularis in contrarium ſenſum vergat, quandoquidem ſecundum Caſſinum hic motus foret dextrorſum, per 79″ vno ſeculo. Secundum Halleium idem motus ſiniſtrorſum prodiit directus et quidem per 99 minuta ſecunda pro vno ſeculo; vnde patet Aſtronomos adhuc in maxima ignoratione verſari circa variationem orbitae Saturni. Sin autem medium quoddam inter has duas determinationes aſſumere vellemus, orbita Saturni propemodum quieſcens ſtatui deberet. At vero poſt plura ſecula hoc diſcrimen in tantum augeri debet, vt mirum videatur, hanc litem per obſeruationes antiquiſſimas dirimi nondum potuiſſe. Optimum autem remedium ex theoria peti poterit; cum enim Saturnus a ſolo Ioue perturbationem patiatur, eodem modo mutatio orbitae Saturni exploretur, quo mutationem eclipticae ex actionibus Iouis et Veneris olim definiui.

De

De cardinibus orbitae Iouis eiusque motu ſeculari.

§. 22. Pro initio noſtrae epochae ſeu ad annum 1700 tabulae aſtronomicae praebent nodum aſcendentem Iouis

$3^s. 7^\circ. 29'. 53''$ ſecundum Caſſini

3 7. 34. 10 ſecundum Halleium

et pro anno 1800 colligitur nodus aſcendens

$3^s. 8^\circ. 10'. 1''$ ſecundum Caſſini

3. 8. 57. 30 ſecundum Halleium.

Pro vtroque autem termino ſtatuitur inclinatio

$1^\circ. 19'. 30''$ ſecundum Caſſini

1. 19. 10 ſecundum Halleium.

Hinc ergo iam videmus etiam maximum diſcrimen inter determinationes ex tabulis Caſſinianis et Halleianis deductas oriri debere; vtramque igitur definitionem ſeorſim inueſtigemus.

§. 23. Incipiamus a tabulis Caſſinianis et ſit N locus nodi pro anno 1700 et n pro anno 1800, et cum ſit $AN = 3^s. 7^\circ. 29'. 53''$ et $OA = 7^\circ. 27'$, erit $ON = 3^s. 14^\circ. 57'$. Similique modo pro anno 1800 cum ſit $♈ n = 3^s. 8^\circ. 10'$ et $O ♈ = 6^\circ. 4'$, erit arcus $On = 3^s. 14^\circ. 14'$. Demittatur nunc perpendiculum Np et ob angulum ad $O = 48''$ erit $Np = 48''$ ſin. $ON = 46''$ et $Op = ON = 3^s. 14^\circ. 57'$, ideoque $pn = 43'$. Porro erit angulus Tab. XVII. Fig. 1.

$$ONp = 90^\circ - \frac{Np}{\text{coſ.}\, ON} = 90^\circ - 48'\ \text{tang.}\, ON = 90^\circ + 3'.$$

Hinc auferatur angulus $ONs = 1^\circ. 19'. 30''$, vt remaneat angulus $sNp = 90^\circ + 3' - 1^\circ. 19'. 30''$, qui a

 90°

90° ſubtractus relinquit angulum $Nsp = 1^\circ.16'30''$, vnde reperitur $sp = \frac{np}{tang.\ Nsp} = 32'.12''$, vnde ſit $sn = 10'.48''$. Demiſſo nunc perpendiculo nq ex triangulo nsq erit angulus $snq = 88^\circ.43'.30''$ et $nq = ns$ ſin. $Nsp = 14''$. Deinde vero erit angulus $\Omega nq = 89^\circ.57'.0''$, hincque concluditur arcus $\Omega n = 4^\circ.27'$ et $\Omega = \frac{nq}{ſin.\ \Omega n} = 3'$. Hoc modo cardines forent in ☊ et ♃, ita vt eſſet propemodum $N\Omega = 4^\circ.27'$, ideoque N♃ $= 175^\circ.33'$. Et circa hos cardines orbita Iouis verteretur interuallo vnius ſeculi per angulum $\Omega = 180''$ in ſenſum sn, qui motus ſine dubio a veritate plurimum aberrare videbitur.

Tab. XVII. Fig. 2. §. 24. Secundum tabulas Halleii autem habebimus $ON = 3^s.15^\circ.1'$ et $On = 3^s.15^\circ.1'$; hinc demiſſo perpendiculo Np erit vt ante $Np = 43$ et $ps = 32'.12''$, atque angulus $Nsp = 1^\circ.10'30''$. Quare cum ſit $Op = ON = On$, erit $np = 0$, hincque $ns = 32'.12''$. Nunc vero reperitur perpendiculum $nq = 43''$. Iam quia triangulum nqs pro rectilineo haberi poteſt, erit angulus $snq = 88^\circ.43'.30''$, cui angulus $sn\Omega = 1^\circ.19'.10''$ additus dat angulum $\Omega nq = 90^\circ.2'.40''$; hincque ex triangulo Ωnq erit tang. $n\Omega = \frac{nq}{coſ.\ \Omega nq} = -\frac{43''}{160''} = -0,2687$, ergo arcus $\Omega n = 164^\circ.57'$. Denique reperietur ipſe angulus $\Omega = \frac{nq}{ſin.\ 15^\circ.3'} = 2'.45''$.

§. 25. Hinc igitur abunde patet, quam immane diſcrimen inter tabulas Caſſinianas et Halleianas oriatur; cum non ſolum loca cardinum vltra centum

centum ſexaginta gradus diſcrepent, ſed etiam motus ſeculares in plages contrarias vertanter. Ex quo fateri cogimur, nihil adhuc in Aſtronomia circa inclinationem mutuam orbitarum planetarum eiusque mutabilitatem nobis conſtare, vnde prorſus ſuperfluum foret hanc inueſtigationem pro reliquis planetis proſequi. Etiamſi enim ambae hae tabulae non tam enormiter diſcrepent, tamen nihil omnino inde pro cardinibus harum planetarum concludere licebit, cuius incertitudinis cauſſa in eo potiſſimum eſt ſita, quod Aſtronomi orbitarum ad eclipticam inclinationem ſine vlla ratione tanquam immutabilem ſpectauerint, cuius erroris emendatio magis ex theoria quam ex obſeruationibus expectanda videtur, quam ob rem hoc argumentum ſequenti Problemate claudamus.

Problema.

§. 26. *Datis cardinibus duorum planetarum cum vtriusque promotione ſeculari, ad quoduis temporis tam interſectionem quam inclinationem vtriusque orbitae determinare, ſiquidem haec elementa pro noſtra epocha* 1700 *fuerint cognita.*

Solutio.

Sit pro noſtra epocha 1700 P N orbita vnius planetae et Q N orbita alterius, puncta vero P et Q cardines harum orbitarum et punctum N earum interſectio; dati ergo erunt arcus $PN = p$ et $QN = q$, cum inclinatione mutua ſeu angulo $PNQ = i$. Praeterea vero ſit motus ſecularis prioris orbitae $PN = \alpha$, alterius vero orbitae $QN = \beta$, vterque in eundem Tab. XVII. Fig. 3.

ſen-

ſenſum N T. Hinc iam quaeri debeat poſitio harum orbitarum poſt elapſa n ſecula, quarum interſectio tum cadat in punctum n, ita vt tum ambae orbitae futurae ſint Pn et Qn. Habebimus igitur angulos $NPn = n\alpha$ et $NQn = n\beta$, qui anguli pro minimis haberi poſſunt. Iam primo ex N in Pn demittatur perpendiculum N T, eritque $NT = n\alpha$ ſin. p et angulus $PNT = 90° - n\alpha$ coſ. p; propterea quod $PT = PN$ et angulus PNT minime a recto diſcrepabit. Sit iam S interſectio arcuum QN et Pn et in triangulo SNT erit angulus $SNT = 90° - n\alpha$ coſ. $p - i$ hincque quia triangulum S N T vt planum ſpectari poteſt, erit angulus $NST = n\alpha$ coſ. $p + i$, vnde colligitur arcus

$$NS = \frac{n\alpha\,\text{ſin.}\,p}{\text{ſin.}\,(n\alpha\,\text{coſ.}\,p + i)} \text{ et } ST = \frac{NT}{\text{tang.}\,(n\alpha\,\text{coſ.}\,p + i)}$$

quibus inuentis erit $QS = q - \frac{n\alpha\,\text{ſin.}\,p}{\text{ſin.}\,(n\alpha\,\text{coſ.}\,p + i)}$, quem breuitatis gratia ſtatuamus $= s$. Nunc igitur in triangulo QSn data erunt 1°. $QS = s = q - \frac{n\alpha\,\text{ſin.}\,p}{\text{ſin.}\,(n\alpha\,\text{coſ.}\,p + i)}$; 2°. ang. $SQn = n\beta$ ac 3°. ang. $NSn = n\alpha$ coſ. $p + i = \omega$. Ad hoc igitur triangulum reſoluendum ex Q in arcum Pn demittatur perpendiculum QV, eritque ex triangulo QSV ſin. QV = ſin. s ſin. ω et tang. SV = tang. s coſ ω, praeterea tang. $SQV = \frac{\text{cot.}\,\omega}{\text{coſ.}\,s}$. Sit autem breuitatis gratia SQV ſin. $SQV = v$, eritque angulus $VQn = v + n\beta$ ita vt in triangulo rectangulo QVn habeamus latus QV cum angulo VQn, vnde reperimus tang. $Qn = \frac{\text{tang.}\,QV}{\text{coſ.}\,v + n\beta}$, ac denique ſin. $QnP = \frac{\text{ſin.}\,QV}{\text{ſin.}\,Qn}$ et

ſin. Vn = ſin. Qn. ſin. $(v + n\beta)$

vnde ſi ſubtrahatur S V remanebit Sn, cui propterea addi-

addi debet arcus $PS = PN - ST$. Hoc igitur modo inuenti ſunt ambo arcus Pn et Qn, qui referunt ambas orbitas pro tempore praeſcripto, vna cum earum interſectione n et inclinatione mutua ſcilicet angulo QnV_1; ſicque hoc problema perfecte eſt reſolutum. Vbi hoc tantum adiecisse iuuabit, quod ſi poſitio harum orbitarum ad tempus quod n ſeculis noſtram epocham praeceſſit deſideretur, tantum numerum n negatiuum capi debere.

Solutio alia eaque elegantiſſima eiusdem problematis.

§. 27. Maneant eaedem denominationes, vt ante, ſcilicet $PN = p$; $QN = q$, inclinatio $PNQ = i$, et anguli $P = n\alpha$, $Q = n\beta$; tum ex N in arcus Pn et Qn demittantur perpendicula NR et NS, vt fiat $NR = n\alpha \text{ ſin. } p$ et $NS = n\beta \text{ ſin. } q$, vnde ob angulos p et q minimos erit etiam $PR = p$ et $QS = q$; anguli vero erunt $PNR = 90° - n\alpha \text{ coſ. } p$ et $QNS = 90° - n\beta \text{ coſ. } q$, ideoque angulus Tab. XVII. Fig. 4.

$$PNS = 90° + i - n\beta \text{ coſ. } q,$$

hincque angulus

$$RNS = i - n\beta \text{ coſ. } q + n\alpha \text{ coſ. } p.$$

Hoc modo noſtrum problema eo reducitur, vt ex arcubus NR et MS vna cum angulo intercepto RNS definiantur arcus Rn et Sn vna cum ipſo angulo n, quod eſt inſigne Problema trigonometricum ſphaericum, cuius Solutio ita elegantiſſime expeditur.

§. 28. Ponamus breuitatis gratia arcus $NR = r = n\alpha\, \text{ſin.}\, p$, $NS = s = n\beta\, \text{ſin.}\, q$ et angulum $RNS = \Phi = i - n\beta\, \text{coſ.}\, q + n\alpha\, \text{coſ.}\, p$. Iam producantur arcus R N et S N retro vsque in r et s, vt arcus Rr et Ss fiant quadrantes, eritque punctum r polus circuli PRn et s polus circuli QSn, vnde arcus ex n ad hos polos r et s ducti ſcilicet nr et ns erunt etiam quadrantes, qui ergo ad arcum rs erunt perpendiculares et arcus rs menſura erit anguli rns. Quia igitur anguli rnR et snS ſunt recti, erit angulus $rns = RnS$, quem hic potiſſimum quaeri oportet. Deinde angulus Rrn aequabitur arcui Rn, cuius ergo complementum erit angulus srN. Simili modo erit angulus Ssn aequalis arcui Sn, quem ergo angulus rsN angulo recto ſuperat; ita vt, ſi ponamus arcus quaeſitos $Rn = x$ et $Sn = y$, futurus ſit angulus $srN = 90^\circ - x$ et angulus $rsN = 90^\circ + y$.

§. 29. Nunc igitur tota noſtri problematis Solutio reducitur ad reſolutionem trianguli ſphaerici Nrs, in quo cognita ſunt latera $Nr = 90^\circ - r$ et $Ns = 90^\circ - s$, vna cum angulo intercepto $rNs = \Phi$. Hinc ergo reſolutio huius trianguli primo ſuppeditabit tertium latus rs, cui aequalis eſt angulus rns, quem vocemus $= \psi$, vt ſit $nr = \psi$; ſecundo angulus Nrs dat $90^\circ - x$; tertio vero angulus $Nsr = 90^\circ + y$, ſicque tria noſtra incognita x, y et ψ innoteſcunt.

§. 30. Reſolutio autem huius trianguli primo nobis praebet

coſ. rs

$\cos. rs = \cos. sNr \sin. Nr \sin. Ns + \cos. Nr \cos. Ns$
ſicque erit

$$\cos. \psi = \cos. \Phi \cos. r \cos. s + \sin. r \sin. s.$$

Praeterea vero regulae praebent

$$\tang. (90^\circ - x) = \frac{\sin. (90^\circ - r) \sin. \Phi}{\cos. (90^\circ - r) \sin. (90^\circ - s) - \sin. (90^\circ - r) \cos. (90^\circ - s) \cos. \Phi} \text{ et}$$

$$\tang. (90^\circ + y) = \frac{\sin. (90^\circ - s) \sin. \Phi}{\sin. (90^\circ - r) \cos. (90^\circ - s) - \cos. (90^\circ - r) \sin. (90^\circ - s) \cos. \Phi}$$

quae ergo reducuntur ad ſequentes formas

$$\cot. x = \frac{\cos. r \sin. \Phi}{\sin. r \cos. s - \cos. r \sin. s \cos. \Phi} \text{ et } -\cot. y = \frac{\cos. s \sin. \Phi}{\cos. r \sin. s - \sin. r \cos. s \cos. \Phi}$$

quae hoc modo fient commodiores

$$\tang. x = \frac{\tang. r \cos. s}{\sin. \Phi} - \sin. s \cot. \Phi \text{ et}$$

$$\tang. y = \sin. r \cot. \Phi - \frac{\cos. r \tang. s}{\sin. \Phi}.$$

Sicque omnes tres noſtras incognitas x, y et Φ perquam ſuccincte expreſſimus.

§. 31. Quia autem noſtro caſu angulus ψ quam minime ab angulo Φ diſcrepabit, ſtatuamus $\psi = \Phi + \omega$, ita vt ω ſit angulus quam minimus, eritque $\cos. \psi = \cos. \Phi - \omega \sin. \Phi$. Hinc ergo habebimus

$$\cos. \Phi - \omega \sin. \Phi = \cos. \Phi \cos. r \cos. s + \sin. r \sin. s.$$

Quia vero eſt $r = n\alpha \sin. p$ et $s = n\beta \sin. q$, ideoque quam minimi, erit $\cos. r = 1 - \frac{1}{2} nn\alpha\alpha \sin. p^2$ et $\cos. s = 1 - \frac{1}{2} nn\beta\beta \sin. q^2$; tum vero $\sin. r = n\alpha \sin. p$ et $\sin. s = n\beta \sin. q$, vnde fiet

$$\cos. \Phi - \omega \sin. \Phi = \cos. \Phi - \tfrac{1}{2} nn\alpha\alpha \sin. p^2 \cos. \Phi - \tfrac{1}{2} nn\beta\beta \sin. q^2 \cos. \Phi + nn\alpha\beta \sin. p \sin. q,$$

vnde colligitur

$$\omega = \frac{nn\alpha\alpha \sin. p^2 + nn\beta\beta \sin. q^2}{2 \tang. \Phi} - \frac{nn\alpha\beta \sin. p \sin. q}{\sin. \Phi}.$$

 Vnde

Vnde patet, hanc differentiam ω inter angulos Φ et ψ eſſe quaſi infinite paruum ſecundi ordinis, quod ergo penitus neglectum dabit angulum

$$P n Q = \Phi = i + n \alpha \operatorname{coſ.} p - n \beta \operatorname{coſ.} q,$$

ita vt inclinatio orbitarum poſt n ſecula creſcat quantitate $n \alpha \operatorname{coſ.} p - n \beta \operatorname{coſ.} q$, quam mutationem ergo patet modo poſitiuam modo negatiuam fieri poſſe.

§. 32. Si ſimili modo ſumamus

$$\operatorname{ſin.} r = n \alpha \operatorname{ſin.} p, \quad \operatorname{ſin.} s = n \beta \operatorname{ſin.} q$$

et $\operatorname{coſ.} r = 1$ et $\operatorname{coſ.} s = 1$, reperiemus binas reliquas incognitas x et y ſequenti modo expreſſas:

$$\operatorname{tang.} x = \frac{n \alpha \operatorname{ſin.} p}{\operatorname{ſin.} \Phi} - n \beta \operatorname{ſin.} q \cot. \Phi \text{ et}$$

$$\operatorname{tang.} y = n \alpha \operatorname{ſin.} p \cot. \Phi - \frac{n \beta \operatorname{ſin.} q}{\operatorname{ſin.} \Phi},$$

vnde patet hos arcus $R n = x$ et $S n = y$ eſſe quam minimos; et cum ſit proxime $\Phi = i$, hunc valorem ſumſiſſe ſufficiet, ex quibus colligitur, fore arcus noſtros quaeſitos

$$R n = x = \frac{n \alpha \operatorname{ſin.} p - b \beta \operatorname{ſin.} q \operatorname{coſ.} i}{\operatorname{ſin.} i} \text{ et}$$

$$S n = y = \frac{n \alpha \operatorname{ſin.} p \operatorname{coſ.} i - n \beta \operatorname{ſin.} q}{\operatorname{ſin.} i}.$$

Hocque modo nacti ſumus Solutionem facillimam noſtri Problematis, quae quidem initio maxime abſtruſa erat viſa. Atque hinc iam luce meridiana clarius apparet, quam perperam ab Aſtronomis inclinatio orbitarum planetarum mutua tanquam variabilis ſpectari ſoleat, et quantopere neceſſarium ſit vt haec doctrina maximi in Aſtronomia momenti omni ſtudio penitius exploretur.

Supple-

Supplementum.

§. 33. Quoniam igitur Theoria de mobilitate orbitarum planetarum poſtulat, vt in qualibet orbita duo puncta ſibi e diametro oppoſita, quae eius cardines appellamus, aſſignentur, circa quos ea orbita ſaltem per interuallum aliquot ſeculorum conuertatur, ſimulque motus ſecularis definiatur, hos ambos cardines cuiusque orbitae a ſe inuicem diſtingui conuenit, quorum alterum vocabimus aſcendentem alterum vero deſcendentem. Ita ſi P et p fuerint ambo cardines cuiuspiam orbitae, ita vt P M p referat ſemicirculum, ponamus ordinem ſignorum a P ad p per M; tum vero elapſo ſeculo hic ſemicirculus in ſitum P mp perueniat magis ad auſtrum vergentem; punctumque P huius orbitae cardinem deſcendentem appellare licebit punctum vero p cardinem adſcendentem, quia altera orbitae medietas circa p boream verſus aſcendit. Ipſe vero angulus M p m nobis erit motus ſecularis. Tab. XVII. Fig. 5.

§. 34. Quod ſi iam puncta P et Q fuerint cardines deſcendentes duarum orbitarum P N et Q N, quae noſtra epocha anno 1700 ſe mutuo interſecent in puncto N ſub angulo $PNQ = i$, pro priore autem motus ſecularis fuerit $= \alpha$, pro altero vero $= \beta$; tum pro mutatione harum orbitarum elapſis n ſeculis facta inuenienda ſumantur anguli Fig. 6.

$$NPn = n\alpha \text{ et } NQn = n\beta,$$

et ponantur arcus $PN = p$ et $QN = q$. Nunc vero interſectio cadat in punctum n, eritque vti ante inuenimus inclinatio mutua orbitarum

$$PnQ = i + n\alpha \operatorname{coſ.} p - n\beta \operatorname{coſ.} q.$$

 Prae-

Praeterea vero arcus

$$Pn = p + x = p + \frac{n\alpha \,\text{ſin.}\, p - n\beta \,\text{ſin.}\, q \,\text{coſ.}\, i}{\text{ſin.}\, i}$$

et arcus

$$Qn = q + y = q + \frac{n\alpha \,\text{ſin.}\, p \,\text{coſ.}\, i - n\beta \,\text{ſin.}\, q}{\text{ſin.}\, i}.$$

Harum igitur formularum ope omnia quae huc ſpectant multo faciliori calculo expediri poterunt, quam ante eſt factum. Id quod exemplis reliquorum planetarum illuſtrabimus.

§. 35. Sit igitur PN orbita Terrae, ideoque $\alpha = 48''$; at QN orbita Martis pro tempore noſtrae epochae, et geminae tabulae aſtronomicae quibus ante ſumus vſi ſatis vnanimiter praebent angulum $PNQ = 1^\circ.\ 50'.\ 54''$ ſec. Caſſinum et $1^\circ.\ 51'.\ 0''$ ſec. Halleium, vnde medium ſumendo fit angulus $PNQ = 1^\circ.\ 50'.\ 57''$; longitudo autem nodi aſcendentis $1^s.\ 17^\circ.\ 24'.\ 42''$, vnde addendo $7^\circ.\ 27'$ fit arcus $PN = p = 1^s.\ 24^\circ.\ 52'$. Pro anno 1800 autem haec nodi longitudo aſſignatur $1^s.\ 18^\circ.\ 28'.\ 2''$, eiusque ergo promotio ſecularis reſpectu aequinoctii erat $3'.\ 20''$, vnde pro n ſeculis colligitur arcus $Pn = 1^s.\ 17^\circ.\ 25' + 7^\circ.\ 27' - 83'n + n.\ 1^\circ.\ 3'.\ 20'$ ideoque $x = n.\ 1^\circ.\ 3'.\ 20'' - 33''n$, vnde omnia ad minuta ſecunda reducendo erit

$$-1180'' = \frac{48''\,\text{ſin.}\, p - \beta \,\text{ſin.}\, q \,\text{coſ.}\, i}{\text{ſin.}\, i} = 1216 - \frac{\beta \,\text{ſin.}\, q}{\text{tang.}\, i} \text{ ideoque}$$

$$\beta \,\text{ſin.}\, q = 2396 \cdot \text{tang.}\, i = 77.$$

Dummodo ergo quantitatum β et q alteram noſſemus, altera hinc determinaretur.

§. 36.

§. 36. Cum autem nihil nobis plane conſtet de mutatione inclinationis ſeculari, nihil amplius etiam nobis hinc concludere licet. Ponamus autem pro anno 1800 inclinationem fuiſſe $1°. 50'. 57'' + \delta$, ita vt δ ſit augmentum ſeculare inclinationis, atque eſſe oportebit $n\,\delta = n\,\alpha$ coſ. $p - n\,\beta$ coſ. q, ſiue $\delta = 27'' - \beta$ coſ. q, ideoque β coſ. $q = 27'' - \delta''$. Quod ſi ergo hoc incrementum δ fuerit exploratum, ambas quantitates β et q aſſignare poterimus; viciſſim autem ſi innotuerit quantitas β, ambae litterae δ et q definiri poterunt. At vero ex priore aequatione $77 = \beta$ ſin. q manifeſtum eſt, numerum β minorem quam 77 eſſe non poſſe, vnde ſi motum ſecularem Martis ſtatuere velimus $\beta = 77''$, foret $q = 90°$, hincque $\delta = 27$, ſiue augmentum ſeculare inclinationis orbitae Martis foret $27''$; quod fortaſſe a veritate parum recedit. Neque ergo ſuper hoc articulo in omnimoda ignoratione verſamur, quoniam certi ſumus, motum ſecularem orbitae Martis maiorem eſſe quam 77, id quod maxime veriſimile videtur; cum actio Iouis in Martem non ſolum maior ſit quam in Terram, ſed etiam Mars ab ipſa Terra praeterquam a Venere ſollicitetur.

§. 37. Simili modo orbitam Veneris contemplemur, pro qua nouimus eſſe $i = 3°. 23'. 20''$; et pro anno 1700 erat longitudo nodi Veneris aſcendentis $2^s. 13°. 57'. 53''$, hincque $p = 2^s. 21°. 4'. 53''$. At pro anno 1800 tabulae dant longitudinem eiusdem nodi $2^s. 14°. 49'. 33''$. Vnde ſi ſtatim ſumamus

mus $n = 1$ et addamus $6^\circ. 4'$ habebimus

$$p + x = 2^s. 20^\circ. 53'. 33'', \text{ ita vt ſit}$$

$$x = -11'. 20'' = -680'' = \frac{48 \text{ ſin. } p - \beta \text{ ſin. } p \text{ coſ. } i}{\text{ſin. } i}.$$

Eſt vero $\frac{48'' \text{ ſin. } p}{\text{ſin. } i} = 802''$ vnde fit $\beta \text{ſin.} q = 1482'' \text{tang.} i = 88''$. Atque hinc iam diſcimus motum ſecularem orbitae Veneris certe minorem eſſe non poſſe quam $88''$. Quod ſi autem ſumamus eſſe $\beta = 88$ ideoque $q = 90$ operitur angulus $P n Q = i + \alpha \text{ coſ. } p = 3^\circ. 23'. 27''$, ita vt inclinatio orbitae Veneris ſingulis ſeculis augmentum caperet $7''$, quod ſatis probabile videtur. Vbi notaſſe iuuabit ſi arcus q maior minorue eſſet quam 90°, pro β maiorem valorem accipi debere quam 88 ſec.

§. 38. Euoluamus etiam hanc inueſtigationem pro orbita Mercurii, cuius inclinatio ad eclipticam anno 1700 erat $i = 6^\circ. 59'. 20$ ſec. Halleium et longitudo nodi aſcendentis $1^s. 14^\circ\ 47'\ 20''$ et pro anno 1800 $= 1^s. 16^\circ. 10'. 40''$, vnde ſumto $n = 1$ habebimus

$$p = 1^s. 22^\circ. 14'. 20'' \text{ et } p + x = 1^s. 22^\circ. 14'. 40''$$

ideoque

$$x = \ldots\ldots = \frac{48'' \text{ ſin. } p - \beta \text{ ſin. } q \text{ coſ. } i}{\text{ſin. } i}.$$

Eſt vero $\frac{48'' \text{ ſin. } p}{\text{ſin. } i} = 312''$, vnde fit $\beta \text{ ſin.} q = 292 \text{tang.} i = 36''$, vnde patet motum ſecularem orbitae Mercurii minorem eſſe non poſſe quam $36''$. Quod ſi autem ſumamus eſſe $\beta = 36''$, ideoque $q = 90^\circ$, reperitur angulus $P n Q = i + \alpha \text{ coſ } p = 6^\circ. 59'. 49''$, ita vt inclinatio orbitae Mercurii ſinguli ſeculis augmentum capiat $29''$; vbi eadem obſeruatio quae ſupra, valet, ſcilicet ſi arcus q maior minorue eſſet quam 90° pro β maiorem valorem accipi debere quam $36''$.

§. 39.

§. 39. His quaſi praeguſtatis, quae adhuc tam ex obſeruationibus quam Theoria deducere licuit, vix quicquam vlterius ex vtroque fonte expectare poſſe videtur, niſi circulus reuera immobilis in coelo ſtabiliatur, ad quem tam loca obſeruata quam effectus ex mutua planetarum actione oriundi referantur; vnde has meditationes ſequenti problemate concludamus.

Problema.

§. 40. *Si tempore quocunque locus planetae in coelo more ſolito fuerit obſeruatus, eius ſitum ad circulum noſtrum fixum in coelo reducere.*

Solutio.

Ponamus obſeruationem factam eſſe ante epocham noſtram 1700 et planetae longitudinem deprehenſam fuiſſe $= L$, latitudinem vero $= \Lambda$, quam vt borealem ſpectemus. Iam tempus obſeruationis ſubtrahatur ab epocha noſtra 1700 et interuallum annorum per 100 diuiſum praebeat n ſecula. His poſitis referat O A B noſtrum circulum in coelo fixum ſeu eclipticam pro 1700, in quo punctum O ſit cardo eclipticae deſcendens, punctum A vero principium eclipticae hoc tempore ſiue punctum aequinoctiale, et iam vidimus fore arcum $OA = 7^\circ.\ 27'$. Tab. XVII. Fig. 7.
Iam pro tempore obſeruationis poſitio eclipticae magis boream verſus vergebat, quae ergo repraeſentetur per circulum O ♈ L a circulo noſtro fixo declinans angulo ♈ O A $= 48\, n''$, in quo a puncto O capiatur arcus O ♈ $= 7^\circ.\ 27' + 85'\, n$, eritque pun-

ctum ♈ aequinoctium vernum tempore obſeruationis. Tum vero fuerit planeta in puncto S, vnde ad eclipticam illius temporis ducto arcu normali SL erat arcus ♈ L longitudo obſeruata $= L$, at arcus L S latitudo obſeruata $= \Lambda$; quare ſi ex S ad noſtrum circulum fixum ducatur arcus normalis S M, arcus A M referet longitudinem reſpectu circuli fixi et M S latitudinem eiusdem reſpectu; quas igitur inueſtigare nobis propoſitum eſt. Hunc in finem vocemus quantitates, datas ſcilicet arcum $OL = 7^\circ.27' + 83''n + L = a$ et arcum $LS = b$; tum vero quaeſitas, ſcilicet arcum $OM = x$ et $MS = y$, ita vt $x - 7^\circ.27' = AM$ praebeat longitudinem planetae reſpectu circuli fixi et $SM = y$ eius latitudinem fixam. Nunc ſolutionem ſimili modo adſtruamus, vti in problemate praecedente: arcus nempe L S et M S producantur vsque in l et m, vt toti arcus Ll et Mm fiant quadrantes, ideoque puncta l et m poli circulorum O L et O M. Hinc arcus ex O ad haec puncta l et m ducti erunt etiam quadrantes, illae normalis ad circulum O L hic vero ad O M, vnde angulus lOm angulo LOM aequalis hoc eſt $= 48''n$, quem breuitatis gratia littera Ω deſignemus, cuius ergo menſura erit arcus $lm = \omega$; porro vero habebimus $OlL = a$ et angulum $OmM = x$, vnde cum arcus lm ad quadrantes Ol et Om ſit normalis, erunt anguli $mlS = 90^\circ - a$ et $lmS = 90^\circ + x$. His obſeruatis in triangulo ſphaerico Slm cognita erunt haec tria elementa 1°.) latus $Sl = 90 - b$, 2°.) latus $lm = 48n'' - \omega$, 3°.) angulus interceptus $mlS = 90^\circ - a$,

vnde

vnde quaeri oportet 1°.) tertium latus $Sm = 90° - y$; tum vero angulum $mlS = 90° + x$, vnde ergo colligimus tam x quam y; ita vt non indigeamus angulo lSm. At vero regulae trigometricae nobis dant

$$\text{coſ. } Sm = \text{coſ. } mlS.\ \text{ſin. } lm\ \text{ſin. } lS + \text{coſ. } lm\ \text{coſ. } lS,$$

vnde colligimus

$$\text{ſin. } y = \text{ſin. } a\ \text{ſin. } \omega\ \text{coſ. } b + \text{coſ. } \omega\ \text{ſin. } b; \text{ deinde}$$

$$\text{tang. } lms = \frac{\text{ſin. } lS\ \text{ſin. } mlS}{\text{coſ. } lS\ \text{ſin. } lm - \text{ſin. } lS\ \text{coſ. } lm\ \text{coſ. } mlS},$$

quae formula in ſymbolis dat

$$-\text{cot. } x = \frac{\text{coſ. } b\ \text{coſ. } a}{\text{ſin. } b\ \text{ſin. } \omega - \text{coſ. } b\ \text{coſ. } \omega\ \text{ſin. } \omega} \text{ ſiue}$$

$$\text{tang. } x = \frac{\text{coſ. } b\ \text{coſ. } \omega\ \text{ſin. } a - \text{ſin. } b\ \text{ſin. } \omega}{\text{coſ. } a\ \text{coſ. } b},$$

ex quibus formulis ambae noſtrae incognitae x et y ſunt computandae. Hic autem calculus adhuc multo facilior reddi poteſt, perpendendo quod latus $lm = \omega = 48n''$, ſemper eſt quaſi infinite paruus, ita vt poni poſſit $\text{coſ. } \omega = 1$ et $\text{ſin. } \omega$ ipſi angulo ω aequalis: hoc modo nanciſcemur

I. $\text{ſin. } y = \omega\ \text{ſin. } a\ \text{coſ. } b + \text{ſin. } b$,

vnde patet arcum y aliquanto maiorem eſſe quam b ſcilicet erit

$$y = b + \omega\ \text{ſin. } a = b + 48''\, n\ \text{ſin. } a$$

II. $\text{tang. } x = \frac{\text{ſin. } a\ \text{coſ. } b - \omega\ \text{coſ. } b}{\text{coſ. } a\ \text{coſ. } b} = \text{tang. } a - \frac{\omega}{\text{coſ. } a} \text{ tang. } b$,

vnde videmus eſſe x aliquanto minus quam a. Ponamus ergo $x = a - \alpha$, eritque $\text{tang. } x = \text{tang. } a - \frac{\alpha}{\text{coſ. } a^2}$, vnde fit $\alpha = \omega\ \text{coſ } a\ \text{tang. } b$ ideoque $x = a - 48n''\ \text{coſ. } a\ \text{tang. } b$. Reſtituamus igitur loco a et b valores aſſum-

tos, ac reperiemus tam longitudinem quam latitudinem veram reſpectu noſtri circuli fixi: ſcilicet longitudinem

$$AM = L + 83\,n' - 48''\,n\ \text{coſ.}\ a\ \text{tang.}\ b$$

et latitudinem $MS = b + 48\,n''$ ſin. a, exiſtente vt vidimus $a = 7°.\ 27' + 38'\,n + L$ et $b = \Lambda$. Sicque facillimo calculo ſemper hanc reductionem expedire licet.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAS PRO DETERMINANDO SITV GEOGRAPHICO VARIORVM PER IMPERIVM RVSSICVM LOCORVM, a Nob. *CHRISTOPHORO EVLERO*, ANNIS 1769 ET 1770 FACTAS,

RECENSET
AND. IOH. LEXELL.

Aſtronomis, qui ad obſeruandum tranſitum Veneris per Solem, in Imperio Ruſſico, verſus Auſtrum et Orientem ablegati fuerunt, id quoque ab Illuſtriſſima Academia Scientiarum demandatum erat, vt obſeruationibus Aſtronomicis, ſitum Geographicum variorum per magnum hoc Imperium locorum, tam quoad Longitudinem quam Latitudinem, determinarent, cuiusmodi obſeruationum a Cel. *Krafft* atque Clar. *Inochodſow* et *Islenief* factarum, varia in his Commentariis iam exſtant ſpecimina. Hac igitur occaſione, breuem et ſuccinctam expoſitionem obſeruationum, quibus Nob. *Chriſtophorus Eulerus* in Longitudines et Latitudines plurimorum locorum inquiſiuit, heic erimus tradituri, quam operam Aſtronomis eo magis gratam fore confidimus, quo vtilius ſit, rationes quibus huiusmodi determinationes innituntur, perſpectas habere. Antequam vero hoc inſtitutum adgredior, e re eſt, vt

 ani-

animaduerſiones quasdam de errore quadrantis, quo vſus eſt Nob. *Eulerus*, praemittam; quippe quum determinatio Latitudinis locorum exacta ſperari nequeat, niſi hic error quadrantis probe fuerit exploratus. Quum igitur per obſeruationes in Orſk inſtitutas, correctio quadrantis ad horizontem inuenta fuiſſet $5'. 6''$ additiua, pro altitudine vero $66°$ non niſi $4'. 26''$, ſeu horizontali $40''$ minor; per obſeruationes ſtellarum ad aequales altitudines verſus Boream et Auſtrum inſtitutas, in variis locis a Nob. *Eulero* factas, inquirere conſtitui, quid de errore quadrantis pro his altitudinibus ſtatuendum ſit. Primum itaque hunc in finem, inter ſe comparaui, altitudinem Stellae Polaris die 9 Maii A. 1770 St. Nou. in vrbe Krementſchuck verſus Boream obſeruatam, cum altitudinibus δ Virginis, nec non ε Virginis et α Leonis verſus Meridiem captis, diebus 30 Aprilis et 7 Maii. Indicata igitur correctione Quadrantis pro altitudinibus de quibus hic ſermo eſt per α, comparatio haec ita inſtituetur:

D. 30 *April.*

Altit. obſ. α Vrſae	$47°. 4'. 24'' + \alpha$	Altit. δ Virg.	$45°. 31'. 11'' + \alpha$
Refr.	$- 53$	Refr.	$- 56$
Altit. correct.	$47. 3. 31 + \alpha$	Altit. corr.	$45. 30. 15 + \alpha$
Decl. α Vrſae	$88. 4. 32$	Decl. δ	$4. 38. 58$
Eleuat. Poli	$48. 58. 59 + \alpha$	Eleuat. Poli	$49. 8. 43 - \alpha$

D. 30 *April.*

Altit. α Leonis	$53^\circ.\ 56'.\ 23'' + \alpha$	Altit. ε Virg.	$53^\circ.\ 3'.\ 31'' + \alpha$
Refr.	$-\ 41$	Refr.	$-\ 43$
Altit. corr.	$53.\ 55.\ 42 + \alpha$	Altit. corr.	$53.\ 2.\ 48 + \alpha$
Decl.	$13.\ 4.\ 56$	Decl.	$12.\ 11.\ 52$
Eleuat. Poli	$49.\ 9.\ 14 - \alpha$	Eleuat. Poli	$49.\ 9.\ 4 - \alpha$

Die 7 *Maii.*

Altit. δ Virg.	$45^\circ.\ 30'.\ 50'' + \alpha$	Altit. ε Virg.	$53^\circ.\ 3'.\ 33'' + \alpha$
Refr.	$-\ 56$	Refr.	$-\ 43$
Altit. corr.	$45.\ 29.\ 54 + \alpha$	Altit. corr.	$53.\ 2.\ 50 + \alpha$
Decl.	$4.\ 38.\ 59$	Decl.	$12.\ 11.\ 53$
Eleuat. Poli	$49.\ 9.\ 5 - \alpha$	Eleuat. Poli	$49.\ 9.\ 3 - \alpha$

Hinc igitur ſequentes colliguntur aequalitates: I. $9'.\ 44'' - 2\alpha = 0$; II. $10'.\ 15'' - 2\alpha = 0$; III. $10'.\ 5'' - 2\alpha = 0$; IV. $10'.\ 6'' - 2\alpha = 0$; V. $10'.\ 3'' - 2\alpha = 0$; vnde medio ſumto colligitur $\alpha = + 5'.\ 1''$, verum quum prima aequatio a reliquis aliquantum diſcrepet, excluſa iſta, habebitur $\alpha = + 5'.\ 7''$; at pro horizonte haec correctio inventa eſt $+ 5'.\ 40''$, ita vt pro altitudine 50°, correctio Quadrantis ab horizontali $33''$ diſcrepet. Quin imo ſi altitudo δ Caſſiopeae die 9 Maii verſus Boream capta comparetur cum altitudinibus ipſorum ε et β Corui, nec non γ Hydrae verſus Auſtrum, correctio Quadrantis pro altitudine 20°, aliquanto

quanto minor inuenietur, quam ad horizontem, vti ex ſequenti calculo liquet:

Die 30 *April.*

Altit. δ Caſſiopeae	18°. 3′. 8″+α	Altit. ε Corui	19°. 32′. 37″+α
Refr.	− 2. 53	Refr.	−2. 39
Altit. corr.	18. 0. 15 +α	Altit. corr.	19. 29. 58 +α
Decl. δ	59 1. 52	Decl. ε	21. 20. 45
Eleuat. Poli	48. 58. 23 +α	Eleu. Poli	49. 9. 17 −α

Die 30 *April.*

Altit. β Corui	18°. 45′. 1″+α	Altit. γ Hydr.	18°. 56′. 18″+α
Refr.	− 2. 45	Refr.	− 2. 44
Altit. corr.	18. 42. 16 +α	Altit. corr.	18. 53. 34 +α
Decl.	22. 7. 38	Decl. γ	21. 57. 34
Eleu. Poli	49. 10. 6 −α	Eleu. Poli	49. 8. 52 −α

Die 7 *Maii.*

Altit. β Corui	18°. 46′. 4″+α	Altit. γ Hydr.	18°. 56′. 18″+α
Refr.	− 2. 45	Refr.	−2. 44
Altit. corr.	18. 43. 19 +α	Altit. corr.	18. 53. 34 +α
Decl.	22. 7. 39	Decl.	21. 57. 35
Eleu. Poli	49. 9. 2 −α	Eleu. Poli	49. 8. 51 −α

Hinc pro valore α ſequentes habentur aequalitates:

I. $10'.\ 54'' - 2\,\alpha = 0$; II. $11'.\ 43'' - 2\,\alpha = 0$;
III. $10'.\ 29'' - 2\,\alpha = 0$; IV. $10'.\ 39'' - 2\,\alpha = 0$;
V. $10'.\ 28''. - 2\,\alpha = 0$, vnde medium ſumendo colli-

colligeretur $\alpha = 5'. 26''$; verum quum ſecunda determinatio a reliquis plus iuſto abludat, ſi reliquarum ſumatur medium, prodibit $\alpha = + 5'. 19''$, ideoque correctione horizontali $14''$ minor. Verum quum tota haec concluſio fundetur in altitudine δ Caſſiopeae, quam quidem 20 aut 30 ſcrupulis ſecundis erroneam eſſe ſuſpicari liceret, adhuc alias comparationes in medium proferemus.

Harum in numero praecipuam merentur attentionem, obſeruationes quas Nob. *Eulerus* menſe Iunii A. 1770 in Caſtello quod a St. Eliſabetha nomen gerit, pro determinandis altitudinibus ſtellarum Arcturi verſus Auſtrum et β atque γ Vrſae Minoris verſus Boream inſtituit. Capto ſcilicet medio plurimarum altitudinum ipſius Arcturi, habetur ea $61°. 56'. 2''$, ſimiliter media altitudinum pro β, γ Vrſae Minoris, dabunt hos valores: $63°. 27'. 15''$ et $65°. 53'. 56''$. Ex quo ſequens colligitur comparatio, poſita correctione Quadrantis pro $62° = \alpha$.

Altit. Arcturi	$61°. 56'. 2'' + \alpha$	Altit. β Vrſae	$63°. 27'. 15'' + \alpha$
Refr.	-30	Refr.	-29
Altit. corr.	$61. 55. 32 + \alpha$	Altit. corr.	$63. 26. 46 + \alpha$
Decl.	$20. 23. 49$	Decl.	$75. 5. 55$
Eleuat. Poli	$48. 28. 17 - \alpha$	Eleuat. Poli	$48. 32. 41 + \alpha$

Altit. γ Vrſae	65°. 53′. 56″ + α
Refr.	— 25
Altit. corr.	65. 53. 31 + α
Decl.	72. 39. 18
Eleuat. Poli	48. 32. 49 + α

Hinc colligitur medio ſumto $\alpha = -2'.14''$, correctio autem ad horizontem inuenta fuit $-1'.48''$, ideoque correctio pro 62° ſuperat horizontalem 26 ſcrupulis ſecundis circiter. Si obſeruationes ζ Bootis ibidem inſtitutae comparentur cum altitudinibus ipſarum γ et β Vrſae, haec correctio adhuc paulo maior reperietur; verum hanc comparationem heic adſerre nihil attinet, quum in genere ſufficiat, oſtendiſſe circa 60° gradum, errorem Quadrantis ab horizontali, haud parum diſcrepare. In propugnaculo *Saporogſkaja Sietſcha* dicto, habentur altitudines Stellae Polaris verſus Borcam dieb. 5 et 11 Aug. captae, quae comparari poſſunt cum altitudinibus ipſarum β Ophiuci et β Aquilae dieb. 26 Iulii et 12 Aug. ſequentem in modum.

Altitudo Polaris	49°. 29′. 45″ + α	Altit. β Ophiuc.	47°. 12′. 5″ + α
Refr.	— 48	Refr.	— 53
Altit. corr.	49. 28. 57 + α	Altit. corr.	47. 11. 12 + α
Decl. Pol.	88. 4. 33	Decl.	4. 41. 0
Eleuat. Poli	47. 33. 30 + α	Eleuat. Poli	47. 29. 48 — α

Altit.

Altit. β Aquil.	48°. 22′. 22″ + α
Refr.	− 51
Altit. correct.	48. 21. 31 + α
Decl. β	45. 51. 10
Eleuat. Poli	47. 29. 39 − α

Hinc deducitur medio capto $\alpha = - 1'. 53''$, quae ab horizontali, quae circiter $- 1'. 40''$ erat, $13''$ diſcrepat. Porro in vrbe *Samara* capta habetur altitudo Stellae Polaris verſus Boream, quam comparare licet cum altitudinibus variarum Stellarum vti γ, α, β Aquilae et ε Ceti die 19 Auguſti, eſt vero

Altitudo Polaris	50°. 28′. 11″ + α
Corr.	− 46
Altit. corr.	50. 27. 25 + α
Decl. Pol.	88. 4. 37
Eleuat. Poli	48. 32. 2 + α
Alt. α Aquilae corr.	49°. 49′. 12″ + α
Decl.	8. 16. 50
Eleu. Poli	48. 27. 38 − α

Altit. γ Aquil. corr.	= 51°. 36′. 25″ + α
Decl.	= 10. 4. 24
Eleu. Poli	= 48. 27. 59 − α
Altit. β Aquil. corr.	47. 23. 19 + α
Decl.	5. 51. 23
Eleu. Poli	48. 28. 4 − α
Altit. ε Ceti corr.	52. 4. 34 + α
Decl.	10. 32. 36
Eleu. Poli	48. 28. 2 − α

Hinc elicitur medium ſumendo $\alpha = - 2'. 7''$, ſeu ſi propius ad veritatem accedere velimus $- 2'. 0''$, correctio autem horizontalis habetur $- 1'. 49''$. Haec igitur concluſio cum praecedenti optime conſentit.

Denique ſi obſeruationes in Gluchow factae conſulantur, ex altitudine ipſius Stellae Polaris comparata cum altitudinibus α Sagittae et ε Delphini, deducitur correctio Quadrantis $- 2'. 5''$. Verum ſimilis comparatio altitudinum pro ſtellis α et δ Delphini, correctionem Quadrantis circa gradum $50°$, maiorem non dat, quam $- 1'. 40''$, ideoque horizontali minorem, quod omnibus reliquis determinationibus contrarium eſt. Idcirco harum obſeruationum vim tanti non eſſe exiſtimamus, vt reliquarum omnium auctoritatem infringere valerent. Quicquid autem ſit, ſaltem ſatis euidenter comprobatum eſſe videtur, pro diuiſionibus Quadrantis intra gradum 60 et $70°$ contentis, errorem multum diſcrepare ab errore Quadrantis horizontali. Quum igitur id nobis nunc non ſumamus, vt correctionem Quadrantis pro ſingulis eius diuiſionibus, cum ſumma exactitudine definire velimus, vt tamen concluſiones pro Latitudinibus locorum ex altitudinibus Solis et ſtellarum fixarum deducendae eo magis reddantur conſpirantes, certam hypotheſin non prorſus inueriſimilem eligamus pro aeſtimandis correctionibus Quadrantis circa ſingulas eius diuiſiones. Primum igitur pro altitudinibus $40°$ minoribus correctionem horizontalem adhibebimus, pro altitudinibus vero inſequentibus vsque ad $65°$ gradum, pro ſingulis gradibus correctionem horizontalem, tot ſecundis diminuemus, ſpectata ſcilicet correctione horizontali vt poſitiua, quot gradibus altitudo propoſita gradum 40 ſuperat, ita vt ſi correctio horizontalis dicatur α, pro gradu 52 futura

tura ſit $\alpha = 12''$ pro gradu autem $56, \alpha = 16''$. Contra ſi α ſit negatiua $= -\beta$, pro diuiſionibus quadrantis a 40 ad 65 gradum, ad β tot addamus ſecunda, quot gradibus diuiſio propoſita ſuperat 40 gradum. Pro altitudinibus vero quae vltra 70 gradum exſurgunt, ipſum valorem correctionis horizontalis adhibendum cenſui, praeſertim quum nonnullae a Nob. *Eulero* factae verificationes Quadrantis ad zenith indicare videantur, correctionem ad zenith aliquanto maiorem eſſe horizontali. Quae hypotheſis etiamſi a veritate aliquantulum abluderet, tamen inde vix errores ſenſibiles in determinationem Latitudinis locorum inducerentur. Praeterea quum id mihi heic propoſuerim, vt Latitudines has tam exacte definirem, quam pro vſu Geographico opus ſit, ſuperfluum duxi in computandis declinationibus fixarum ſummam praeciſionem ſcrupuloſe ſequi, decimas etiam ſecundorum partes in vſum vocando, quum talis praeciſio in hoc negotio non niſi pro illis locis deſideretur, vbi obſeruatoria inſtructa habentur, quorum ſitum, quam exactiſſime cognitum habere, Aſtronomis omnino e re eſt. Interim hoc non obſtante, confido fore, vt determinationes a me propoſitae, vix decem ſcrupulis ſecundis a veritate aberraturae ſint.

Determinatio Latitudinis pro vrbe Vralſkoi Gorodok.

Pro hac vrbe error Quadrantis inuentus fuit 5′. 40″, quo obſeruato per obſeruationes altitudinum Solis in meridie captarum, ſequentes pro Latitudine habentur determinationes:

Anno 1769	Altit. limb. ☉ ſup.	Corr. Quad	Semid. ☉	Refr - Paral.	Decl. ☉ Bor.	Latitudo
Die Iulii 27	58°. 10′. 17″	+ 5′. 22″	15′. 47″	27″	19°. 10′. 16″	51°. 10′. 51″
28	57. 56. 31	+ 5. 22	15. 47	27	18. 56. 24	51. 10. 45
29	57. 42. 18	+ 5. 22	15. 47	28	18. 42. 14	51. 10. 49
Aug. 1	56. 57. 36	+ 5. 23	15. 47	29	17. 57. 54	51. 11. 11
4	56. 10. 38	+ 5. 24	15. 48	30	17. 10. 57	51. 11. 13
5	55. 54. 36	+ 5. 24	15. 48	31	16. 54. 44	51. 11. 3
6	55. 38. 53	+ 5. 24	15. 48	31	16. 38. 15	51. 10. 17
10	54. 30. 13	+ 5. 25	15. 49	32	15. 29. 39	51. 10. 22
13	53. 35. 20	+ 5. 26	15. 50	34	14. 35. 34	51. 11. 12
18	52. 0. 50	+ 5. 28	15. 50	36	13. 0. 50	51. 10. 58
19	51. 41. 11	+ 5. 28	15. 50	37	12. 41. 14	51. 11. 3
20	51. 21. 36	+ 5. 29	15. 51	38	12. 21. 27	51. 10. 52
21	51. 1. 42	+ 5. 29	15. 51	39	12. 1. 29	51. 10. 48
					Medium	51. 10. 53

Sin vero obſeruationes diebus 6 et 10 Auguſti factae excludantur, medium reliquarum dabit Eleuationem Poli pro hoc loco 51°. 10′. 59″. Pro qua cuiusmodi determinationes ex obſeruatis altitudinibus ſtellarum fixarum prodeant, iam quoque diſpiciamus:

Diebus

Diebus 19 et 20 Auguſti	Altit. Stellae obſeruata	Corr. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae appar.	Eleuatio Poli
α Lyrae	77°.18'.37"	+ 5'.40"	15"	38°.35'. 7"	51°.11'. 5"
	77. 18. 41				51. 11. 1
δ Aquilae	41. 25. 1	+ 5. 39	1'. 5"	2. 40. 35	51. 11. 0
	41. 24. 57				51. 11. 5
β Cygni	66. 13. 40	+ 5. 15	25	27. 29. 37	51. 11. 7
	66. 13. 28				51. 11. 19
α Sagittae	56. 14. 21	+ 5. 24	37	17. 30. 12	51. 11. 4
	56. 14. 21				51. 11. 4
γ Aqnilae	48. 48. 41	+ 5. 31	50	10. 4. 15	51. 10 53
	48. 48. 33				51. 11. 1
α Aquilae	47. 1. 6	+ 5. 33	53	8. 16. 42	51. 10. 56
	47. 1. 10				51. 10. 52
β Aquilae	44. 35. 24	+ 5. 35	58	5. 51. 15	51. 11. 14
	44. 35. 28				51. 11. 10
θ Antinoi	37. 15. 28	+ 5. 40	1. 15	1. 29. 8	51. 10. 59
	37. 15. 32				51. 10. 55
α Capric.	25. 30. 58	+ 5. 40	1. 58	13. 14. 28	51. 10. 52
	25. 30. 58				51. 10. 52
				Medium	51. 11. 2

Ex his igitur liquet Latitudinem huius vrbis ſine errore ſenſibili ſtatui poſſe 51°. 11'. 0".

De Longitudine Geographica eiusdem vrbis.

Pro hac Longitudine determinanda tres a Nob. *Eulero* inſtitutae habentur obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis, binae ſcilicet obſeruationes Emerſionum Primi et vna obſeruatio Emerſionis Secundi, quae obſeruationes licet plenam hoc in negotio certitudinem

titudinem ſuppeditare non valeant, tamen eas heic recenſendas cenſemus, vt ſaltem quodammodo cognoſcatur ſitus huius loci quoad Longitudinem. Prima igitur obſeruatio eſt Emerſio I. Satellitis die 2 Aug. 1769, quae in Vralſkoi Gorodok obſeruata fuit Temp. vero $9^h. 55'. 24''$, quum igitur ſecundum Tabulas Illuſt. *Wargentin* haec obſeruatio Lutetiae Pariſiorum contingere debuit Temp. vero $6^h. 36'. 1''$, prodiret hinc differentia meridianorum inter locum noſtrum et Lutetiam Pariſiorum $3^h. 19'. 23''$. Altera Emerſio I. Satellitis contigit die 18 Auguſti Temp. vero $8^h. 14'. 58''$, cuius Temp. Pariſinum ex Tabulis habetur $4^h. 57'. 27''$, vnde deducitur differentia meridianorum $3^h. 17'. 31''$. Denique Emerſio Secundi Satellitis in Vralſkoi Gorodok die 21 Aug. Temp. vero $8^h. 13'. 53''$ obſeruata et cum Tempore Pariſino ex Tabulis deducto $4^h. 58'. 19''$ comparata, dat differentiam meridianorum $3^h. 15'. 34''$. In tanta concluſionum diſcrepantia, ineptum foret mediam aliquam determinationem eligere, veriſimile autem eſt determinationem illam, quae ex Emerſione I. die 18 Auguſti colligitur, ad veritatem proxime accedere. Nam de priori emerſione ex diario Nob. *Euleri* liquet, eam eo minus tutam eſſe poſſe, quod tribus poſt obſeruationem elapſis minutis primis, omnes Satellites ipſi penitus diſparuerint quia Iupiter iam vaporibus horizontis immergebat. De obſeruatione vero ſecundi Satellitis, quae valde bona eſſe poteſt, tenendum eſt, ex ea nihil concludi poſſe niſi correctio Tabularum, pro hoc tempore ex aliis obſeruationibus

bus innoteſcat, quum in Eclipſibus huius Satellitis errores Tabularum qui duobus minutis abſoluuntur, haud eſſe ſoleant inſoliti. Quicquid autem ſit, obſeruationi emerſionis primi die 15 Auguſti factae, maximam fidem habentes, Longitudinem loci noſtri a Meridiano Pariſino, ſtatuamus $3^h. 17'. 0''$ in tempore, ſiue $49°. 15'$ in gradibus aeſtimatam.

De Latitudine vrbis Tſcherkaſk.

In hac vrbe Nob. *Eulerus* duplici vice obſeruationes inſtituit, primum ſcilicet menſibus Nouembris et Decembris Anni 1769, tum vero iterum menſe Martii Anno 1770 poſtquam ex itinere, quo caſtella St. Demetrium et Taganrock inuiſebat, redux factus eſſet. Dum prima vice in hac vrbe verſabatur correctionem Quadrantis inuenit $5'. 48''$ additiuam, poſteriori autem $6'. 12''$ iterum additiuam:

Anno 1769	Altit. limb. ☉ ſuper.	Corr. Quad.	Semid. ☉	Refr - Par.	Decl. ☉ Auſtr.	Eleuat. Poli
Nou. die 19	23°.22′.51″	+ 5′.48″	16′.14″	2′. 4″	19°.36′. 4″	47°.13′.35″
20	23. 9. 6			2. 6	19. 49.42	47. 13.44
23	22. 30.56			2. 10	20. 28.25	47. 13. 15
24	22. 18.58		16. 15	2. 11	20. 40.33	47. 13. 7
26	21. 55.20			2. 14	21. 3.41	47. 13.40
Dec. 8	20. 11.30		16. 17	2. 27	22. 47.58	47. 13.28
12	19 50.58			2. 28	23. 8.43	47. 13.16
21	19. 31.45		16. 18	2. 32	23. 28. 7	47. 13.10
22	19. 31.45				23. 27.54	47. 13.23
1770 Ian. 1	19. 59.25		16. 18	2. 29	23. 0.11	47. 13.25
Mart. 14	40. 30. 59	+ 6.12	16. 7	1. 0	2. 25.59	47. 13.57
15	40. 54. 53	+ 6.11		57	2. 2 19	47. 13.41
23	44. 4. 15	+ 6. 8	16. 4	51	Bor. 1. 7. 8	47. 13.40
29	46. 24. 53	+ 6. 6	16. 3	47	3. 28. 2	47. 13.53
30	46. 48. 28	+ 6. 5		46	3. 51. 20	47. 13.36
					Medium	47. 13. 31

Sequuntur iam determinationes pro Latitudine vrbis Tſcherkaſk ex obſeruatis altitudinibus ſtellarum fixarum deductae.

1769 21 Dec.	Altit. Stellae obſeru.	Corr. Quad.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
α Andromedae	70°.30′.38″	+ 5′.48″	20″	27° 29′ 32″	47°.13′.26″
γ Pegaſi	56. 36. 19	+ 5.32	37	13. 54. 31	47. 13. 18
η Ceti	31. 17. 55	+ 5.48	1′.34	11. 24. 39	47. 13. 12
1770 24 Mart.					
δ Gemin.	65. 3.52	+ 5.47	26	22. 23. 5	47. 13. 52
β Canis min.	51. 25. 7	+ 6. 1	45	8. 44. 12	47. 13. 49
Procyon	48. 28.49	+ 6. 4	50	5. 48. 1	47. 13. 58
β Gemin.	71. 14. 13	+ 6. 12	18	28 33. 43	47. 13. 37
				Medium	47. 13. 36

Hinc

Hinc medio ſumto harum concluſionum Eleuatio Poli vrbis Tſcherkaſk ſtatui poterit 47°. 13′. 34″.

De Longitudine vrbis Tſcherkaſk.

Pro Longitudine hac determinanda, primum ſuppetit obſeruatio Immerſionis I. Satellitis Iouis, die 25 Martii A. 1770, quae immerſio in Tſcherkaſk contigit Temp. vero $16^h. 6'. 8''$, cum Pariſiis ex calculo Tabularum contingere debuiſſet Temp. $13^h.35'.40''$, vnde concluditur differentia meridianorum inter Tſcherkaſk et Lutetias Pariſiorum $2^h 30'. 28''$, ſeu in Gradibus 37°. 37′. Huic autem obſeruationi correſpondentem quum habeamus obſeruationem Tyrnauiae eodem die factam, praeſtabit per comparationem harum obſeruationum, Longitudinem vrbis Tſcherkaſk concludere.

Immerſ. I. 1770 d. 25 Martii in Tſcherkaſk	$16^h.$	$6'.$	$8''$	Temp. vero
Tyrnauiae	14.	37	14	
Differ. Meridian.	1.	28.	54	
Longitud. Tyrnauiae a Pariſiis	1.	0.	55	
Longitudo Tſcherkaſk a Pariſiis	2.	29.	49	

Praeter hanc obſeruationem in eodem loco quoque facta eſt obſeruatio Immerſionis pro II. Satellite die 29 Martii, quae in Tſcherkaſk contigit Tempore vero $13^h. 40'. 30''$, et cum in Pariſiis ſecundum Tabulas contingere debuiſſet Temp. $11^h. 11'. 21''$, prodiret hinc differentia meridianorum, inter Tſcherkaſk et Lutetias Pariſiorum $2^h.29''.9'$, verum ſiquidem correctio Tabularum pro hoc tempore, circiter $40''$ diminutiua aeſtimari poterit, ex hac obſeruatione ſequeretur differentia meridianorum inter Pariſios et Tſcherkaſk $2^h.29' 50''$. Quicquid autem ſit, haud multum nos a veritate abludere poſſe exiſtimamus, ſi numero rotundo eandem ſupponamus $2^h.30'.0''$, ſeu in grad. 37°. 30′.

Determinatio Latitudinis pro Caſtello St. Demetrii.

Correctio Quadrantis horizontalis pro hoc loco inuenta eſt 5'. 39" additiua, qua ex hypotheſi no- noſtra correcta in ſequenti calculo vtemur:

Anno 1770	Altit. limb. ⊙ ſuper.	Corr. Quadr	Semid. ⊙	Refr-Paral.	Decl. ⊙ Auſt	Eleuat. Poli
Iun. 21	23°. 8'.53"	+ 5'.39"	16'.18"	2'. 6"	19°.51'. 0"	47°.12'.51"
28	24. 52. 5		16. 17	1. 58	18. 7. 41	47. 12. 50
29	25. 7. 23			1. 54	17. 51. 35	47. 13. 33
					Medium	47. 13. 5

Ex obſeruatis vero altitudinibus ſtellarum fixarum diebus 21 et 28 Ianuarii, ſequentes pro Latitudine colliguntur determinationes:

1770 d. 21 et 28 Ian.	Altit. Stellae obſeruata	Corr. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuatio Poli
α Ceti	45°.52'.47"	+ 5'.53"	55"	3°.10'.33"	47°.13'. 8"
	45. 52. 35			32	47. 13. 20
ζ Eridani	33. 1. 28	+ 5. 49	1'.27"	9. 41. 16	47. 13. 5
	33. 1. 28				47. 13. 5
ε Eridani	32. 27. 46		1. 29	10. 15. 1	47. 13. 3
	32. 27. 42			2	47. 13. 6
δ Eridani	32. 9. 12		1. 30	10. 33. 35	47. 13. 2
	32. 9. 22			36	47. 12. 53
γ Eridani	28. 31. 57		1. 43	14. 10. 46	47. 13. 21
	28. 32. 30			47	47. 12. 47
η Pleiadum	65. 4. 5	+ 5. 14	25	22. 22. 45	47. 13. 51
	65. 3. 39				47. 13. 19
				Medium	47. 13. 10

Sin

Sin vero altitudo η Pleiadum die 21 Ianuarii excludatur, fiet Latitudo huius loci 47°. 13′ 6″, cui concluſioni tuto acquieſcere poterimus. Pro Longitudine huius loci determinanda, nulla adeſt obſeruatio, caeterum ea facile ex Longitudinibus pro *Tſcherkaſk* et *Taganrock* concludi poteſt.

Latitudo caſtelli Taganrock ex obſeruationibus deducta.

Pro hoc loco correctio quadrantis inuenta eſt 5′. 21″ additiua. Ex binis altitudinibus Solis deducitur Eleuatio Poli 47°. 12′. 40″, vt ſequitur

Die 13 Febr. altit. limb. ☉ Super. corr.	29°. 49′. 15″	die 16 Febr.	30°. 50′. 49″
Semid. ☉ - - -	− 16. 14	- - -	− 16. 14
Refr - Paral. - - -	− 1. 32	- - -	− 1. 28
Altit. cent. ☉ - - -	29. 31. 29	- - -	30. 33. 7
Declin. ☉ - - -	13. 15. 53	- - -	12. 14. 12
Eleuatio Poli - - -	47. 12. 38	- - -	47. 12. 41

Altitudines vero ſtellarum fixarum pro hac Latitudine ſequentes ſuppeditant determinationes:

1770 d. 12 13 Febr.	Altit. Stellae obſeru.	Cor. Quadr.	Refr.	Decl. Stella	Eleuat. Poli
ε Tauri	61°. 21′. 51″	5′. 0″	31″	18°. 39′. 9″	47°. 12′. 50″
	61. 22. 14				47. 12. 27
α Tauri	58. 44. 30	5. 2	34	16. 1. 50	47. 12. 53
	58. 44. 15				47. 13. 7
β Tauri	71. 5. 32	5. 21	20	28. 23. 30	47. 12. 57
	71. 6. 27				47. 12. 3
δ Orionis	42. 13. 35	5. 19	1′. 2	0. 29. 16	47. 12. 52
	42. 13 50				47. 12. 37
ζ Tauri	63. 42. 5	4. 58	21	20. 58. 55	47. 12. 20
ζ Orionis	40. 38. 7	5. 21	1. 6	2. 5. 1	47. 12. 37
	40. 37. 59				47. 12. 46
α Orionis	50. 3. 50	5. 11	47	7. 20. 40	47. 12. 26
	50. 3. 27				47. 12. 49
Sirius	26. 18. 57	5. 21	1. 54	16. 24. 51	47. 12. 45
	26. 18. 59				47. 12. 47
Rigel	34. 14. 19	———	1 23	8. 29. 7	47. 12. 36
				Medium	47. 12. 41

Ex quibus igitur concluditur Latitudinem caſtelli Taganrock numero rotundo ſtatui poſſe 47°. 12′. 40″.

De Longitudine eiusdem loci.

Pro Longitudine huius loci determinanda, adeſt Immerſio I. Satellitis Iouis, quae die Febr. 14 in Taganrock obſeruata fuit Temp. vero $17^h. 30'. 23''$, quum igitur Tempus huius obſeruationis Pariſinum ex Tabulis deductum incidat in $15^h. 5'. 8''$, colligitur differentia meridianorum inter hunc locum et Pariſios

Pariſios 2^h. 25$'$. 15$''$, quae in Gradus conuerſa dat 36°. 19$'$ circiter. Quae tamen determinatio cum aliqua Latitudine accipienda eſt, ſiquidem ipſa obſeruatio, in qua fundatur non omnimodam ſibi vindicat certitudinem.

Determinatio Latitudinis pro vrbe Krementſchuck.

1770 die	Altit. limb.☉ ſuper.	Cor. Quadr.	Refr - Paral.	Semid. ☉	Decl. ☉ Bor.	Eleuat. Poli
April. 27	55°. 2′. 1″	+ 5′ 25″	32	15′.55″	13°. 54′. 11″	49°. 3′. 12″
28	55. 20 57		31		14. 13. 7	49. 3. 12
30	55. 57. 57	+ 5. 24	30	15. 54	14. 50. 17	49. 3. 20
Maii 1	56. 16. 8				15. 8. 28	49. 3. 20
5	57. 26. 19	+ 5. 23	28	15. 53	16. 8. 48	49. 3. 27
7	57. 59. 39	+ 5. 22	27		16. 52. 23	49. 3. 42
12	59. 13. 49	+ 5. 21	26	15. 52	18. 11. 20	49. 3. 28
14	59. 48. 20	+ 5. 20	25	15. 51	18. 40. 51	49. 3. 27
15	60. 2. 14				18. 55. 8	49. 3 50
					Medium	49. 3. 26

In his calculis Correctionem Quadrantis horizontalem ſuppoſuimus 5$'$. 40$''$ additiuam, reliquasque correctiones ad praeſcriptum noſtrae hypotheſeos definiuimus. Nunc itaque diſpiciamus quoque, quid ex obſeruatis altitudinibus ſtellarum fixarum de Latitudine huius loci, ſtatuendum ſit.

1770

1700 dieb. 30 Apr et 7 Maii	Altit. Stellae obſeru.	Corr. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
Regulus	53°. 56′ 23″	+ 5′. 26″	41″	13°. 4′. 54″	49°. 3′ 46″
ζ Leonis	65. 24. 35	+ 5. 15	26	24 33. 9	49. 3 45
δ Leonis	62. 38. 31	+ 5. 17	29	21. 46. 44	49. 3. 22
β Leonis	56. 43. 21	+ 5. 24	37	15. 51. 16	49. 3. 8
	56. 43. 0			15. 51. 17	49. 3. 30
ε Corui	19. 32. 37	+ 5. 40	2′. 38	21. 20. 45	49 3 36
η Virginis	41. 28. 45	+ 5. 39	1. 4	0. 36. 37	49 3. 17
	41. 28. 24			0. 36. 38	49. 3 39
γ Virginis	40. 49. 42	+ 5. 39	1. 6	0. 11. 16	49. 3. 28
	40. 49. 50			0. 11 16	49 3. 20
δ Virginis	45. 31. 11	+ 5. 35	56	4. 38. 58	49. 3. 8
	45. 30 50			4. 38. 59	49. 3. 30
ε Virginis	53. 3. 31	+ 5. 27	42	12. 11. 50	49. 3. 21
	53. 3 33			12. 11. 51	49. 3. 20
θ Virginis	36. 33. 39	+ 5. 40	1. 17	4 18. 33	49 3. 25
	36. 33. 29			4. 18. 32	49. 3. 35
α Virginis	30. 54. 51	+ 5. 40	1. 35	9. 57. 31	49. 3. 34
	30. 55. 2				49. 3 23
ζ Virginis	41. 26. 38	+ 5. 39	1. 4	0. 34. 58	49. 3 44
	41. 26. 52				49. 3. 30
				Medium	49. 3. 28

Videtur itaque Latitudinem huius loci ſatis tuto ſtatui poſſe 49°. 3′. 28″.

De Longitudine vrbis Krementſchuck.

Pro hac Longitudine ſtabilienda binae ſuppetunt obſeruationes circa Eclipſes Satellitum Iouis. Immer-

Immerſio ſcilicet Secundi Satellitis, quae hoc in loco obſeruata fuit die 30 Aprilis Temp. vero $12^h. 58'. 40''$ et Immerſio Primi, obſeruata die 10 Maii Temp. vero $16^h. 7'. 21''$, cui vtrique obſeruationes quoque correſpondentes adſunt.

Immerſio I. Satellitis die 10 Maii obſeruata in Krementſchuck Temp. vero	$16^h. 7'. 21''$
Stockholmiae - - - -	15. 5. 43
Lundae - - - -	14. 45. 45
Hinc differentia meridianorum inter Stockholmiam et Krementſchuck	1. 1. 38
Lund et Krementſchuck	1. 21. 36

Poſita igitur Longitudine Stockholmiae a Pariſis $1^h. 2'. 55''$ et Lundae $43'. 30''$; fieret Longitudo pro Krementſchuck $2^h. 4'. 33''$ vel $2^h. 5'. 6''$.

Immerſio II. Satellitis die 30 Aprilis obſeruata in Krementſchuck Temp. vero	$12^h. 58'. 40''$
Tyrnauiae - - - -	11. 55. 8
Zaricini - - - -	13 42. 44
Differentia meridianorum inter Krementſchuck et Tyrnau -	1. 3. 32
Krementſchuck et Zaricin -	44. 4

Poſita igitur Longitudine Tyrnauiae a Pariſiis $1^h. 0'. 55''$ et Zaricini $2^h. 48'. 30''$, prodit Longitudo pro Krementſchuck a Pariſiis $2^h. 4'. 27''$ vel $2^h. 4'. 26''$. Medio igitur harum quatuor concluſionum ſumto, prodiret Longitudo quaeſita $2^h\ 4'. 38''$. Quae tamen, quia immerſio I. in Lund obſeruata, reliquis obſeruationibus aliquanto magis dubia eſſe poterit, a nobis eſſe ſtatue-

tur $2^h. 4'. 35''$, ſeu in Gradibus $31°. 9'$ circiter, quae determinatio non ſane multum a veritate abludere poteſt, ob inſignia certitudinis criteria, quibus obſervationes gaudere videntur, egregiumque ipſarum inter ſe conſenſum.

De Latitudine caſtelli, quod a St. Eliſabetha nomen ducit.

Pro hoc loco eas praeprimis ſeligemus obſervationes altitudinum Solis, quae proxime circa ipſum tempus Solſtitii captae ſunt, pro quibus quum correctio Quadrantis horizontalis inuenta fuerit $-1'.54''$, ad altitudinem $65°$ eam ſupponamus fuiſſe $-2'.19''$, quumque Semidiameter Solis interuallo temporis, quo hae obſeruationes factae ſunt, fere conſtanter fuerit $15'.47''$ et refractio $-18'$; altitudines limbi Solis Superioris obſeruatae ad veras altitudines centri Solis reducentur, ſi ex illis conſtanter ſubtrahantur $18'. 24''$. Quibus obſeruatis, pro latitudine ſequentes prodibunt concluſiones:

1770 die	Altit. limb. ⊙ ſuper.	Decl. ⊙ Bor.	Eleuat. Poli
14 Iunii	65°. 6'. 6''	23°.17'.43''	48°.30'. 1''
18 ——	65. 15. 8	23. 26. 7	48. 29 23
20 ——	65. 16. 22	23. 27. 50	48. 29. 52
21 ——	65. 16. 48	23. 28. 4	48. 29. 40
22 ——	65. 16. 37	23. 27. 54	48. 29. 41
23 ——	65. 15. 58	23. 27. 19	48. 29. 45
25 ——	65. 13. 14	23. 24. 52	48. 30. 2
28 ——	65. 6. 56	23. 18. 24	48. 29. 38
		Medium	48. 29. 45

Pro

Pro Latitudine huius loci determinanda, tum quidem occurrunt altitudines ſtellarum fixarum a Nob. *Eulero* die 7 Iunii captae, correctione quadrantis tunc exiſtente 6°. 55′ additiua; verum quum haec correctio per vnicam tantum obſeruationem demonſtrata ſit, et altitudinibus applicata, imprimis dum ex noſtra hypotheſi corrigitur, concluſiones praebeat haud parum diſcrepantes ab illis, quae altitudinibus Solis innituntur; heic tantum adhibere ſtatuimus obſeruationes altitudinum pro Arcturo et ζ Bootis verſus Auſtrum captas, nec non altitudines β et γ vrſae minoris verſus Boream ſumtas.

Primum itaque pro Arcturo ſequentes habentur obſeruationes:

Altitudo apparens Arcturi			
die 14 Iunii	61°.55′.43″	Altit. Arct. vera	61°.53′.14″
15 ——	61. 55. 58	Declinatio	20. 23. 49
16 ——	61. 56. 14		41. 29. 25
17 ——	61. 56. 10	Eleuat. Poli	48. 30. 35
18 ——	61. 55. 57		
24 ——	61. 55. 54		
30 ——	61. 56. 7		
Medium	61. 56. 0		
Corr. Quadr.	—2. 16		
Refr.	—30		
Altit. vera	61. 53. 14		

Pro ζ Bootis hae adſunt obſeruationes:

Altitudo ζ Bootis obſeruata		Altit. ζ Bootis obſeruata	
die 14 Iunii	56°.16'. 0''		56°.16'.12''
15 ——	56. 16. 2	Corr. Quadr.	−2. 10
17 ——	56. 16. 25	Refr.	−38
18 ——	56. 16. 16	Altit. vera =	56. 13. 24
24 ——	56. 16. 18	Declin. =	14. 43. 31
Medium	56. 16. 12		41. 29. 53
		Eleuat Poli	48. 30. 7

Sequuntur nunc obſeruationes pro β Vrſae minoris:

Altitudo β Vrſae obſeruata		Altitudo β Vrſae	
die 18 Iunii	63°.27' 44''	obſeruata	63°.27'.20''
24 ——	63. 27. 11	Corr. Quadr.	−2. 17
25 ——	63. 27. 32	Refr.	−29
30 ——	63. 27. 2	Altit. vera	63. 24. 34
Medium	63. 27. 20	Declin. β	75. 5. 55
		Eleuat. Poli	48. 30. 29

Demum pro γ Vrſae hae adſunt obſeruationes:

Altitudo γ Vrſae obſeruata		Altit. γ Vrſae	
die 18 Iunii	65° 54'. 9''	obſeruata	65°.53'.55''
24 ——	65. 53. 56	Corr. Quadr.	−2. 19
25 ——	65. 53. 43	Refr.	−26
27 ——	65. 53. 52	Altit. appar.	65 51. 10
30 ——	65 53. 56	Declin. γ	72. 39. 18
Medium	65. 53. 55	Eleuat. Poli	48. 30. 28

verum

verum ne ſic quidem obſeruationes pro altitudinibus Solis, ad conſenſum cum obſeruationibus circa altitudines fixarum redigi poſſunt; nec hic quidem diſſenſus tolli poteſt, ſi correctio Quadrantis talis adhibeatur, qualis ad horizontem inuenta fuit, tum enim diſſenſus inter altitudines Solis et Arcturi manebit idem vt antea; altitudo vero Arcturi cum altitudinibus β et γ Vrſae minoris nullo modo conciliari poterunt; quam ob cauſſam in iſthoc diſſenſu aliam rationem determinandi Latitudinem loci propoſiti, tutiorem non eſſe exiſtimamus, quam vt inter concluſiones iam inuentas medium capiatur, quo facto prodibit Latitudo Caſtelli St. Eliſabeth $48°. 30'. 17''$, quam tamen in fauorem obſeruationum circa altitudines Solis factarum, numero rotundo $48°. 30'. 10''$ ſtatuere licebit.

De Longitudine Caſtelli St. Eliſabethae.

Ternae in hoc loco a Nob. *Eulero* inſtitutae habentur obſeruationes circa Eclipſes, Satellitum Iouis. Harum prima eſt Emerſio ſecundi Satellitis quae die 19 Iunii obſeruata eſt Temp. vero $9^h. 21'. 32''$. Eadem Emerſio vero Tyrnauiae obſeruata habetur Temp. vero $8^h. 23'. 37''$ et Zaricini $10^h. 9'. 34$, vnde differentia meridianorum St. Eliſabethae a Tyrnauia $0^h. 57'. 55''$ et a Zaricin $48'. 2''$; hincque a Pariſiis vel $1^h. 58'. 50''$, vel $2^h. 0'. 28''$. Prior autem harum concluſionum heic in computum venire non debet, quoniam obſeruatio Tyrnauienſis valde dubia erat.

Emerſio Primi Satellitis die 20 Iunii

in St. Eliſabetha obſeru. Temp.	$11^h. 6'. 3''$
Stockholmiae	10. 8. 30
Zaricin	11. 53. 52

Hinc concluditur differentia meridianorum

inter St. Eliſabeth et Stockholmiam	57. 33
St. Eliſabeth et Zaricin	47. 49

Ideoque Longitudo St. Eliſabethae a meridiano Pariſino, per priorem comparationem $2^h. 0'. 28''$, per poſteriorem autem $2^h. 0' 41''$.

Emerſio I. Satellitis die 27 Iunii

in St. Eliſabeth obſeruata Temp. vero	$12^h.58' 55''$
Pariſiis contingere debuit ex calculo	10. 58. 30
Hinc Longitudo Eliſabethae a Pariſiis	2. 0. 25

Medio igitur ſumto harum concluſionum, prodibit Longitudo huius loci $2^h. 0'. 30''$, ſeu in Gradibus $30°. 7\frac{1}{2}'$ a Meridiano Pariſiano computata, quae ſi non prorſus exacta ſit, tamen haud longe a veritate aberrabit, praeſertim quum vtraque obſeruatio emerſionis Primi, coelo bene fauente ſit peracta.

Determinatio Latitudinis pro Caſtello Saporogſkaja - Sietſcha.

Ex obſeruationibus altitudinum Solis et ſtellarum fixarum, eas tantum heic recenſere placet, quae factae ſunt, correctione Quadrantis horizontali exiſtente primum $- 1'. 34''$, tum vero $- 1'. 48''$. Ex obſeruatis igitur altitudinibus Solis, ſequentem in

in modum determinatur Eleuatio Poli pro Saporogſkaja - Sietſcha.

1770 Iulii	Altit. limb. ⊙ ſuper.	Corr. Quad.	Semid. ⊙	Refr - Par.	Decl. ⊙ Bor.	Eleuat Poli
20	63°. 26'. 42"	− 1'. 57"	15'. 47"	21"	20°. 40'. 13"	47°. 31'. 36"
24	63. 38. 45		15. 48	22	19. 52. 19	47. 31. 41
25	62. 25. 47	− 1. 56			19. 39. 31	47. 31. 50
26	62. 13. 2				19. 26. 21	47. 31. 27
27	61. 59. 18				19. 12. 52	47. 31. 30
31	61. 2. 31	− 1. 55		24	18. 15. 55	47. 31. 41
Aug. 1	60. 47. 17		15. 49	25	18. 0. 51	47. 31. 43
3	60. 16. 31	− 1. 54			17. 29. 57	47. 31. 34
7	59. 11. 20	− 2. 7	15. 50	26	16. 24. 46	47. 31. 49
9	58. 37. 17			27	15. 50. 33	47. 31. 40
11	58. 2. 28	− 2. 6		28	15. 15. 20	47. 31. 16
12	57. 44. 11		15. 51		14. 57. 21	47. 31. 35
13	57. 25. 55	− 2. 5		29	14. 39. 8	47. 31. 38
14	57. 7. 30				14. 20. 41	47. 31. 36
					Medium	47. 31. 37

Ex

Ex altitudinibus vero ſtellarum fixarum ſequentes habentur determinationes:

1770 d. 24. 26 Iulii	Alt. Stellae obſerv.	Cor. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
Ophiuchi δ	39°. 26′ 10″	− 1′. 34″	1′. 8″	3°. 5′. 4″	47°. 31′. 28″
	39. 25. 59				47. 31. 39
ε	38. 24. 28		1. 12	4. 6. 51	47. 31. 27
Antares	16. 38. 45		3. 7	25 54. 6	47. 31. 50
	16. 38. 51				47. 31. 44
Ophiuchi ζ	32 26. 14		1. 28	10. 4. 58	47. 31. 50
	32. 26. 29				47. 31. 35
η	27. 6. 57		1. 51	15. 25. 16	47. 31. 12
	27. 6. 44				47. 31. 25
Hercul. α	57. 11. 9	− 1. 51	37	14. 40. 15	47. 31. 34
	57. 11. 15				47. 31. 28
Ophiuchi θ	17. 47. 55	− 1. 34	2. 57	24. 44. 51	47. 31 45
	17 47 59				47 31. 41
α	55. 15. 30	− 1. 49	40	12. 44. 51	47. 31. 50
	55. 15. 45				47. 31. 35
				Medium	47. 31. 36

Quibus

Quibus determinationibus adhuc ſequentes adiiciamus:

1770 11 Aug.	Altit. Stellae obſeru.	Corr. Quad.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
Aquilae ε	57°. 17′. 36″	– 2′. 15″	37″	14°. 46′. 25″	47°. 31′. 31″
ζ	56. 3. 42	– 2. 4	38	13. 32. 23	47. 31. 23
δ	45. 11. 32	– 1. 53	57	2. 40. 29	47. 31. 47
Cygni β	70. 0. 33	– 1. 50	21	27. 29. 30	47. 31. 8
Sagittae α	60. 0. 50	– 2. 8	33	17. 30. 7	47. 31. 52
Aquilae γ	52. 35 20	– 2. 0	44	10. 4. 10	47. 31. 34
α	50. 48. 10	– 1. 58	46	8. 16. 37	47. 31. 11
β	48. 22. 22	– 1. 56	51	5. 51. 10	47. 31. 35
Antinoi θ	41. 2. 1	– 1. 49	1. 5	1. 29. 9	47. 31. 44
Capric. α	29. 17. 34	– 1. 48	1. 41	13. 14. 28	47. 31. 27
β	27. 2. 25		1. 51	15. 29. 23	47. 31. 41
Delph. ε	53. 2. 29	– 2. 1	43	10. 32. 20	47. 31. 35
α	57. 38. 9	– 2. 5	37	15. 7. 0	47. 31. 33
				Medium	47. 31. 32

Medio igitur ſumto inter has concluſiones, Latitudo loci pro Saporogſkaja Sietſcha ſtatui poteſt 47°. 31′. 35″. Altitudines vero ſtellarum verſus Boream factas heic in computum non duximus, quia eaedem, ob incertitudinem circa veram refractionis quantitatem, alicui dubio obnoxiae eſſe poterunt.

Determinatio Longitudinis pro Caſtello Saporogſkaja Sietſcha.

Pro Longitudine huius loci determinanda, ternae a Nob. *Eulero* obſeruatae ſunt Eclipſes Satelli-

tum Iouis. Harum prima eſt Emerſio Tertii Satellitis, quae in Saporogſkaja Sietſcha contigit die 10 Iulii Temp. vero $11^h. 24'. 13''$. Verum quum huic obſeruationi alia correſpondens alibi facta non ſuppetat, hinc pro Longitudine determinanda nihil concludi poteſt. Secunda obſeruatio eſt emerſio Secundi Satellitis die 21 Iulii, quam Nob. *Eulerus* obſeruauit Temp. vero $9^h. 0'. 37''$, quum igitur Temp. Pariſ. huius obſeruationis ſit $6^h. 52'. 59''$, hinc ſequeretur differentia meridianorum inter Saporogſkaja Sietſcha et Pariſios $2^h. 7'. 38''$, verum quum ex aliis obſeruationibus conſtet errorem Tabularum pro hoc tempore fuiſſe $1'. 40''$ in exceſſu, Tempus correctum Pariſinum huius emerſionis erit $6^h. 51'. 19''$, ideoque differentia meridianorum quaeſita $2^h. 9'. 18''$, quae certe nimis magna eſt. Denique et Emerſio Primi Satellitis hoc in loco obſeruata habetur die 14 Aug. Temp. vero $8^h. 2'. 58''$, cuius Emerſionis Tempus Pariſinum quum incidat in $5^h. 54''. 51''$ ex Tab. Celeb. *Wargentin*, fiet ex hac obſeruatione differentia meridianorum inter Saporogſkaja Sietſcha et Pariſios $2^h. 8'. 7''$, quae igitur numero rotundo ſtatui poteſt $2^h. 8'. 10''$ ſiue in Gradibus $32°. 2\frac{1}{2}'$. Quamuis autem haec obſeruatio coelo ſereno et fauente inſtituta ſit; tamen ob lumen crepuſculi adhuc ſenſibile, facile fieri poteſt, vt haec emerſio iuſto tardius ſit obſeruata, ideoque Longitudo huius loci adhuc aliquanto minor ſit, quam quae ex hac obſeruatione colligitur.

Deter-

Determinatio Latitudinis pro vrbe Samara.

Correctio Quadrantis in hoc loco perinde ac in Saporogſkaja Sietſcha, inuenta eſt −1′. 48″, qua igitur in ſequentibus calculis vtemur:

1770 Aug.	Altit. limb. ⊙ ſuper.	Corr. Quadr.	Semid. ⊙	Refr-Par.	Declin. ⊙	Eleuat. Poli
20	54°.14′.11″	−2′.2″	15′.52″	32″	12°.25′.23″	48°.29′.39″
21	53. 54. 19	- - -	- - -	33	12. 5. 26	48. 29. 34
22	53. 34. 24	- - -	15. 53	34	11. 45. 17	48. 29. 22
23	53. 13. 42	−2. 1	- - -	35	11. 24. 58	48. 29. 45
					Medium	48. 29. 35

Ex obſeruatis autem altitudinibus fixarum, ſequentes colliguntur determinationes:

1770 19. 21 Aug.	Altit. Stellae obſeru.	Corr. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuatio Poli
Aquilae ε	56°.20′. 0″	−2′. 5″	38″	14°.46′.25″	48°.29′. 8″
ζ	55. 5. 39	−2. 4	40	13. 32. 23	48. 29. 28
δ	44. 13. 46	−1. 53	59	2. 40. 29	48. 29. 35
Sagit. α	59. 3. 6	−2. 7	34	17. 30. 7	48. 29. 41
	59. 3. 16				48. 29. 31
Aquilae γ	51. 37. 11	−1. 59	46	10. 4. 10	48. 29. 42
α	49. 50. 0	−1. 57	48	8. 16. 37	48. 29. 22
β	47. 24. 11	−1. 55	52	5. 51. 10	48. 29. 46
Antin. θ	40. 4. 3	−1. 48	1′. 8	1. 29. 9	48. 29. 44
Capric. α	28. 19. 21		1. 44	13. 14. 28	48. 29. 43
β	26. 4. 36		1. 56	15. 29. 23	48. 29. 45
				Medium	48. 29. 35

Eleuatio igitur Poli pro vrbe Samara hinc deducitur 48°. 29′. 35″.

De Longitudine eiusdem loci.

Tres in hac vrbe a Nob. *Eulero* inſtitutae ſunt obſeruationes circa Eclipſes Satellitum Iouis. Nam 22 Aug. ab ipſo obſeruatae habentur, Emerſio Secundi Satellitis et Immerſio Tertii, quarum prior contigit, Temp. vero $8^h. 44'. 0''$, poſterior vero $8^h. 55'. 21''$. Quum ex poſteriori obſervatione pro Longitudine vix quidquam tuto concludi poſſit, videamus quid ex priori ſequatur. Primum igitur ſi haec obſeruatio conferatur cum Tempore Pariſino eiusdem obſeruationis, quod incidit in $6^h. 31'. 46''$, adplicata nimirum Tabulis correctione $1'. 50''$ ſubtractiua, inde colligetur differentia meridianorum inter vrbem Samara et Pariſios, $2^h. 12'. 14''$. Occurrit quidem quoque huic obſeruationi, alia correſpondens in Zaricin facta, qua Emerſio obſeruata eſt Temp. vero $9^h.22'.10''$, vnde poſita Longitudine Zaricin a Pariſiis $2^h.48'.30''$, colligeretur differentia meridiani Samarae a Pariſiis $2^h. 10'. 20''$; verum quum obſeruatio in Zaricin facta aliquatenus dubia eſt, prior harum determinationum propius ad veritatem accedere videtur, niſi ſi forſan error obſeruationis in Samara factae, cum errore obſeruationis Zaricinenſis eiusdem ſit quantitatis. Emerſio denique Primi die 21 Aug. in Samara obſeruata eſt Temp. vero $10^h. 5'. 33''$, vnde ſubtracto tempore Pariſino eiusdem emerſionis ex Tabulis deducto $7^h. 51'. 53''$, colligitur differentia meridianorum $2^h. 13'. 40''$, quae certe nimis in exceſſu peccat

peccat. Videtur igitur Longitudinem Samarae a Pariſiis numero rotundo ſtatui poſſe $2^h. 12'$ ſiue in Gradibus $33°$.

De Latitudine vrbis Perewolotſchna.

Correctio Quadrantis eadem inuenta eſt, ac in binis prioribus locis. Pro Latitudine autem determinanda, vnica habetur obſeruatio altitudinis Solis, die 1 Sept., qua inuenta eſt altitudo Limbi Solis ſuperioris $49°. 40'. 59''$, vnde poſita Declinatione Solis pro hac obſeruatione $8°. 14'. 28''$, Semidiametro Solis $15'. 55''$ et refractione $41''$ colligitur eleuatio Poli huius loci $48°. 52'. 2''$. Ex altitudinibus vero fixarum die 31 Aug. ſequentes habentur determinationes:

	Altit. Stellae obſeru.	Corr. Quadr.	Refr	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
Cygni β	68°. 40'. 13''	− 1'. 54''	20''	27°. 29'. 30''	48°. 51'. 31''
Sagittae α	58. 41. 3	− 2. 6	31	17. 30. 8	48. 51. 42
Aquilae γ	51. 15. 18	− 1. 58	42	10. 4. 10	48. 51. 32
α	49. 27. 46	− 1. 56	45	8. 16. 37	48. 51. 32
β	47. 2. 14	− 1. 55	50	5. 51. 10	48. 51. 41
Sirius	24. 47. 13	− 1. 48	2' 3	-6 24. 54	48. 51. 44
				Medium	48. 51. 37

Hinc igitur Liquet, Latitudinem huius loci, numero rotundo ſtatui poſſe $48°. 51'. 40''$. Pro Longitudine vero determinanda, nullae ſuppetunt obſeruationes.

De Latitudine vrbis Gluchow.

Correctione Quadrantis horizontali, ſuppoſita vt ante $-1'.48''$, ex obſeruatis altitudinibus Solis, ſequentes habentur determinationes:

1770 Sept.	Altit. limb. ☉ ſuper.	Cor. Quadr.	Semid. ☉	Refr - Paral.	Decl. ☉ Auſt.	Eleuat. Poli
23	38°. 30'. 0''	− 1'. 48''	16'. 1''	1'. 4''	0°. 8'. 24''	51°. 40'. 29''
24	38. 6. 31			1. 6	0. 31. 52	51. 40. 32
27	36. 56. 29		16. 2	1. 9	1. 42. 9	51. 40. 21
Octobr. 5	33. 50. 10		16. 3	1. 18	4. 48. 45	51. 40. 14
6	33. 26. 52			1. 20	5. 11. 52	51. 40. 27
7	33. 3. 36		16. 4	1. 21	5. 34. 55	51 40. 42
11	31. 32. 12		16. 6	1. 25	7. 6. 21	51. 40. 46
15	30. 2. 41		16. 7	1. 30	8. 36. 15	51. 40. 29
16	29 40 45			1. 33	8. 58. 25	51. 40. 18
22	27 30. 33		16. 8	1. 42	11. 8. 37	51. 40. 28
25	26. 27. 42		16. 9	1. 48	12. 11. 33	51. 40. 30
26	26. 7. 11			1. 49	12. 32. 9	51. 40. 26
31	24. 27. 19		16. 11	1. 59	14. 12. 10	51. 40. 29
					Medium	51. 40. 29

Porro diſpiciamus quoque, quid ex obſeruatis Altitudinibus ſtellarum fixarum de hac Latitudine concludere licet, vbi quidem eas tantum obſeruationes in computum duximus, quae Quadrante verſus Meridiem conuerſo, inſtitute ſunt, caeterae enim altitudines verſus Boream captae aliquanto incertiores videntur.

1770

1770 d. 16 Octob.	Altit. Stellar.	Corr. Quadr.	Refr.	Decl. Stellae	Eleuat. Poli
Aquilae δ	41°. 2'. 53''	− 1'. 49'	1'. 6''	2°. 40'. 31''	51°. 40'. 33''
Cygni β	65. 52. 1	− 2. 13	25	27. 29. 32	51. 40. 19
Sagittae α	55. 52. 3	− 2. 3	38	17. 30. 9	51. 40. 47
Aquilae γ	48. 26. 25	− 1. 56	51	10. 4. 12	51. 40. 34
α	46. 39. 2	− 1. 54	54	8. 16. 39	51. 40. 49
β	44. 13. 50	− 1. 52	58	5. 51. 13	51. 40 13
Capric. α	25. 8. 55	− 1. 48	2. 1	13. 14. 26	51. 40. 28
Delphin. ε	48. 54. 49	− 1. 56	50	10. 32. 23	51. 40. 20
				Medium	51. 40. 30

Hinc igitur colligitur Eleuatio Poli pro vrbe Gluchow 51°. 40'. 30''.

Determinatio Longitudinis pro eadem vrbe.

Pro Longitudine huius loci determinanda binas Nob. *Eulerus* obſeruauit Emerſiones primi Satellitis Iouis, quarum prior facta eſt, die 22 Sept. Temp. 6^h. 50'. 13'', poſterior vero die 31 Octob. 5^h.33'.7''. Quum vero Tempus Pariſinum prioris obſeruationis ex Tabulis ſit 4^h. 41'. 54'', hinc colligitur differentia Meridianorum inter Gluchow et Lutetiam Pariſiorum 2^h. 8'. 19''. Tum vero ob poſteriorem emerſionem incidentem in Tempus Pariſinum 3^h.25'.5'', colligitur Longitudo huius loci a Meridiano Pariſino 2^h. 8'. 2''; quumque igitur binae hae concluſiones tam probe inter ſe conſentiant, ſine ſenſibili errore ſtatuere licebit Longitudinem loci noſtri a meridiano Pariſino 2^h. 8'. 0'' ſeu in gradibus exhibitam

bitam 32°. 0′. In genere autem patet tam hanc, quam reliquas pro Longitudinibus reliquorum locorum allatas determinationes, non pro omnino exactis haberi poſſe, quia obſeruationibus paucis nec prorſus indubiis innituntur. Praeter has vero obſeruationes, ad Longitudinem huius loci determinandam, adhiberi quoque poſſent illae, quibus Nob. *Eulerus* altitudinem Lunae meridianam menſurauit. Verum quum concluſiones hinc deducendae vix maiori quam vnius minuti praeciſione gaudere queant, et huiusmodi determinationes caeteroquin calculos requirant aliquanto operoſiores, iſtas obſeruationes in computum hac occaſione non duximus. De declinatione Acus Magneticae in aliquibus locorum ſupra commemoratorum a Nob. *Eulero* obſeruata, conſuli poteſt Diſſertatio Cel. *Krafft* in Tomo XVII. Nouor. Commentar., quae ſtatum declinationis Magneticae in variis imperii Ruſſici locis exponit, quare has obſeruationes heic repetere nihil eſt neceſſe. De obſeruationibus denique Meteorologicis, quas Nob. *Eulerus* ſingulari cura inſtituit, nihil heic adferemus, quia ob breue temporis interuallum, quo in ſingulis locis commoratus eſt, ex his obſeruationibus vix quidquam concludi poſſe videtur; niſi forſan ſi earum comparatio inſtituatur cum obſeruationibus Meteorologicis, alibi eodem tempore inſtitutis, cuiusmodi tamen comparationem inire, nunc noſtri non eſt inſtituti.

DE

DE OBSERVATIONE ECLIPSEOS SOLIS PETROPOLI DIE $\frac{15}{26}$ AVGVSTI ANNO 1775 INSTITVTA,

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

Breuem expoſitionem obſeruationum circa hanc Solis Eclipſin a me factarum traditurus, primum obſeruationes inſtitutas pro cognoſcendo motu Penduli, ad quod hae obſeruationes factae ſunt, ſuccincte enarrabo. Per altitudines igitur Solis correſpondentes, quadrante Aſtronomico trium pedum captas, ſequentia elicui momenta meridierum ad Pendulum obſeruata:

		Temp. Pend.
Die 20 Aug.	Meridies ex obſeruation. altit. correſp.	$0^h.8'.34'',8$
	Correctio Meridiei	+22, 1
	Meridies verus	0. 8. 56, 9
22 Aug.	Merid. ex altitudin. correſp.	0. 7. 7, 7
	Corr. Merid.	+22, 2
	Merid. verus	0. 7. 29, 9
24. Aug.	Merid. ex altitudin. correſp.	0. 5. 36, 2
	Corr. Merid.	+22, 7
	Merid. verus	0. 5. 58, 9
25. Aug.	Media nox ex altit. correſp adhibitis conuenientibus correctionibus	0. 4. 52, 6

Die 26. Aug. Merid. ex altitudin. correſp. $0^h. 4'. 7'',0$
Corr. Merid. +25, 1
Merid. verus 0. 4. 32, 1
29 Aug. Merid. ex altitudin. correſp. 0. 1. 56, 0
Corr. Merid. +24, 6
Merid. verus 0. 2. 20, 6

Pro hiſce autem momentis, Tempora media momentis meridierum reſpondentia, ſequentia habentur:

Die 20	Temp. medium meridie vero	$0^h. 3'. 5'',0$
22	- - - - - -	0. 2. 36, 3
24	- - - - - -	0. 2 6, 9
25	Temp. medium Media nocte	0. 1. 41, 8
26	Temp. medium Meridie vero	0. 1. 33, 6
29	- - - - - -	0. 0. 42, 4

Hinc igitur colligitur Retardatio Penduli diurna a 20 ad 22 Auguſti $29'',1$; a 22 Auguſti ad 24, $30'',8$; a 24 ad 26, $26'',7$; a 24 Auguſti ad mediam noctem die 25 Retardatio diurna $27'',5$; a 26 Auguſti denique ad 29 eiusdem $26'',7$. Sin vero inter ſe conſerantur obſeruationes pro media nocte die 25 et Meridie 26, habetur retardatio Penduli interuallo 12 horarum $12'',3$, quae licet aliquantillum diſcrepet a concluſionibus, quae per comparationem Meridiei pro die 24 cum media nocte diei 25 et meridie die 26, eliciuntur; tamen ad facilem conſenſum redigetur, ſi in obſeruatione mediae noctis tantum vnico ſecundo aberratum fuiſſe, ſupponatur. Hac igitur de cauſſa momentum pro meridie die 26 obſeruatum Temp. Pend. $0^h. 4'. 32'',1$ retine-

retinebimus, retardationem vero Penduli interuallo duodecim horarum proxime praecedentium ſupponamus fuiſſe $27'', 0$, quod fere eodem redibit, ac ſi ſimpliciter binis momentis mediae noctis die 25 et meridici die 26, in hac determinatione vti vellemus.

Principale momentum circa hanc Eclipſin a me obſeruatum, eſt finis huius Eclipſeos, quem Tubo Dollondiano 12 Pedum contingere obſeruaui, Temp. Pend. die 25 Aug. $18^h. 46'. 4''$, ideoque Temp. vero $18^h. 41'. 22''$. Quum autem haec obſeruatio facta ſit coelo ad modum defaecato et aere puriſſimo, eam inter valde exactas referre haud dubito. Praeter iſtam vero obſeruationem, Teleſcopio Gregoriano quod Micrometro obiectiuo inſtructum eſt, plurimas menſuras circa diſtantias cornuum Lunae et partes lucidas diſci Solis, cepi, quas tamen omnes obſeruationes heic percenſere ſuperfluum foret; praeſertim vero eas praetermittere coactus ſum, quae ſtatim poſt ortum Solis factae ſunt, partim quod hae obſeruationes ob nimiam Solis ad horizontem propinquitatem ideoque inſignem incertitudinem circa refractionem, nunquam non valde incertae eſſe ſoleant; tum vero etiam quod pro hac praecipue Eclipſi, Sol mox poſt ortum identidem leuibus nubeculis tegebatur, vnde has obſeruationes valde dubias fieri neceſſe erat. Reliquarum vero obſeruationum, eas praecipue ſeligendas exiſtimaui, quae amico inter ſe conſenſu praeprimis conſpirare videbantur, quarum Catalogum heic ſiſto ſequentem:

Temp. Pend.	Temp. vero	Diſtant. cornuum ☽
Die 25 Aug. 17h.17′.51″	17h.13′. 7″	1692″, 6
25. 4	20. 20	1743, 7
26. 26	21. 42	1756, 6
28. 19	23. 35	1761, 1
29. 26	24. 42	1772, 1
30. 17	25. 33	1774, 7
31. 41	26. 57	1777, 3
33. 51	29. 7	1780, 7
34 54	30. 10	1773, 0
		Part. lucid. diſci ☉
37. 50	33. 6	437″, 2
38. 58	34. 14	436, 5
39. 57	35. 13	441, 5
40. 56	36. 12	442, 4
41. 53	37. 9	446, 7
a. 54. 27	49. 44	630, 7
b. 55. 42	50. 59	653, 1
c. 57. 36	52. 51	695, 0
d. 58. 33	53. 50	721, 5
e. 59. 22	54 39	737, 0

Temp.

	Temp. Pend.	Temp. vero	Diſtant. corn. diſci ☽
I.	18^h. 5$'$. 5$''$	18°. 0$'$ 22$''$	1647$''$,0
II.	7. 39	2. 56	1612, 8
III.	10. 46	6. 3	1575, 4
IV.	11. 44	7. 1	1560, 6
V.	13. 51	9. 8	1523, 8
VI.	15. 3	10. 20	1506, 0
VII.	17. 55	13. 12	1455, 2
VIII.	22. 2	17. 20	1369, 2
IX.	23. 2	18. 20	1352, 4
X.	28. 30	23. 48	1201, 6
XI.	29. 44	25. 2	1163, 0
XII.	32. 3	27. 21	1090, 0
XIII.	33. 16	28. 34	1045, 6
XIV.	34. 12	29. 30	1004, 0
XV.	35. 15	30. 33	978, 4
XVI.	37. 22	32. 40	875, 2

De hiſce vero obſeruationibus tenendum eſt, quod non niſi vltimae, quas litteris *a*, *b* etc. nec non numeris I, II, III etc. diſtinxi, pro determinando tempore vero coniunctionis Solis et Lunae adhiberi queant; obſeruationes autem circa partes lucidas a 17^h. 33$'$ ad 17^h. 37$'$ inſtitutae imprimis conducent, ad correctionem Latitudinis pro Luna inueniendam; tum vero obſeruationes circa diſtantias cornuum a tempore 17^h. 24$'$ ad 17^h. 30$'$ factae mihi inſeruierunt, ad determinandum valorem partium Micrometri pro reliquis obſeruationibus. Sumto enim

 medio

medio harum obſeruationum, diſtantia cornuum quae iſto tempore ipſam Diametrum Lunae apparentem aequabat, reperietur 887″, 7 ; prorſus vti eadem ope Tabularum adhibita correctione altitudini Lunae debita, reperitur. Experimento autem facto mihi iam patet, obſeruationes circa diſtantias cornuum pro determinando momento, quo Sol et Luna erant in coniunctione, vix aeque feliciter ad conſenſum redigi poſſe, cum obſeruationibus circa initium vel finem Eclipſeos inſtitutis; ſi partes micrometri ex menſurata Diametro Solis aeſtimentur, ac ſi ratione iam dicta earum menſura ex quantitate Diametri Lunae aeſtimetur.

Elementa autem quae pro calculo parallaxium ineundo, cognoſcere neceſſe erat, ex Tabulis Lunaribus Cel. *Mayeri* ſequentem in modum deduxi:

Die

Die 25 Aug.	Temp. medio 16^h.	Pariſino 17^h.
Aſcenſio recta ☉	$5^s.4^\circ.37'.\ 8''$	$5^s.4^\circ.39'.26''$
Longit. ☉	5. 2. 39. 7, 6	5. 2. 41. 32, 8
Longit. ☽	5. 2. 4. 18, 8	5. 2. 33. 58, 3
Latit. ☽ Bor.	40. 29, 0	43. 12, 2
Paral. ☽ aequat.	54. 15, 5	
Paral. ☉ aequat.	8, 5	
Diamet. ☽ horizont.	29. 33, 9	
Diamet. ☉	31. 44, 5	
Mot. hor. ☉ in Longit.	2. 25, 2	
☽ in Longit.	29. 39, 9	
Mot. hor. reſpect.	27. 14, 7	
Mot. hor. ☽ in Latit.	2. 43, 6	
Aequat. temp.	+ 1. 38, 2	+ 1. 37, 5

hinc autem colligitur, ſecundum has Tabulas verum tempus coniunctionis Solis et Lunae contingere debuiſſe Temp. medio Pariſino $17^h.\ 16'.\ 41''$, exiſtente Longitudine Lunae $5^s.\ 2^\circ.\ 42'.\ 13''$.

Vt nunc Lectoribus eo facilius ſit iudicium de exactitudine concluſionum ex noſtris obſeruationibus eliciendarum, rationem elementorum per calculum parallaxium inuentorum ſequenti Tabella ob oculos ponamus:

Temp.

Temp. vero Petropolit.	Paral. Longit. ☽	Latit. ☽ appar.	Semidiam. ☽ appar.
$17^h.49'.44''$	$41'.55'',2$	$7'.20''.8$	$14'.49'',0$
50. 59	55, 1	25, 9	
52 51	54, 7	33, 4	49, 1
53. 50	54, 4	37, 5	
54. 39	54, 3	41, 1	49, 2
18. 0. 22	52, 8	8. 3, 5	49, 4
2. 56	51, 6	14, 2	
6. 3	50, 1	25, 9	49, 5
7. 1	49, 5	29, 6	
9 8	48, 2	37, 9	49, 6
10. 20	47, 5	42, 6	
13. 12	45, 5	53, 6	49, 7
17. 20	42, 2	9. 9, 2	49, 8
18. 20	41, 3	12, 9	
23 48	36, 2	33, 2	50, 0
25. 2	35, 0	37, 6	50, 1
27. 21	32, 4	46, 3	
28. 34	31, 1	50, 6	50, 2
29. 30	29, 9	54, 2	
30. 33	28, 7	57, 7	
32. 40	26, 0	10. 5, 5	50, 3
41. 22	14, 2	36, 2	50, 5

Hinc vero ope obſeruationum ſupra allatarum , ſequentes colliguntur expreſſiones pro tempore coniunctionis verae inter Solem et Lunam ad Meridianum Petropolitanum :

A.

a. $19^h.\ 8'.\ 56'' - 3,49\,\delta + 2,70.\,y + 0,06.\,\pi$
b. $19.\ 9.\ \ 7 - 3,37\,\delta + 2,50.\,y + 0,18.\,\pi$
c. $19.\ 8.\ 59 - 3,16\,\delta + 2,26.\,y + 0,36.\,\pi$
d. $19.\ 8.\ 45 - 3,09\,\delta + 2,16.\,y + 0,41.\,\pi$
e. $19.\ 8.\ 53 - 3,03\,\delta + 2,08.\,y + 0,45.\,\pi$

ex quibus medium ſumendo idem tempus coniunctionis colligitur:

$$19^h.\ 8'.\ 56'' - 3,22.\,\delta + 2,34.\,y + 0,29.\,\pi,$$

ſin autem excluderetur ſecunda harum concluſionum fieret tempus coniunctionis:

$$19^h.\ 8'.\ 53'' - 3,19.\,\delta + 2,30\,y + 0,32.\,\pi,$$

at tantilla haec diſcrepantia hoc in negotio nullius habenda eſt momenti; quum hae obſeruationes partium lucidarum inſtitutae ſint, tempore a maxima obſcuratione haud multum remoto. Caeterum ex iis, quae alibi in noſtris Commentariis occaſione huiusmodi calculorum monui, facile intelligitur quid litterae δ, y; π heic ſignificent. Ex obſeruationibus porro circa diſtantias cornuum inſtitutis, ad ſequentes pro tempore coniunctionis perducti ſumus concluſiones:

I.	$19^h.8'.36''$	$-2,75\,\delta$	$+1,65.\,y$	$+0,71.\,\pi$
II.	19. 8. 31	−2,69	+1,52	+0,77
III.	19. 8. 46	−2,62	+1,40	+0,85
IV.	19. 8. 44	−2,60	+1,37	+0,87
V.	19. 8. 30	−2,56	+1,30	+0,92
VI.	19. 8. 41	−2,54	+1,26	+0,94
VII.	19. 8. 46	−2,51	+1,20	+0,98
VIII.	19. 8. 48	−2,47	+1,11	+1,03

IX.	$19^h.9'.3''$	$-2,46.\delta$	$+1,09.y$	$+1,04.\pi$
X.	19. 8. 45	$-2,44$	$+1,04$	$+1,07$
XI.	19. 8. 42	$-2,42$	$+0,98$	$+1,09$
XII.	19. 8. 47	$-2,40$	$+0,95$	$+1,11$
XIII.	19. 8. 45	$-2,39$	$+0,93$	$+1,12$
XIV.	19. 8. 34	$-2,39$	$+0,92$	$+1,12$
XV.	19. 8. 59	$-2,38$	$+0,91$	$+1,13$
XVI.	19. 8. 43	$-2,38$	$+0,89$	$+1,13$

Ex quibus omnibus ſi absque vllo diſcrimine medium ſumatur, inuenietur tempus coniunctionis:

$$19^h.\ 8'.\ 44'' - 2,50.\delta + 1,16.y + 0,99.\pi.$$

Sin vero excluſis concluſionibus I, II, V et IX, quippe quae maxime inter ſe diſcrepant, reliquarum ſumatur medium, prodibit tempus coniunctionis:

$$19^h.\ 8'.\ 45'' - 2,46.\delta + 1,08\,y + 1,04\,\pi,$$

quod quidem a prius inuento vix ſenſibiliter differt. Ex obſeruatione vero pro fine Eclipſeos, ſequens deducitur expreſſio tempus coniunctionis exhibens:

$$19^h.\ 8'.\ 42'' - 2,35\,\delta + 0,81.y + 1,20\,\pi.$$

Ex obſeruationibus circa diſtantias cornuum ante coniunctionem apparentem factis, vnicam tantum pro determinando tempore coniunctionis verae ſeligemus, qua tempore vero $17^h.\ 13'.\ 7''$ obſeruata eſt diſtantia cornuum $1692'',6$, vnde quum pro eodem momento ſit Parallaxis Longitudinis $41'.40'',4$; Latit. ☽ apparens $4'.44'',6$ et Semidiam. ☽ apparens $14'.48'',0$, colligitur tempus coniunctionis verae:

$$19^h.\ 8'.\ 33'' + 2,41.\delta - 0,97.y + 2,26.\pi.$$

Dum

Dum vero ex concluſionibus modo inuentis verus valor momenti, quo coniunctio Solis et Lunae contigit, determinari debet, praeprimis neceſſe eſt, vt quantitates correctionum δ, y, π exacte definiantur; quum autem ex noſtris quidem obſeruationibus de prima et vltima earum nihil definire liceat, ſufficiet valorem ipſius y inueſtigaſſe, qui vt mox oſtendemus, aeſtimari poterit $= -7''$, hoc autem valore in concluſionibus noſtris ſubſtituto pro tempore coniunctionis ſequentes obtinebimus concluſiones:

Ex obſeruationib *a*, *c*, *d*, *e*	$19^h. 8'. 37''$
Ex obſeruationib. III, IV, VI etc.	19. 8. 37
Ex fine Eclipſeos	19. 8. 36
Ex obſeruatione ante coniunctionem apparentem	19. 8. 39

quae concluſiones quum inter ſe conſentiant, vltra quam ſperare fas erat; videtur ſatis tuto concludi poſſe, quod tempus coniunctionis verae incidat in Tempus verum Petropolitanum $19^h. 8'. 37''$, ſiue Tempus medium Pariſinum $17^h. 18'. 18''$, quo tempore igitur erat Longitudo Lunae $5^s. 2°. 42'. 17''$, quae quum ex Tabulis Mayeri eliciatur $5^s. 2°. 43'. 2''$, erit correctio pro Longitudine his Tabulis adplicanda $-45''$, quanta correctio alioquin pro his Tabulis rarior eſſe ſolet. Caeterum ſi etiam circa locum Solis, aliqua adeſſet incertitudo ea ad Tabulas Mayeri ſaluandas nihil conferet; ſiquidem haec incertitudo quae non niſi ex perturbationibus Planetarum minus exacte aeſtimatis oriri poteſt, aeque fere locum Lunae ac Telluris afficiet.

 Pro

Pro Latitudinis correctione inuenienda ex obſeruationibus partium lucidarum a $17^h.33'$ ad $17^h.37'$ inſtitutis, ſequenti modo rationes ſubduximus. Quia tempus coniunctionis apparentis incidat eo momento, quo differentia vera Longitudinis inter Solem et Lunam aequatur ipſi Parallaxi Longitudinis Lunae, hinc conuertendo parallaxin Longitudinis Lunae quam tempore $17^h.36'$ habet in tempus, inuenietur $1^h.32'.16''$, quod a tempore coniunctionis verae ſubtractum, relinquit $17^h.36'.21''$ pro tempore coniunctionis apparentis, quod ſaltem cum praeciſione decem ſecundorum definitum eſſe, cenſeri poteſt. Hac igitur epocha conſtituta, ex motu horario Lunae in Longitudinem et obſeruatis ſimul variationibus in parallaxi Longitudinis, tumque ex Latitudinibus Lunae apparentibus, facili negotio computantur diſtantiae apparentes centrorum Solis et Lunae, ſeu exceſſus quibus hae diſtantiae Latitudines apparentes exſuperant. Quum vero diſtantiae apparentes obſervatae facile habeantur dum ex obſeruatis partibus lucidis, ſubtrahitur differentia ſemidiametrorum Solis et Lunae; ſi diſtantiae obſeruatae cum computatis conferantur, facile colligitur correctio Latitudinis Lunae.

Temp. vero Petropol.	Part. Lucid.	Diſt. appar. obſeru.	Latit. ☽ appar.	Diſt. appar. comput.	Correct. Latit.
$17^h.33'.6''$	$437'',2$	$372'',6$	$371'',7$	$383'',2$	$10'',6$
34. 14	436, 5	372, 9	376, 3	380, 7	7, 8
35. 13	441, 5	377, 9	380, 5	381, 8	3, 9
36. 12	442, 4	378, 8	384, 7	384, 7	5, 9
37. 9	446, 7	383, 1	388, 8	389, 4	6, 3

Sumto

Sumto igitur medio harum concluſionum, prodibit correctio Latitudinis $-6'',9$, quam numero rotundo ſtatuere licebit $-7''$.

Tum vero liquet minimam diſtantiam centrorum apparentem incidiſſe circa tempus $17^h.34'.14''$, atque ex definita iam correctione Latitudinis fuiſſe $374''$ circiter, vnde colligitur Solem in hac Eclipſi Petropoli paſſum fuiſſe deliquium $24'$ et $27''$, ſiue $9\frac{1}{3}$ digit. diametri Solis.

Reliquum nunc eſt vt obſeruationes circa finem huius Eclipſcos in variis Europae locis factas, quarum notitia ad nos peruenit, breuiter expendamus, vt ex comparatione harum obſeruationum tam inter ſe, quam cum obſeruatione Petropolitana; quid de differentiis Meridianorum ſtatuendum ſit, pateſcat. Pro his autem obſeruationibus calculo ſequentia ſubduximus elementa.

Pro fine Eclipſcos	Temp. vero	Paral-Long.	Lat. ☽ appar.	Semidiam. ☽ appar.
Lundae	$17^h.25'.20''$	$44'.16'',4$	$11'.49'',3$	$14'.47'',9$
Vpſaliae	17. 49. 36	42. 1, 1	9 41, 9	14. 48, 9
Warſowiae	17. 48. 54	46. 10, 9	14. 50, 4	14. 48, 6
Regiomontis	17. 51. 25	44. 54, 1	13. 11, 1	14. 48, 8
Suecopoli	18. 19. 33	41. 37, 1	10. 9, 0	14. 49, 8

His igitur elementis adhibitis pro temporibus coniunctionum ſequentes prodibunt expreſſiones:

Lundae	$18^h. 0'. 31'' - 2{,}39\delta + 0{,}92.y + 0{,}98.\pi$
Vpſaliae	$18. 18. 1 - 2{,}32\delta + 0{,}73.y + 1{,}28.\pi$
Warſowiae	$18. 31. 28 - 2{,}52\delta + 1{,}22.y + 1{,}27.\pi$
Regiomontis	$18. 29. 17 - 2{,}44\delta + 1{,}05.y + 1{,}23.\pi$
Succopoli	$18. 47. 24 - 2{,}34\delta + 0{,}78.y + 1{,}25.\pi$.

Vbi quidem ſi correctiones δ et π prorſus negligantur, pro y vero adhibeatur $-7''$, habebuntur haec Tempora coniunctionum in numeris abſolutis:

Lundae	$18^h. 0'. 25''$	Warſowiae	$18^h. 31'. 20''$.
Vpſaliae	18. 17. 56	Regiomontis	18. 29. 10
Succopoli	18. 47. 19.		

Quum igitur inter haec loca, Longitudo Vpſaliae optime ſit cognita, eam perinde ac Petropolitanam, in determinandis reliquorum locorum Longitudinibus fundamenti loco ſubſternere licebit. Fit vero ex comparatione obſeruationis Vpſalienſis cum Petropolitana differentia meridianorum $50'. 40''$, quae tantum $3''$ ab ea differt, quae locum habere debet, ſi Longitudo Vpſaliae ſupponatur $1^h. 1'. 14''$ et Petropolis $1^h. 51'. 57''$ a Meridiano Pariſino computata. Inter Vpſaliam vero et Lundam habetur differentia meridianorum $17'. 31''$, tumque inter Lundam et Petropolin $1^h 8'. 11''$, ex hac igitur obſeruatione ſequeretur Longitudo Lundae a meridiano Pariſino $43'. 43''$ ſiue $43'. 46''$, quae tamen nimis magna videtur. Nam ex fine Eclipſeos Solis A. 1769 Lundae obſeruato, haec Longitudo non niſi $43'. 25''$ elicitur, ex obſeruato item ibidem fine Eclipſeos Solis A. 1764 hanc Longitudinem $43'. 30''$ inueni, quare haec

conclusio

concluſio ex Eclipſi anni 1775 deducta merito nonnihil ſuſpecta videtur. Quod ſi vero omnium trium concluſionum medium quis aſſumere vellet, prodiret Longitudo Lundae a meridiano Pariſino computata 43′ 33″. Comparato tempore coniunctionis Warſowienſi cum Vpſalienſi et Petropolitano, habentur differentiae meridianorum inter Warſowiam et Vpſaliam 13′. 24″ et inter Warſowiam atque Petropolin 37′. 16″, vnde prodit Longitudo Warſowiae a meridiano Pariſino computata 1ʰ. 14′. 38″ ſiue 41″. Haec autem concluſio quaſi medium tenet inter illas, quae ex obſeruato initio et fine Eclipſeos A. 1764 pro Warſowia colliguntur; nam ex initio inueni Longitudinem 1ʰ. 14′. 52″, ex fine vero 1ʰ. 14′. 24″; probabile igitur eſt Longitudinem modo inuentam 1ʰ. 14′. 38″, ſi non prorſus exactam eſſe, ſaltem non vltra 10 ſcrupula ſecunda a veritate aberrare poſſe. Pro Regiomonte habemus differentiam meridianorum inter Regiomontem et Vpſaliam 11′. 14″ et inter Regiomontem atque Petropolin 39′. 26″, vnde fit Longitudo Regiomontis a meridiano Pariſienſi 1ʰ. 12′. 28″ .. 31″, quae igitur numero rotundo ſtatui poſſe videtur 1ʰ. 12′. 30″. Denique inter munimentum Suecicum quod Suecopolis adpellatur, et haud procul a Helſingforſia ſitum eſt, atque Vpſaliam et Petropolin ſequentes habentur differentiae meridianorum, 29′. 23″ et 21′. 17″, vnde prodibit Longitudo huius loci a meridiano Pariſino computata 1ʰ. 30′. 37″ .. 40″, vbi quidem obſeruandum eſt hanc Longitudinem locum habere

pro

pro Eleuatione Poli, quam huic loco in meo calculo tribui $60^{\circ}. 5'$; quae ſi forſan $5'$ diminui vel augeri debeat, Longitudo iſtius loci, duobus ſcrupulis ſecundis augeri, vel minui debet. Etiamſi vero in his noſtris determinationibus correctionum δ et π, nullam plane habuimus rationem, facili tamen negotio patet, eas hac in diſquiſitione nihil immutare, ſiquidem coefficientes, quibus hae correctiones adficiuntur, in expreſſionibus pro tempore coniunctionis tam prope inter ſe conſentiunt, vt ex ſepoſita conſideratione iſtarum correctionum, vix ac ne vix quidem incertitudo vnius ſcrupuli ſecundi in determinationem differentiae meridianorum deriuari queat. Sic ex comparatione obſeruationis Vpſalienſis et Warſowienſis deducitur differentia meridianorum:

$$13'. 27'' - 0,20\,\delta + 0,49.\,y$$

vbi quidem correctio δ certe maior eſſe nequit, quam $5''$, ita vt incertitudo maxima quae circa differentiam meridianorum ex hac correctione reſultat minutum ſecundum non ſuperet.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN VRBE DMITRIEWSK (*) INSTITVTAE,

VNA CVM DETERMINATIONE LATITVDINIS ET LONGITVDINIS HVIVS LOCI.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Diarium harum obſeruationum iam anno 1772 ad Illuſtriſſimam Academiam Scientiarum remiſi; ſed cum eo tempore calculos pro determinanda latitudine et longitudine non adieci; hinc illae praecedentibus Commentariorum voluminibus non inſertae ſunt. Reuerſus Petropolin ſummarium ex ipſis, ſimul cum continuatione nonnullarum poſt habitarum, quas deuaſtata ac ſpoliata hac a rebellatoribus vrbe reperire potui, nunc ad calculum reuocatas ſiſto.

I.

(*) Vrbs Dmitriewſk, vulgo alias, ſed minus recte Camyſchenka, ſita eſt in dextra fluminis Wolgae ripa, ad dextram itidem riui Camyſchenkae; diſtat ab vrbibus Saratow et Zaricin aequali ſpatio, 180 nempe Werſtis. Vrbs vero Camyſchenka proprie dicta, iam a multis annis plane deſerta, iacet ad ſiniſtram eiusdem riui Camyſchenkae.

I.

Rectificatio Quadrantis ad horizontem.

In aſſe nigra feci duas albas metas, centro tubi immobilis in vtroque Quadrantis ſitu; recto et inuerſo reſpondentes; hac que aſſe in diſtantia $\frac{4}{5}$ circiter Werſtae locata ſequentes obſeruationes pro inveſtigando Quadrantis errore inſtitui. Numeri hic occurrentes ex multis et repetitis obſeruationibus ſunt medii.

1) Die $\frac{6}{17}$ Aprilis 1771 hora $2\frac{3}{4}$ pomeridana
Altitudinem metae ſuperioris in ſitu
Quadrantis recto reperi - - $0^{\circ}.21'.\ 7''$
Altitudinem metae inferioris in ſitu
Quadrantis inuerſo - - $0.\ 19.\ 7,6$

Differentia $0.\ 1.\ 59,4$
Vnde Error Quadrantis $-59,7$

Barometrum poſt operationem monſtrabat $28''.6''';1$ pedis reg. Pariſini.

2) Die $\frac{8}{19}$ Aprilis hora 8^{ua} matutina. Earundem metarum cepi altitudines in ſitu Quadrantis
recto ſuperioris - - - $0^{\circ}.21'.14'',3$
in ſitu Quadrantis inuerſo inferioris $0.\ 19.\ 9,8$

differentia $0.\ 2.\ 4,5$
adeoque Error $-1.\ 2,2$

Altitudo Barometri erat $28''.\ 7''',\ 1$.

3)

3) Die $\frac{9}{20}$ Aprilis hora $7\frac{1}{2}$. matutina Altit. metarum

ſuperioris	–	$0^\circ.21'.30''$
inferioris	–	$0.\ 19.\ 18\frac{1}{2}$
differ.	–	$0.\ 2.\ 11,5$
et Error	–	$-1.\ 5,7$

Barometro monſtrante $28''.\ 7'''$.

4) Die $\frac{12}{23}$ Aprilis hora $4\frac{1}{2}$ pomerid. Altitud. met.

ſuperioris	–	$0^\circ.\ 21'.20\frac{1}{2}''$
inferioris	–	$0.\ 19.\ 18\frac{1}{2}$
differ.	–	$0.\ 2.\ 2$
Error	–	$-1.\ 1$

Barometr. $28''.\ 0''',6$

Ex his quatuor verificacitionibus prodit Error Quadrantis medius $-1'.\ 2''$.

Craſſitiem fili micrometrici inueni 13 minutorum ſecundorum.

II.

Determinatio latitudinis vrbis Dmitriewſk.

1) Ex altitudinibus Solis meridianis.

In exponendis ſingulis his obſeruationibus nimis prolixus euaderem, ſi omnes hic recenſere vellem; ſufficit ſpeciminis cauſſa exhibere eas, quas menſibus Maio atque Iunio anni 1771^{mi} cepi. Monendum ſemel eſt, altitudines has errore inſtrumenti et ſemicraſſitie fili antea repertis correctas iam eſſe, praeterea me in computu differentiam meridianorum inter Pariſios et Dmitriewſk $2^h.\ 50'$ aſſumere atque tabula refractionis Cel. D. *de la Caille* vti.

 Altitu-

Altitudines Solis meridianae captae an. 1771.					
Dies obſeru. Sec. Cal. Greg.	Altit. obſeru.	Refract. — Parall.	Semid. ☉	Declinat. ☉	Eleuat. Poli
	Altitudines	limbi	inferioris		
21 Maii	59°.50'.16",5	34",7	15'.48",8	20°.10'.36"	50°.5'. 5"
22 —	60. 2.25,5	34,4	15.48,7	20.22.46	50.5.6
24 —	60.25.29,5	33,9	15.48,4	20.45.43	50.4.59
25 —	60.36.31,5	33,1	15.48,2	20.56.42	50.4.55
	Altitudines	limbi	ſuperioris		
30 —	61.57.36,5	31,7	15.47,5	21.46.11	50.4.54
31 —	62. 6.21,5	31,6	15.47,3	21.54.59	50.4.56
1 Iun.	62.14.33.	31,3	15.47,2	22. 3.23	50.5.8
3 —	62.30.14,5	30,9	15.47,0	22.19.2	50.5.6
6 —	62.50.42,5	30,5	15.46,6	22.39.37	50 5.12
10 —	63.12.46,5	30.	15.46,2	23. 1.28	50.4.58
11 —	63.17.16,5	29,8	15.46,1	23. 5.55	50.4.55
12 —	63.21. 8,5	29,8	15.46,0	23. 9.58	50.5.5
17 —	63.35.19.	29,5	15.45,7	23.24.6	50.5.2
18 —	63.36.56,5	29,4	15.45,6	23.25.42	50.5.0
19 —	63.38. 6,5	29,4	15.45,5	23.26.53	50.5.1
20 —	63.38.44,5	29,4	15.45,5	23.27.38	50.5.8
21 —	63.39. 4,5	29,4	15.45,5	23.27.59	50.5.9
22 —	63.38.56,5	29,4	15.45,4	23.27.55	50.5.14
24 —	63.37.51,5	29,4	15.45,4	23.26.35	50.4.58
25 —	63.36.29.	29,5	15.45,3	23.25.17	50.5.3
26 —	63.34.41,5	29,5	15.45,3	23.23.34	50.5.7
27 —	63.32.31,5	29,6	15.45,3	23.21.26	50.5.9
		Medium ex his 22 obſeru.			50.5.3

2) Ex altitudinibus fixarum meridianis.

Multae etiam huius generis obſeruationes a me inſtitutae, ſed ad definiendam poli eleuationem ſuffi- ciunt ſequentes, quae cum ſingulae variis diebus

captae

captae, hinc e pluribus mediae ſelectae ſunt. En obſeruationes ipſas et calculos.

Altitudines Fixarum meridianae.

Dies obſeru. St. nou.	Nom. Fixar.	Altit. obſeru.	Refract.	Declin. fixar. ad d. obſeru.	Aberr.	Nutat.	Latitudo
1770							
Octob. 25	γ Aquilae	50°. 0′. 8″	0′.55″,8	10°. 4′.11″,5	+ 9″,7	+6,7	50°.5′.16″
—	α Aquilae	48. 12. 47½	59,6	8. 16. 39	+ 9,3	+6,4	50. 5. 7
26	θ Antinoi	38. 27. 14	1. 23,5	1. 29. 7	− 6,1	−6,9	50. 5. 16
27	α Delphini	55. 2. 48	46,5	15. 7. 3	+11,2	+7,3	50. 5. 20
28	ε Delphini	50. 28. 28	54,8	10. 32. 23	+ 9,8	+7,2	50. 5. 7
Nou. 3	β Delphini	53. 44. 38	48,7	13. 48. 42	+10,3	+7,3	50. 5. 10
7	ε Pegaſi	48. 46. 22	58,4	8. 50. 5	+ 8,1	+7,3	50. 4. 57
—	ζ Pegaſi	49. 34. 21	56,7	9. 38. 34	+ 8,5	+7,0	50. 5. 25
—	α Pegaſi	53. 54. 44	48,4	13. 58. 39	+ 9,6	+6,7	50. 4. 59
1771							
Mart. 16	α Orionis	47. 16. 13	1. 1,5	7. 20. 49,5	− 5,5	−4,6	50. 5. 27
	η ♊	62. 28. 28	34,7	22. 33. 14	− 0,6	−5,7	50. 5. 16
	γ ♊	56. 29. 48	44.	16. 34. 36,5	− 2,5	−5,6	50. 5. 24
	δ ♊	62. 18. 21	35.	22. 23. 7	− 5,1	−6,9	50. 5. 9
	β Can. minor.	48. 39. 58	58,6	8. 44. 9	− 5,2	−7,0	50. 4. 57
Mart. 18	μ ♊	62. 31. 45	34,6	22. 36. 42	− 0,6	−5,9	50. 5. 26
20	ε ♊	65. 15. 29	30,7	25. 20. 8,5	+ 0,4	−6,4	50. 5. 4
—	ζ ♊	60. 48. 28	37,2	20. 53. 15	− 0,9	−6,8	50. 5. 16
April. 20	Regulus	53. 0. 11	50,1	13. 4. 47	− 2,9	−7,6	50. 5. 16
22	γ Leonis	60. 54. 57	37.	20. 59. 34,5	− 4,2	−7,3	50. 5. 3
24	μ Leonis	67. 0. 1	28,2	27. 4. 27	+ 2,3	−7,5	50. 4. 50
Maii 20	ζ Virginis	40. 30. 58	1. 17,5	0. 34. 47,5	− 3,9	−2,2	50. 5. 1
21	η Bootis	59. 28. 48,5	39,2	19. 33. 22,5	+ 0,1	−1,6	50. 5. 12
Iunii 13	ζ Bootis	54. 38. 46	47,2	14. 43. 16	+ 2,4	+0,7	50. 5. 21
19	ι Coron.	67. 25. 34	27,5	27. 29. 51	+ 5,3	+2,1	50. 4. 52
				Medium ex 24 obſeru.		- -	50. 5. 10
		Erat autem ex altitudinibus Solis - - - -				- -	50. 5. 3
	Hinc latitudo vrbis Dmitriewſk ſtatui poteſt - - - -					- -	50. 5. 6

 quam

quam ſatis certam eſſe ex obſeruationibus annorum 1772 et 1773 conſtat, quo tempore nouo micrometro tubo Quadrantis mobili ſtubſtituto, et alio errore reperto, latitudo prodit eadem.

His adiicere lubet altitudines Solis in ſolſtitiis captas. In ſolſtitio hyberno 1770 reperi altitudinem limbi Solis ſuperioris - - 16°.46′.30½″

Refract - parall. - - -	3.18
Altitudo limbi vera - -	16. 43. 12, 5
ſemidiamet. Solis - -	16. 14, 6
Altitudo centri vera - -	16. 26. 58
Eadem in ſolſtitio aeſtiuo 1771	63. 22. 49, 6
Hinc diſtantia Tropicorum -	46. 55. 51, 6
et obliquitas Eclipticae -	23. 27. 55, 8
Vnde altitud. Aequatoris -	39. 54. 53, 8
et altitudo Poli - -	50. 5. 6.

III.

Obſeruationes eclypſium Satellitum Iouis.

Ad indagandam vrbis Dmitriewſk longitudinem, praeter Solis et Lunae defectus, varias immerſiones et emerſiones comitum Iouis obſeruaui; ſed Ioue per hoc temporis interuallum in ſignis Auſtralibus verſante, adeoque ſaepe parum ſupra horizontem eleuato et vaporibus obducto, aliisque circumſtantiis minus fauentibus, non omnes ex ſententia mihi eueniſſe ingenue fateor. Comparaui tamen

men earum nonnullas cum obſeruationibus correſpondentibus item cum calculis a Celeb. Dom. *Wargentin* communicatis. Monendum vltimo eſt obſeruationes has tubo Dollondiano duodecimpedali inſtitutas exceptis duabus, quas teleſcopio Gregoriano duorum circiter pedum feci, eas que expreſſe notaui: reductiones porro temporum repertas eſſe per altitudines Solis correſpondentes, quae hic breuitatis gratia omittuntur.

Obſeruationes Satellitum Iouis anno 1771.

	Temp. verum. H. M. S.
1) Die $\frac{4}{15}$ Maii Immerſio 1^{mi} Satellitis	
Satelles ſplendorem ſum amittit	14. 28. 28
occultari videtur - -	29. 19
prorſus immerſus - - -	29. 57
Durante obſeruatione coelum ſerenum, aër tranquillus, 3 faſciae in diſco Iouis conſpiciebantur; altitudo Iouis poſt quadrantem horae 15°. 15′, obſeruatio vedebatur mihi eſſe bona.	
2) Die $\frac{22}{2}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ Immerſio 2^{di} Satellitis	
Immergi Satelles videbatur nubeculis praeterfugientibus - -	14. 54. 28
Vltima vice Satellitem video	55. 9
Iupiter ipſe poſt nutes abſconditur - - -	56. 49
Obſeruatio haec ſubdubia.	

3) Die

	Temp. verum. H. M. S.
3) Die $\frac{10}{21}$ Iunii Immerſio 4^{ti} Satellitis	
Lumen Satellitis imminui coepit	12. 4. 26
Satelles vix videtur - -	7. 16
immerſio totalis - -	8. 6
Coelo ſereno, vento forti, inſtituta haec obſeruatio teleſcopio Gregoriano; altitudo Iouis poſt obſervationem erat $15^{\circ}. 48\frac{1}{3}'$.	
4) Die $\frac{19}{30}$ Iunii Immerſio 1^{mi} Satellitis	
Satelles occultari videtur - -	14. 40. $50\frac{1}{2}$
prorſus immerſes - - -	41. $2\frac{1}{2}$
Tempore obſeruationis aër erat tranquillus ſed vaporoſus, 3 faſciae conſpiciebantur, altit. Iouis poſt obſeruationem $14^{\circ}. 53\frac{1}{2}'$.	
5) Die $\frac{30}{10}$ $\frac{Iul.}{Aug.}$ Emerſio 1^{mi} Satellitis	
Satelles emergit - - -	9. 56 11
clare micat - - -	57. 1
Obſeruatio facta teleſcopio Gregoriano coelo vaporoſo.	
6) Die $\frac{22}{2}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Emerſio 1^{mi} Satellitis Iouis obſeruata - - -	10. 16. 25
Durante obſeruatione coelum ſerenum, ventus mediocris, 3 faſciae erant conſpicuae, atque eodem tempore 3^{ius} Satelles ad Iouem approquinquabat; altitud. Iouis poſt obſeru. $11^{\circ}. 46'$.	

7) Die

	Temp. verum H. M. S.
7) Die $\frac{26}{6}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ Emerſio 3^{ii} Satellitis	
Satelles emergit - - -	8. 23. 12
pleno lumine ſplendet -	24. 1
Tempore obſeruationis aër erat placidus, 3 faſciae in diſco Iouis videbantur, altitudo Planetae poſt obſeru. 17°. 7½′.	
8) Die $\frac{6}{17}$ Septembr. Emerſio 2^{di} Satellitis obſeruata - - -	8. 41. 13
Nubeculae Iouem circumdabant, propter quas obſeruatio haec ſubdubia eſt, alt. Iouis poſt obſeru. 15°. 25¾′.	
Anno 1772.	
9) Die $\frac{7}{18}$ Iunii Immerſio 1^{mi} Satellitis.	
Lumen Satellitis imminuitur -	14. 16. 0,5
Satelles occultari videtur - -	18. 5,5
Immerſio certa - -	18. 30,5
Obſeruatio facta aëre traquillo, nubeculae tenues quamuis circumſtabant, nihilo minus bona eſſe videbatur.	
10) Die $\frac{6}{17}$ Iulii Immerſio 3^{ii} Satellitis	
Decrementum lucis Satellitis valde ſenſibile - - - - - - - -	13. 3. 18
Satelles vix conſpicitur - -	3. 33
prorſus immerſus - -	3. 50

	Temp. verum H. M. S.
Paulo poſt nubeculae Iouem praeterfugiebant, attamen obſeruationem hanc bonam eſſe cenſeo, 3 faſciae in diſco Iouis bene conſpiciebantur.	
11) Die $\frac{9}{20}$ Iulii Immerſio 1^{mi} Satellitis obſeruata - - -	10. 43. 24
Sed quia Iupiter haerebat adhuc in denſis vaporibus et faſciae valde confuſe cernebantur, obſeruatio haec ſubdubia eſt.	
12) Die $\frac{11}{22}$ Iulii Immerſio 2^{di} Satellitis	
Satelles immergi videbatur -	10. 54. 16
immerſio certa - -	54. 21
Coelo ſereno, vento leni, 3 faſciae erant conſpicuae; altit. Iouis poſt obſeru. 16°. 2½'.	
13) Die $\frac{11}{22}$ Auguſti Emerſionem 3^{ii} Satellitis obſeruaui - -	12. 39. 15
Coelo ſereno, vento leni, faſciis tribus conſpicuis.	
14) Die $\frac{12}{23}$ Aug. Emerſio 2^{di} Satellitis obſeruata - - -	13. 36. 48,5
Coelum durante obſeruatione ſerenum 3 faſciae latae videbantur.	
15) Die $\frac{30\ Aug.}{10\ Sept.}$ Emerſio 2^{di} Satellitis conſecuta - - - - -	8. 14. 54
Coelo ſereno, aëre placido 5 faſciae conſpiciebantur, obſeruatio bona, ſed	

inſti-

	Temp. verum H. M. S.
inſtituta ad horologium portatile, quod ad tranſitum Solis per meridianum fuit ordinatum. Hoc enim die motus horologii oſcillatorii paulo ante obſeruationes correſpondentes pomeridianas ſubſtitit.	
16) Die $\frac{4}{15}$ Octobr. Emerſionem 1^{mi} Satellitis obſeruaui - -	6. 48. 47
Elapſis 9 minutis primis altitudo Iovis erat 22°. $34\frac{1}{2}'$. Faſciae ob aërem vaporoſum confuſe videbantur.	

Anno 1773.

17) Die $\frac{15}{26}$ Iunii Immerſio 3^{ii} Satellitis Iouis	
Satelles vix videtur - -	14. 28. 25
prorſus immerſus - -	28. 42
Durante obſeruatione aër erat placidus, 5 faſciae in diſco Iouis conſpiciebantur; altitudo Planetae poſt obſeruationem 24°. 16'.	
18) Die $\frac{19}{30}$ Iunii Immerſio 1^{mi} Satellitis Iouis	
Satelles vix cernitur - -	14. 14. 2
Immerſio certa - -	14. 21
Coelo ſereno aëre quieto, 5 faſciae conſpiciebantur; altitudo Iouis poſt obſeru. 25°. 14' —	

	Temp. verum H. M. S.
19) Die $\frac{5}{16}$ Iulii Immerſio 1^{mi} Satellitis	
Satelles immergi videtur - -	12. 27. 28
prorſus immerſus. - -	27. 33
Coelum tempore obſeruationis ſerenum, aër tranquillus, at faſcias non ſatis diſtincte vidi; altitudo Iouis poſt. obſeru. 18°. 23½'.	
20, 21) Die $\frac{21\ Iul.}{1\ Aug.}$ Immerſiones duorum Satellitum	
3^{ius} Satelles immergi obſeru.	10. 30. 4
1^{mus} —— —— —— –	10. 42. 27
Coelo ſereno vento mediocri flante, altitudo Iouis poſt obſeruat. erat 11°. 40' —.	

* * *

Sequuntur nunc harum obſeruationum comparationes, primum cum calculis, deinde immediate cum obſeruationibus correſpondentibus, et quidem tam ex Immerſionibus, quam ex Emerſionibus ſeparatim.

1) Ex immerſionibus I^{mi} Satellitis

$\frac{4}{15}$ Maii 1771 Immerſio in Dmitriewſk	$14^h.29'.57''$
Eadem Pariſiis e calculo	11. 38. 15
Vnde Differentia Meridianor.	2. 51. 42

$\frac{19}{31}$ Iunii

$\frac{19}{30}$ Iunii	Immerſio in Dmitriewſk	$14^{h}.41'.2\frac{1}{2}''$
	Pariſiis e calculo	11. 50. 30
	hinc Differ. Merid.	2. 50. $32\frac{1}{2}$
$\frac{7}{18}$ Iunii 1772	Immerſio Dmitriewſki	14. 18. $30\frac{1}{2}$
	Pariſiis e calculo	12. 26. 36
	Differ. Merid.	2. 51. $54\frac{1}{2}$
$\frac{19}{30}$ Iunii 1773	Immerſio Dmitriewſki	14. 14. 21
	Pariſiis e calculo	11. 22. 14
	Differ. Merid.	2. 52. 7
$\frac{5}{16}$ Iulii —	Immerſio Dmitr.	12. 27. 33
	Pariſ. e calc.	9. 35. 42
	Differ. Merid.	2. 51. 51
$\frac{21}{1}$ Iul. Aug. —	Immerſio Dmitr.	10. 42. 27
	Pariſ. e calc.	7. 51. 22
	Differ. Merid.	2. 51. 5
	Medium ex his Immerſionibus	2. 51. 32

Ex Emerſionibus eiusdem Satellitis.

$\frac{30}{10}$ Iul. Aug. 1771	Emerſio Dmitriewſki	9. 56. 11
	eadem Pariſiis e calculo	7. 2. 42
	Differ. Merid.	2. 53. 29
$\frac{22}{3}$ Aug. Sept. —	Emerſ. Dmitr.	10. 16. 25
	Pariſ. e calc.	7. 23. 6
	Differ. Merid.	2. 53. 19

4/15 Octobr. 1772	Emerſio Dmitriewſki	6ʰ.48′.47″
	Pariſiis e calculo	3. 55. 43
	Differ. Merid.	2. 53. 4
	Medium ex Emerſionibus	2. 53. 17
	Hinc longitudo Dmitr. a Pariſ. e calc.	2. 52. 24

2) Ex Eclypſibus Eiusdem primi ſatellitis cum obſeruationibus directe collatis.

5/16 Iulii 1773	Immerſio Dmitriewſki	12ʰ.27′.33″
	eadem Petropoli	11. 27. 8
	Different.	1. 0. 25
	Longit. Petrop. a Pariſ.	1. 51. 58
	Longit. Dmitr. a Pariſ.	2. 52. 23
22 Aug./2 Sept. 1771	Emerſio Dmitr.	10. 16. 25
	Stockholmiae	8. 26. 17
	Differentia	1. 50. 8
	Longit. Stockholm. a Pariſ.	1. 2. 55
	Erit long. Dmitr. a Pariſ.	2. 53. 3
	Medium ex his duabus	2. 52. 43

3) Ex Eclypſibus 2ᵃᵉ Satellitis.

22 Maii/2 Iun. 1771	Immerſio in Dmitriewſk	14. 55. 9
	Pariſ. e calc.	12. 3. 49
	Differ. Merid.	2. 51. 20
11/22 Iulii 1772	Immerſ. Dmitr.	10 54. 21
	Pariſ. e calc.	8. 2 15
	Differ. Merid.	2. 52. 6
	Medium ex his duabus	2. 51. 43

12/23 Aug.

12/23 Aug. 1772	Emerſio Dmitriewſki	$13^h.36'.48''$
	Pariſiis e calculo	10. 44. 17
	Differ. Merid.	2. 52. 31
30 Aug./10 Sept. ——	Emerſ. Dmitr.	8. 14. 57
	Pariſ. e calc.	5. 21. 44
	Differ. Merid.	2. 53. 13
	medium ex Emerſ.	2. 52. 52
	Vnde Long. Dmitr. a Pariſiis e calc.	2. 52. 17

4) Easdem Eclypſes comparando cum obſeruationibus correſpondentibus.

22 Mai/2 Iunii 1771	Immerſ. Dmitr.	$14^h.55'.9''$
	eadem Geneuae	12. 18. 41
	Differ.	2. 36. 28
	Longit. Geneuae a Pariſiis	15. 15
	adeoque Long. Dmitr. a Pariſ.	2. 51. 43
12/23 Aug. 1772	Emerſio Dmitr.	13. 36. 48
	eadem Stockholmiae	11. 47. 10
	Different.	1. 49. 38
	Long. Stockholm. a Pariſ.	1. 2. 55
	Long. Dmitr. a Pariſ.	2. 52. 33

$\frac{30 \text{ Aug.}}{10 \text{ Sept.}}$ 1772 Emerſio Dmitriewſki	$8^h.14'.57''$
Petropoli	7. 14. 0
Differ.	1. 0.57
Long. Petrop. a Pariſ.	1. 51.58
Vnde Long. Dmitr. a Pariſ.	2. 52.55
Ex his duabus emerſ. med.	2. 52.44
Hinc Long. Dmitr. ex obſeru. 2^{di} Sat.	2. 52. 13

5) Ex Eclypſibus 3^{ii} Satellitis directe cum obſeruationibus correſpondentibus comparatis.

$\frac{6}{17}$ Iulii 1772 Immerſio in Dmitriewſk	$13^h.\ 3'.50''$
Pariſiis in obſeruatorio	10. 11. 9
Differ. Merid.	2. 52.41
Eadem vero Pariſ. in clugny obſeru.	10. 12. 7
dat differentiam	2. 51.43
adeoque ab obſeru. Pariſino	2. 51.45
Medium ex vtraque obſeru.	2. 52.13

$\frac{11}{22}$ Aug. 1772 Emerſio Dmitriewſki		12. 39. 15
Stockholmiae		10. 49. 0
Different.		1. 50. 15
Long. Stockholm. a Pariſ.		1. 2. 55
et Long. Dmitr. a Pariſ.		2. 53. 10
Hinc long. Dmitr. med. ex 3^{io} Satell.		2. 52. 41
Erat autem eadem ex 1mo Satell.	e calc.	2. 52. 24
	ex obſ.	2. 52. 44
—— —— —— —— 2do Satell.	e calc.	2. 52. 17
	ex obſ.	2. 52. 13
Vnde medium		2. 52. 27
Ex Eclypſibus vero Solis longitudo haec reperta - - - - - -		2. 52. 11
Quam poſteriorem determinationem duplo probabiliorem aeſtimando, longitudo vrbis Dmitriewſk ab obſeruatorio Pariſino ſtatui poteſt - - - -		2. 52. 16

adeoque in partibus circuli 43°. 4′ et a meridiano primo 63°. 4′.

Statutis nunc latitudine et longitudine reperietur per calculum arcus circuli magni inter Petropolin et Dmitriewſk 13°. 2′. 34″, eritque diſtantia breviſſima inter has vrbes 1360 Werſtarum, quae alias eſt 1816, ſi iter dirigatur per Saratow.

IV.

Declinatio acus Magneticae.

$\frac{1}{12}$	Iunii 1771 Repetitis vicibus inueni declinationem acus magneticae $8\frac{1}{2}$ pollic. Angl. longae - -	$5\frac{3}{4}°$	Verſ. Occ.
$\frac{17}{28}$	Iunii eandem inueni - -	$5°, 8$	—— —
$\frac{8}{19}$	—— - - - - -	6.	—— —
$\frac{12}{23}$	—— - - - - -	5, 9	—— —
$\frac{14}{25}$	—— - - - - -	6.	—— —

Bene memini me hanc ipſam declinationem anno 1773 reperiſſe $6\frac{1}{2}°$ etiam a Septentrione verſus occidentem.

QVATVOR DELIQVIA LVNAE IN VRBE DMITRIEWSK OBSERVATA EXPONIT

PETRVS INOCHODZOW.

I.

Obſeruatio Eclypſis partialis die $\frac{17}{28}$ Aprilis 1771.

Motu horologii oſcillatorii per altitudines Solis correſpondentes bene explorato, flagrabam magno deſiderio hodiernum Lunae defectum obſeruandi, neque ab initio de ſucceſſu optato deſperans; ſed vergente hoc Luminari ad horizontem occiduum, maculae ipſius ob aërem craſſum minus diſtincte videri incipiunt - - $15^h.48'$ Temp. ver.

Initium vero Eclypſeos obſervare mihi viſus ſum -	16. 4. $26''$	—— ——
Mox Luna copioſiſſimis vaporibus obuelata conſpiciebatur difformis et reliquit horizontem - - - -	16. 25.	—— ——

* * *

Tres ſequentes Eclypſes obſeruauit etiam Cel. *Lowitz*, cuius obſeruationes meis hic inſerendas eſſe non dubitaui. Caeterum notandum eſt nos vnum ab al-

tero ad dimidiam circiter Werſtam fuiſſe diſſitos, praeterea illum tubo Quadrantis ſui, me autem tubo Dollondiano 3^{ium} pedum obſeruationes has inſtituiſſe.

II.

Obſeruatio Eclypſis etiam partialis die $\frac{12}{23}$ Octobris 1771 tempore vero.

	Lowitz	*Inochodzow*
	H. M. S.	H. M. S.
Penumbra in diſco Lunae apparet	- - -	6. 35. 0
Initium Eclypſeos - - -	6.38.53	38. 21
Vmbra ad Phocylidem -	- - -	43. 20
Phocylides immerſus - -	44. 0	- - - -
Shikardus - - - -	45.53	- - - -
Vieta - - - - -	47 58	- - - -
Longomontanus - - -	50.53	- - - -
Penumbra ad Tychonem - -	- - -	52. 5
Vmbra ad eundem - - -	55.49	54. 0
—— — ad dimidium Tychonis -	57.10	55. 20
Tycho totus immergit - -	58.13	56. 54
Vmbra ad litus maris Humorum	- - -	57. 53
Pitatus totus occultatur - -	7.15. 3	7. 13. 14
Nubes obducunt faciem Lunae.		
Langrenus immergit (per nubes)	8. 5.58	- - - -
Idem emergit - - -	30.56	- - - -
Vmbra reliquit diſcum Lunae -	- - -	8. 54. 44
Penumbra valde diluta euaneſcere videbatur - - - - -	- - -	57. 37
Finem Eclypſis ſimpliciter notauit - - - -	8.58.13	- - - -

NB.

NB. In obſeruatione finis Eclypſeos a Celeb. *Lowitz* notati, niſi ille finem ex diſparentia penumbrae concluſerit, lapſum calami adeſſe puto, vt ex comparatione infra patebit.

Color circa extremitatem vmbrae ſubruber videbatur; vmbra erat tam denſa, vt maculae Lunares ipſa tectae conſpici non potuerint.

* * *

III.

Obſeruatio die $\frac{6}{17}$ Aprilis 1772.

Exorta Luna tota eclypſata, emerſiones macularum ipſius ex vmbra tereſtri obſeruabamus:

	Lowitz	*Inochodzow*
	H. M. S.	H. M. S
Keplerus emergit - - -	8. 8.54	8. 8. 55
Copernicus - - - -	16. 2	16. 23
Plato - - - -	18.29	- - -
Tycho - - - -	19.26	19. 48
Manilius - - -	27.52	29. 13
Dioniſius - - - -	30. 3	- - -
Menelaus - - - -	30.58	31. 13
Promontorium acutum - -	39.51	- - -
Mare Criſium emergit - -	44. 4	- - -
—— —— — totum ex vmbra	48.51	47. 22
Langrenus totus - - -	49.46	50. 23
Vmbram videt adhuc in limbo Lunae - - - -	52.53	- - -
Vmbra relinquit diſcum Lunarem - - - - -	- - -	53. 25
Nullum amplius vmbrae veſtigium cernit - - -	54.35	- - -

Aër tempore obſeruationis erat tranquillus; at coelum maxime in ea regione vbi Luna verſabatur, nubeculis erat tectum, per quarum hiatus nonnulla momenta ſignata ſunt.

* * *

IV.

Obſeruatio Eclypſis Lunae totalis cum mora die 30 Sept. / 11 Octob. 1772.

	Lowitz	*Inochodzow*
	H. M. S.	H. M. S.
Penumbram ingredi diſcum Lunae video - - - -	- - -	6. 28. 51
Initium Eclypſis - - -	6.32. 6	31. 31
Vmbra attingit Grimaldum -	- - -	32. 22
—— —— —— medium Grimaldum - - - -	- - -	33. 2
Grimaldus totus in vmbra - -	34.14	34. 1
Galilaeus —— —— —— - -	37.28	37. 30
Vmbra ad Mare Humorum -	- - -	38. 59
—— —— Schikardum - -	40.37	40. 20
Schikardus totus immergit - -	41.39	- - -
Keplerus ſubmergi incipit - -	- - -	42. 27
Vmbra ad Ariſtarchum - -	- - -	44. 48
—— —— dimidium Ariſtarch.	- - -	45. 27
Keplerus totus in vmbra - -	45.46	- - -
Ariſtarchus totus immergit -	47.12	46. 51
Bulialdus —— —— —— -	49.53	- - -
Schillerus - - - -	- - -	50. 6

Vmbra

	Lowitz H. M. S.	Inochodzow
Vmbra ad Copernicum - -	53.25	53. 2
—— —— medium Copern. -	- - -	53. 58
Copernicus totus in vmbra -	55.19	55. 3
Tycho immergi incipit - -	55.35	55. 31
—— totus ſubmerſus - -	57. 2	56. 51
Eratoſthenes (dub.) - -	58.11	- - - -
Tymocharis ad vmbram - -	7. 2.12	7. 1. 39
—— —— medius - - -	- - -	2. 31
—— —— totus in vmbra -	3. 7	3. 32
Vmbra ad Manilium - -	10.53	10. 13
—— —— Platonem - -	11.13	10. 35
Manilius totus immerſus - -	11.49	11. 42
Plato —— —— —— - -	12.17	12. 31
Menelaus immergi incipit - -	7.14.23	7. 13. 45
—— — totus in vmbra - -	15.34	15. 11
Tacquetum vmbra attingit -	- - -	17. 43
Tacquetus totus immerſus -	- - -	18. 28
Vitruuius aut Plinius - -	18.48	- - - -
Promontorium acutum obumbratur - - - -	- - -	21. 8
Poſſidonius occultari incipit -	21.53	- - - -
—— —— totus in vmbra -	23. 7	- - - -
Mare Criſium immergit - -	30.22	30. 43
Luna immergit in penumbram -	- - -	37. 51
Immerſio totalis in vmbram -	37.43	38. 31

Durante Eclypſi totali Luna et maculae ipſius inſigniores nudis oculis videri poterant. Facies Lunae inquinata erat colore aliquo fuſco ad ſubrubrum declinante.. Emer-

Emerſiones Macularum Lunarium.

	Lowitz	Inochodzow
	H. M. S.	H. M. S.
Luna egredi incipit ex vmbra ſeu initium Emerſionis -	9.21.28	9. 20. 13
Heuelius emergit - -	23.18	- - - -
Grimaldus emergit - -	23.40	23. 28
—— —— medius - -	- - - -	24. 1
—— —— totus extra vmbram - - - - -	24.59	24. 44
Galilaeus (dub.) - -	26.44	- - - -
Ariſtarchus egreditur - -	30.44	30. 12
—— —— totus emerſus -	- - - -	31. 4
Schikardus emergit - -	32. 4	- - - -
—— —— totus ex vmbra -	32.46	- - - -
Keplerus apparet - -	35. 0	35. 23
Mare Humorum totum extra vmbram - - -	- - - -	36. 1
Bulialdus ex penumbra - -	42.24	- - - -
Copernicus emergit - -	42.45	- - - -
Bulialdus totus ex vmbra -	43.50	- - - -
Copernicus totus extra vmbram - - -	43.59	43. 44
Plato emergit - - -	46.16	- - - -
Tycho - - - -	46 44	- - - -
Plato totus ex vmbra - -	47.43	47. 31
Tycho —— —— —— - -	48.15	48. 19
Eratoſthenes (dub.) - -	50.14	- - - -
Eudoxus - - - -	- - - -	53 32

Manilius

	Lowitz H. M. S.	Inochodzow H. M. S.
Manilius emergit - -	9.59.41	9 59. 18
—— — totus apparet - -	10. 0.32	10. 0. 11
Menelaus emergit - - -	2.51	- - - -
—— — totus extra vmbram	3.24	3. 37
Tacquetus totus - - -	- - - -	7. 56
Poſſidonius - - - -	8.24	- - - -
Mare Serenitatis extra vmbram - - -	- - - -	15. 0
Mare Criſium emergit - -	18.36	18. 56
Langrenus - - -	24. 8	22. 21
Mare Caſpium totum ex vmbra - - -	23.46	23. 51
Vmbra relinquit diſcum Lunae	27. 0	27. 13
Penumbra euaneſcere videtur	- - - -	29. 31

Per totum huius obſeruationis tempus grata erat coeli ſerenitas et aëris tranquillitas.

Summa Obſeruationis.

	Lowitz	Inochodzow
Duratio totius Eclypſis ex init. et fine obſeru. - -	3.54.54	3. 55. 42
Duratio Eclipſis totalis ſeu Morae - - - -	1.43.45	1. 41. 42
Medium Eclipſis ex initio et fine - - - -	8.29.33	8. 29. 22
Idem ex immerſione et emerſione - - -	8.29.35½	8. 29. 22
Idem colligitur ex penumbra	- - - -	8. 29. 11

* * *

Quamuis Longitudo Loci ex defectibus Lunaribus ob difficultatem vmbram a penumbra diſcernendi ad vnguem, vt dicunt, determinari nequit; verum tamen non inutile imo neceſſarium duxi periculum facere, et comparationes cum obſeruationibus correſpondentibus trium poſteriorum Deliquiorum, quae mihi nunc in promtu ſunt, in medium afferre.

1) Secunda Eclypſis obſeruata Pekini hunc in modum:

	Init. Eclypſ.	Dimid. Tych. in vmbra.	Finis Eclypſ.
Pekini - - -	$11^h.23^l.17^{ll}$	$11^h.41^l.11^{ll}$	$13^h.39^l.48^{ll}$
Dmitr. Lowitz	6. 38. 53	6. 57. 10	8. 58. 13
—— Inochod.	6. 38. 21	6. 55. 20	8. 54. 44

Vnde duratio Eclyſis Pekini	2. 16. 31
- - - Dmitr. e Low.	2. 19. 20
e mea	2. 16. 23

Porro differentia Meridianorum inter Pekinum et Dmitriewſk:

Ex obſeru. Lowitz.	4. 44. 24	4. 44. 1	4. 41. 35
e mea - -	4. 44. 56	4. 45. 51	4. 45. 4

Si ex his differentiis tollantur duae, Lowitziana e fine et mea e dimidio Tychonis, reliquae quatuor praebent differentiam mediam 4. 44. 36

Eſt vero Longitudo Pekini ab obſeru. Pariſ. 7. 36. 20

Hinc Long. Dmitriewſki a Pariſiis 2. 51. 44

Finis

Finis huius Eclypſis obſeruatus etiam Berolini - - - - -	$6^h.47'.0''$
comparatus cum obſeruatione mea dat differentiam - - - -	2. 7.44
Longitudo autem Berolini a Lutetia Pariſiorum - - - - -	44.10
Erit long. Dmitr. a Pariſiis - -	2. 51.54
Gryphswaldiae eiusdem Eclypſis finis itidem obſeruatus - -	6. 47. 6
collatus cum obſeruatione mea praebet differentiam - - -	2. 7.38
At Longitudo Gryphswaldiae a Pariſiis	44.15
Vnde Dmitriewſk a Pariſiis -	2. 51.53
Et medium ex his tribus comparationibus	2. 51.50
2) Finis 3tiae Eclypſis in Dmitriewſk ex obſeru. mea - - -	8. 53.25
idem Petropoli obſeruatus - -	7. 52.44
differentia - - - -	1. 0.41
Eſt vero longitudo Petropolis a Pariſiis	1. 51.58
Longit. igitur Dmitriewſki a Pariſiis	2. 52.39

3) Vltima Eclypſis obſeruata etiam Petropoli a Celeb. Viris *Rumowſky* et *Lexell*, adeoque comparatio inter obſeruationem Petropolitanam et noſtram inſtitui poteſt. Sumtis mediis momentis ab vtroque obſeruatore notatis, et reiectis differentiis valde diſcrepantibus ſequentes vndecim retineo.

	Obſ. Petrop. H. M. S.	Obſ. Dmitr. H. M. S.	Differentia H. M. S.
Vmbra ad Ariſtarchum	5. 44. 30	6. 44. 48	1. 0. 18
Ariſtarch. totus immergit	46. 13½	47. 1½	1. 0. 48
Vmbra ad Platonem -	6. 10. 4	7. 10. 54	1. 0. 50
——— ad Manilium -	10. 25	10. 33	1. 0. 8
Manil. totus immergit	11. 27½	11. 45½	1. 0. 18
Vmbra ad Menelaum -	13. 12	14. 4	1. 0. 52
Immerſio Lunae totalis	37. 0	38. 7	1. 0. 7
Poſſidonius emergit -	9. 8. 22	10. 8. 24	1. 0. 2
Mare Nectaris emergit	14. 18½	15. 0	1. 0. 41
Mare Criſium egreditur	18. 21	18. 46	1. 0. 25
Finis Eclypſis - -	27. 4½	27. 6½	1. 0. 2
Medium			1. 0. 24
Longit Petrop. a Pariſiis			1: 51. 58
Erit longitudo Dmitr. a Pariſiis			2. 52. 22
et medium ex his 3bus comparation.			2. 52. 17

Vt vt ſit, hanc longitudinis determinationem ad eam, quae prodit ex Eclypſibus Solis et ſatellitum Iouis, accedere propius quam perſuaſum mihi habui.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN VRBE SARATOW HABITAE

a *G. M. LOWITZ*

ANNO 1773.

Exponuntur hic nonnullae obſeruationes Aſtronomicae, quas vir celeb. recuperandae valetudinis ſuae cauſſa in vrbe Saratow commorans occaſionem habuit inſtituendi.

I.

Inquiſitio in errorem Quadrantis.

1) Ex verificatione Quadrantis ad horizontem reperitur error ipſius additiuus - - 2′. 46″.

2) Ex rectificatione ad *Zenith*, obſeruando altitudines Capellae meridianas

ad Auſtrum			et ad Boream			Error
die	6 April	84°10′.6″	die	7 April	95°.45′.53″	+3. 0½
—	8 ——	84. 10. 1	—	9 ——	95. 45. 52	+3. 3½
—	10 ——	84. 10. 5	—	12 ——	95. 45. 51	+3. 2

3) Ex altitudinibus fixarum ad Auſtrum et Septentrionem captis et cum calculo collatis deprehenditur Error Quadrantis.

Ex β ♊ ad Auſtrum et β vrſae minor. ad Boream	+2.51
ε Bootis — — — — - -	+2.53
β ♊ — — — γ — — - -	+2.53½
ε Bootis — — — — - -	+3. 8
α Lyrae — — α — maioris - -	+2.49
Corde Caroli — — — — - -	+3. 7½
Capella — et ε vrſae maior. - -	+3. 7
Eadem — — ζ — — - -	+3. 3
Ex quibus omnibus error medius	+2.59
qui tamen rotunde aſſumi poteſt	+3. 0

II.

Determinatio Latitudinis vrbis Saratow.

1) Ex altitudinibus fixarum meridianis.

E magno numero harum repetitarum obſeruationum ſelectae eae ſunt, quae inter reliquas medium tenent: notandum porro eſt ad altitudines obſeruatas iam addita eſſe 3 minuta prima pro errore Quadrantis antea inuento.

Dies

Dies obſeru. St. nou.	Nom. Fixar.	Altit. obſeru.	Refract. D. de la C.	Declin. fixar. ad d. obſeru.	Aberr.	Nutat.	Latitudo
		Altitudines	ad	Auſtrum.			
April 5	γ Leonis	59°.28′.15″	0′.34″,3	20°.59′. 0″,2	− 5″,8	−5″,2	51°.31′. 9″
6	Syrius	22. 5. 44	2.39,5	16. 24. 44,2	+12,3	+8,9	51. 31. 50
8	α Cygni	82. 57. 15	8,4	44. 48. 44,5	−17,7	+7,8	51. 31. 27
10	Capella	84. 13. 5	6,8	45. 44. 45,2	+ 5,4	−8,0	51. 31. 47
11	Procion	44. 17. 13	1 8.	5. 47. 51.	− 5,5	−8,7	51. 31. 32
14	Caſtor	70. 50. 41	23.	32. 21. 59,3	− 3,8	−8,8	51. 31. 29
—	Lyra	77. 3. 55	15,4	38. 34. 59,2	−16,6	+8,9	51. 31. 12
30	β Leonis	54. 19. 30	47,8	15. 50. 25,2	− 1,9	−2,3	51. 31. 39
Maii 7	Pollux	67. 2. 21	28,2	28. 33. 23,6	+ 3,4	−5,6	51. 31. 24½
9	δ Bootis	72. 39. 10	20,7	34. 10. 23.	− 3,4	+5,7	51. 31. 36
10	ε Bootis	66. 31. 9	28,9	28. 2. 26.	− 2,4	+4,8	51. 31. 40
14	Cor. Caroli	78. 1. 18	14.	39. 32. 48,6	+ 5,0	−0,1	51. 31. 50
28	α Coronae	65. 58. 42	29,6	27. 29. 26,8	0,0	+6,4	51. 31. 21
Iunii 1	η Bootis	58. 1. 43	41,5	19. 32. 44,2	+ 2,4	+3,2	51. 31. 46
		Altitudines	ad	Boream.			
April 9	ε vrſ. maior	84. 19. 47	6,6	57. 11. 43.	+ 6,8	+0,6	51. 31. 30
- - - -	ζ —— ——	85. 24. 50	5,3	56. 6. 55,8	− 3,4	+1,7	51. 31. 39
- - - -	η —— ——	91. 4. 22	1,2	50. 27. 6,3	− 5,4	+2,2	51. 31. 26
22	α —— ——	78. 23. 25	13,5	62. 58. 16,5	+10,3	−4,0	51. 31. 34½
Maii 7	β vrſ. minor	66. 26. 51	29.	75. 5. 8,7	+ 0,6	+5,3	51. 31. 36½
- - - -	γ —— ——	68. 53. 24	25,6	72. 38. 29,2	− 1,9	+6,2	51. 31. 32
					Medium ex his 20 obſeruationibus		51. 31. 33

2) Ex altitudinibus Solis meridianis.

Pro computanda declinatione Solis aſſumitur hic differentia meridianorum inter obſeruatorium Pariſinum et vrbem Saratow $2^h. 50'$.

Dies

Dies obſeru. St. nou.		Altit. limbi ☉ inferioris	Refract. — Parall.	Semid. ☉	Declinat. ☉	Alt. Aequator
Martii	22	39°. 3'.24"	1'.15"	16'. 3",6	0°.49'.28"	38°.28'.44½"
	23	39. 26. 56	1.14	16. 3,3	1. 13. 6	38. 28. 39
	25	40. 14. 8	1.12	16. 2,7	2. 0.18	38. 28 41
April	5	44. 28. 50	1. 1,6	15. 59,8	6. 15.15	38. 28. 33
	6	44. 51. 19	1. 0,7	15. 59,6	6. 37.52	38. 28. 26
	7	45. 14. 2	59,8	15. 59,3	7. 0.23	38. 28. 38½
	8	45. 36. 9	59,2	15. 59.	7. 22.48	38. 28. 21
	12	47. 4. 34	56.	15. 58.	8. 51. 7	38. 28. 29
Maii	2	53. 44. 6	43,8	15. 53.	15. 30.41	38. 28. 34
Iunii	5	60. 49. 56	33,1	15. 47.	22. 36.17	38. 28. 53
	6	60. 56. 5	32,9	15. 46,8	22. 42.33	38. 28. 46
	8	61. 7. 26	32,6	15. 46,6	22. 53.52	38. 28. 48
					Medium	38. 28. 37
					Adeoque eleuatio poli	51. 31. 23
					Erat autem eadem ex altit. fixarum	51. 31. 33
					Hinc latitudo vrbis Saratow	51. 31. 28

III.

Pro determinanda longitudine huius vrbis obſeruauit quidem vir cel. Eclypſin Solarem die $\frac{12}{23}$ Martii; ſed dolendum eſt motum penduli ob frigus eo tempore in aëre regans minus exactum, quin indicem ſcrupulorum ſecundorum per aliquot momenta quietum fuiſſe. Quam ob cauſſam tempora huius obſeruationis vera erui non poſſunt. Interim tamen obſer-

obſeruauit ille poſtea Immerſionem primi Satellitis Iouis, die nempe 7mo Iunii 14^h.12$'$.11$''$ Temp veri
Eadem vero Immerſio Pariſiis
e calculo - - - 11. 17.29 —— ——
Vnde longitudo vrbis Saratow
a Pariſiis - - - 2. 54 42 —— ——
vel numero rotundo 2^h. 54$\frac{2}{3}'$, adeoque in partibus Circuli 43°. 40$'$ et a Merediano primo 63°. 40$'$ ſtatui poteſt.

IV.

Diebus $\frac{15}{26}$ Maii et $\frac{23 \text{ Maii}}{3 \text{ Iuni}}$ Declinationem acus Magneticae inuenit 3°. 28$'$ verſus occidentem.

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXV. SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae, et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1775.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	Altitudo maxima die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	Altitudo minima die hora	Variatio Dig. p. c.	Medium Dig. p. c.	Altitudo media Dig. p. c.
Ianuar.	29. 11	25. IX. p. m.	27. 30	9. IX. a. m.	1. 81	28. 21	28. 29
Februar.	28. 83	27. meridie	27. 22	5. VI a. m.	1. 61	28. 02	27. 99
Mart.	28. 58	7. IX. p. m. 8. X. a. m	27. 12	26. VII. a. m	1. 46	27. 85	27. 88
April.	28. 44	15. IX a. m. 25. VI. a. m. 26. IX. p. m.	27. 44	12. VI. a. m.	1 00	27. 94	28. 10
Maii	28. 53	2. X. a. m. 29. IX. a. m.	27. 33	17 III. p. m.	1. 20	27. 93	28. 07
Iunii	28. 39	3. VI. a. m.	27. 48	24. IX. p. m.	0. 91	27. 94	28. 09
Iulii	28. 43	23. VIII. a. m.	27. 62	17. meridie	0. 81	28. 03	28. 11
Auguſt	28. 62	9. X. a. m.	27. 88	25. IX. a. m.	0. 74	28. 25	28. 29
Sept.	28. 57	16. X. a. m.	27. 88	21. VI. a. m.	0. 69	28. 22	28. 24
Octobr.	28. 48 28. 83	3. meridie 31. VI. a. m.	27. 63	14 VIII. a. m.	0. 85 1. 20	28. 05 28. 23	28. 15
Nouembr.	28. 88 28. 72	1. meridie 21. meridie	27. 56	16. III. p. m.	1. 32 1. 16	28. 22 28. 14	28. 26
Decembr.	28. 62	16. III. p. m	27. 26	14. IV. a. m	1. 36	27. 94	28. 01
Anno 1775.	29. 11	Menſe Ianuarii.	27. 12	Menſe Martii	1. 99	28. 11	28. 12

2. Nume-

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 05 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 95 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	21. 0	22. 12	24. 9	25. 6	26. 15	28. 26
Febr.	11. 6	12. 6	14. 3	15. 12	16. 15	28. 01
Mart.	8. 6	9. 15	12. 0	13. 12	16. 12	27. 92
April.	16. 18	19. 3	20. 18	22. 9	24. 0	28. 14
Maii	17. 6	19. 3	20. 6	21. 3	21. 21	28. 17
Iunii	14. 15	17. 9	20 12	21. 21	25. 0	28. 09
Iul.	17. 15	21. 6	23. 15	25. 18	29. 9	28. 13
Aug.	27. 15	29. 15	30. 0	30. 9	30. 18	28. 28
Sept.	21. 12	25. 3	26. 21	28. 9	29. 18	28. 28
Oct.	19. 15	21. 0	21. 21	23. 21	25. 3	28. 16
Nou.	23. 20	25. 9	25. 21	26. 0	26. 3	28. 27
Dec.	14. 0	15. 15	17. 15	18. 21	20. 6	28. 06
Anno 1775	213. 0	238. 0	257. 21	272. 21	292. 0	28. 20

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros deſignant, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno:

1. Altitudo maxima barometri 29. 11: menſe Ianuarii die 25 hora IX ante meridiem. Thermom. Delisl. 182. Coelum ſerenum et ventus ſatis vehemens e regione N—W.

2. Altitudo minima barometri 27. 12: menſe Martii die 26 hora VII matutina. Thermom. Deliſl. 154: coelum nubibus ex parte obductum, et nebuloſum: nix et ventus e regione NNW.

3. Variatio maxima 1. 99 ſeu fere 2 pollicum.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam $28\frac{11}{135}$.

5. Altitudo media inter omnes obſeruatas $28\frac{12}{135}$.

6. Porro mercurius in tubo barometri ſe ſuſtentabat ſupra

$28\frac{10}{135}$ poll. per dies 213
$28\frac{5}{135}$ poll. per dies 238
28 poll. per dies $257\frac{7}{8}$
$27\frac{5}{135}$ poll. per dies $272\frac{7}{8}$ et ſupra
$27\frac{90}{135}$ poll. per dies 292

vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum ſupra altitudinem $28\frac{20}{135}$ poll.

3. Deſcenſus et aſcenſus mercurii in tubo barometri notabiliores.

Menſe Ianuario.

d. 7. hora 3. p. m. 28. 29
d. 9. hora 9. a. m. 27. 30
d. 10. hora 9. p. m. 28. 19.

Ergo

Ergo primo interuallo temporis 42 horarum barometrum deſcendit $\frac{99}{100}$ pollicis, deinde interuallo 36 horarum iterum aſcendit $\frac{89}{100}$ poll. Coelum plane obductum, nix copioſa, et procella e regione S–W, tum vero coelum nebuloſum et tantum ex parte nubibus obductum vent. N–W.
Reliqui deſcenſus et aſcenſus notabiliores ex figura hic adiuncta perſpiciuntur.

Menſe Februario.

d. 5. hora 6. a. m. 27. 22
d. 7. hora 2. p. m. 28. 45
d. 9. hora 8. p. m. 27. 26.

Hinc per tempus 56 horarum aſcendit barometrum interuallo $\frac{123}{100}$ poll. tum vero per horas 54 iterum deſcendit interuallo $\frac{119}{100}$ poll. Coelum primo erat ſerenum, vento vehementer flante ex N. et NW, deinde obducebatur coelum nubibus, procella flabat e regione SW. vna cum niue abundante

d. 13. hora 8. a. m. 27. 32
d. 15. hora 2. p. m. 28. 17.

Aſcendit igitur mercurius in tubo barometri interuallo 54 horarum, per ſpatium $\frac{85}{100}$ poll. Coelum obductum, nebuloſum, nix; ventus NW, tum SW, tandem malacia

d. 24. hora 6. p. m. 27. 99
d. 27. meridie 28. 83.

Conſequenter tempore 66 horarum aſcenſus fuit $\frac{44}{100}$ poll. Coelum obductum, poſtea ſerenum et tum iterum obductum. Vento ſtante primo e regione NO, deinde vehementius ex occidente.

Menſe Martio.

d. 5. hora 2. p. m. 27. 82
d. 7. hora 9. p. m. 28. 58.

Ergo interuallo 55 horarum aſcendit mercurius per $\frac{76}{100}$ poll. Coelum ſerenum. Eurus

d. 14. hora 3. a. m. 27. 60
d. 15. hora 5. p. m. 28. 35.

Vnde per tempus 38 horarum aſcendit interuallo $\frac{75}{100}$ poll. Coelum obductum, nix, vent. N—W

d. 18. hora 0. a. m. 27. 86
d. 18. hora 6. p. m. 27. 38
d. 19. hora 6. p. m. 28. 11
d. 21. hora 2. p. m. 27. 27
d. 22. hora 11. p. m. 27. 83
d. 23. hora 4. p. m. 27. 27.

Primum ergo interualio temporis 18 horarum deſcenſus fuit $\frac{48}{100}$ poll. Coelum obductum, Procella ex occidente.

Deinde tempore 24 horarum aſcendit mercurius per $\frac{73}{100}$ poll. Coelum ſerenum, vent. NW.

Tum tempore 44 horarum deſcendit interuallo $\frac{84}{100}$ poll. Coelum obductum, nix, pluuia, Zephirus.

Porro

Porro tempore 33 horarum aſcendit per $\frac{56}{185}$ poll. Coelum ſerenum. Vento leniter flante e regione NW.

Tandem per 17 horas iterum deſcendit interuallo $\frac{56}{156}$. poll. Coelum obductum, nix; procella ex plaga NO et occidente.

Menſe Aprili.

d. 10. meridie 28. 14
d. 12. hora 6. a. m. 27. 44
d. 15. hora 9. a. m. 28. 44.

Conſequenter primum tempore 42 horarum deſcenſus fuit $\frac{70}{153}$ poll. Coelum nubeculoſum; procella ex occidente. Tum vero per 75 horas mercurius iterum aſcendit interuallo 1 pollicis, nix: vent. N—W.

d. 28. hora 6. a. m. 28. 38
d. 29. hora 3. p. m. 27. 86
d. 31. hora 3. p. m. 28. 48.

Deſcenſus igitur primo fuit $\frac{52}{153}$ poll. interuallo temporis 33. horarum, cum pluuia et Euro. Tum tempore 48 horarum mercurius iterum aſcendit per $\frac{62}{153}$ poll. Pluuia et procella e plaga NO.

Menſe Maio.

d. 2. hora 10. a. m. 28. 53
d. 4. hora 8. a. m. 27. 80
d. 5. hora 11. p. m. 28. 34
d. 7. hora 10. a. m. 27. 63
d. 8. hora 4. p. m. 28. 10
d. 10. hora 2. p. m. 27. 48.

Hinc

Hinc mercurius in tubo barometri

1. deſcendit per $\frac{73}{100}$ poll. interuallo temporis 46 horarum: coelum ſerenum, Eurus, poſtea pluuia
2. aſcendit per $\frac{54}{100}$ poll. tempore 39 horarum: coelum ſerenum et procella e NW
3. deſcendit per $\frac{71}{100}$ poll. tempore 35 horarum: coelum obductum, pluuia et procella ex regione SW
4. aſcendit per $\frac{47}{100}$ poll. tempore 30 horarum, pluvia cum Zephyro, tandem
5. deſcendit per $\frac{62}{100}$ poll. tempore 46 horarum; pluuia cum Zephyro

d. 11.	hora 8. a. m.	27. 49
d. 12.	meridie	28. 25
d. 14.	hora 9. a. m.	28. 47
d. 16.	hora 9. a. m.	27. 67
d. 17.	hora 3. p. m.	27. 33.

Primum igitur tempore 73 horarum aſcendit mercurius per $\frac{98}{100}$ poll. Pluuia, nix, procella ex occidente; deinde coelum ſerenum et malacia. Tum vero tempore 78 horarum iterum deſcendit per $1\frac{14}{100}$ poll. Pluuia et ventus ex occidente.

Menſe Septembri.

d. 21.	hora 6. a. m.	27. 88
d. 23.	hora 10. a. m.	28. 53.

Ergo tempore 52 horarum aſcendit mercurius in Barometro per $\frac{65}{100}$ poll. Coelum obductum: Eurus; tum vero pluuia, vento vehementer flante ex occidente.

Menſe

Menſe Octobri.

d. 15. hora 6. a. m. 27. 80
d. 15. media nocte 28. 17.

Hinc per tempus 18 horarum aſcenſus fuit $\frac{37}{100}$ poll. Pluuia abundans et procella ex oriente

d. 21. hora 9. p. m. 27. 99
d. 22. hora 6. a. m. 27. 72.

Interuallo igitur 9 horarum deſcenſus fuit $\frac{27}{100}$ poll. Pluuia abundans et procella e regione SW

d. 23. hora 9. p. m. 28. 13
d. 24. hora 6. p. m. 27. 71
d. 25. meridie 28. 12.

Primum ergo per 21 horas mercurius deſcendit interuallo $\frac{42}{100}$, tum vero per 18 horas iterum aſcendit interuallo $\frac{41}{100}$ poll. Pluuia abundanter cecidit, procella ex meridie flante

d. 28. hora 9. p. m. 27. 82
d. 31. hora 6. a. m. 28. 83.

Vnde per interuallum temporis 57 horarum, aſcenſus fuit $1\frac{1}{100}$ poll. Coelum nebuloſum ex parte nubibus obductum. Pluuia parca: vento flante primum e meridie, tum vero ex oriente.

Menſe Nouembri.

d. 14. hora 9. a. m. 28. 24
d. 14. media nocte 28. 10
d. 15. media nocte 27. 62
d. 16. hora 3. p. m. 27. 56.

Conſequenter tempore 54 horarum per $\frac{68}{155}$ poll. et quidem per 24 horas, interuallo $\frac{48}{150}$ poll. deſcendit. Coelum obductum, nix et ventus mediocriter vehemens ex occidente.

d. 16.	hora 3. p. m.		27. 56
d. 18.	meridie		27. 70
d. 19.	media nocte		28. 45
d. 21.	meridie		28. 72.

Hinc aſcenſus mercurii in tubo barometri per interuallum temporis 117 horarum fuit $1\frac{16}{150}$ poll. et quidem per 36 horas, $\frac{75}{155}$ poll. Coelum obductum; ventoſum primo e regione SW, deinde ex SO

d. 21.	meridie	28. 72
d. 22.	meridie	28. 27.

Deſcendit igitur mercurius iterum ſequentibus 24 horis per interuallum $\frac{45}{155}$ poll. Coelum obductum, nebuloſum, nix et vent. SO.

Menſe Decembri.

Pro hoc menſe libuit figuram addere ex qua variationes barometricae ipſae perſpici poſſunt: vbi etiam pro quauis die altitudinem Thermometri maximam et minimam, ſeu ſtatum caloris et frigoris, nec non directionem venti et conſtitutionem coeli adiunxi.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae et maximae pro ſingulis menſibus anni 1775 ſecundum Calendarium correctum.

Menſe	Altitudo minima			Altitudo maxima			Differentia
	Gradus	die	hora	Gradus	die	hora	
Ianuar.	191	24.	V. a. m.	147	12.	II. p. m.	44 Gr.
Februar.	185	21.	VII. a. m.	146	3. 16.	II. p. m.	39
Mart.	175	8.	VI. a. m.	143	12.	II. p. m.	32
April.	168	15.	VI. a. m.	135	28.	II. p. m.	33
Maii	157	1.	VI. a. m.	116	26. 27.	II. p. m.	41
Iunii	147	3.	VI. a. m.	116	21.	II. p. m.	31
Iulii	131	1.	VI. a. m.	107	24.	II. p. m.	24
Auguſt.	141	26.	VI. a. m.	105	10.	II. p. m.	36
Septembr.	142	23.	VI. a. m.	116	10.	II. p. m.	26
Octobr.	153	30.	VIII. a. m.	123	5.	II. p. m.	30
Nouembr.	173	14.	VII. a. m.	142	4.	II. p. m.	31
Decembr.	178	11.	VI. a. m	143	3.	X. p. m.	35
Anno 1775.	191	Menſe Ianuar.		105	Menſe Aug.		86 Gr.

De Thermometri vti et Barometri conſtructione et expoſitione, plura in Tomo XVIII. horum Commentariorum leguntur; quare hic eadem repetere ſuperfluum foret.

2. Status frigoris et caloris.

Menſe	Dies frigidiores gradibus						Dies calidiores gradibus					
	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150	160
Ianuar.	3	6	10	24	30	31					3	13
Februar.		2	9	16	24	28					11	18
Mart.			1	11	27	31					20	31
April.				6	22	30				7	25	30
Maii					4	23		2	9	26	31	31
Iunii						3		5	27	30	30	30
Iulii						0	8	25	31	31	31	31
Auguſt.						1	7	23	31	31	31	31
Septembr.						1		3	29	30	30	30
Octobr.					1	14			6	24	31	31
Nouembr.			3	8	24	30					12	25
Decembr.			6	19	27	31					6	21
Anno 1775.	3	8	29	84	159	223	15	58	133	179	261	322

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuiſſe:

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 191 grad. Delisl. menſe Ianuarii die 24, hora matutina V^{ta}. Barometro tunc temporis momento $28\frac{9'}{100}$; Coelo ſereno exiſtente et vento leniter flante ex ſeptentrione. Hic ergo frigoris maximi gradus cum illo anni praeteriti prorſus conuenit, adeoque multo minor fuit annis praecedentibus: quibus ſcilicet ſemper gradum 200um ſuperauit.

2. Alti-

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 105 grad. Delisl. die 10ma menſis Auguſti et quidem hora II^{da} poſt meridiem. Barometrum $28\frac{57}{100}$. Coelum ſerenum. Ventus ex oriente. Praeterito 1774 anno calor maximus obſeruatus fuit 106 grad. et annis 1773 et 1772, iſte tantum 104 grad. deprehenſus fuit.

3. Vnde variatio Thermometri maxima per totum annum eruitur 86 graduum ſecundum Therm. Delisl. fuit autem iſta variatio anno praeterlapſo 1774, 85 graduum.

Per tabulam poſteriorem intelligimus, hoc 1775 anno, fuiſſe 159 dies, quibus frigus ſuperabat gradum 150, vel congelationis aquae naturalis: inter hos autem deprehendimus 84 dies frigidiores gradu 160 et 29 dies frigidiores gradu 170. Vnde patet hyemen hoc anno tam reſpectu durationis quam vehementiae multo mitiorem fuiſſe annis praecedentibus.

Deinde patet ex hac ſecunda Tabula hoc anno 1775 fuiſſe 261 dies calidiores gradu 150, porro 179 dies calidiores gradu 140, inter quos 133 dies annotauimus quibus calor ſuperabat gradum 130 et 58 dies quibus ſuperabat 120 gradum. Vnde intelligitur aeſtatem hoc 1775 anno multo calidiorem quoad durationem fuiſſe quam anno praecedente, vbi tantum 239 dies calidiores gradu 150 et 128 dies calidiores gradu 130 numerabantur.

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

		dies
190 et 200	die 23. 24. et 26. Ianuarii - -	3
180 et 190	die 22. 25. 27. Ianuarii et die 6. 21. Februarii - - - -	5
170 et 180	die 2. 10. 20. 21. Ian. die 7. 19. 20. 22. 23. 24. 26. Febr. die 8. Martii; die 11. 12. 14. Nouemb. et die 10. 11. 19. 21. 22. 25. Decembris - - - - -	21
160 et 170	die 1. 3 – 6. 15 – 19. 28 – 31. Ian. die 5. 8. 11. 12. 25. 27. 28. Febr. die 6. 7. 9. 10. 15. 22. 23. 25. 27. 30. Mart. die 1 – 3. 10. 14. 15. April; die 10. 13. 15. 23. 24. Nou.; et die 6. 7. 12 – 18. 24. 29 – 31. Decembris - -	55

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

		dies
110 et 100	die 9. 10. 15. 23 – 26. 30. Iul. et die 6 – 12. Auguſt. - -	15
120 et 110	die 26. 27. Maii; die 12. 20 – 23. Iunii, die 2 – 4. 7. 8. 11. 13. 14. 16. 17. 20 – 22. 27 – 29. 31. Iulii; die 1 – 5. 13 – 17. 21 – 24. 30. 31. Aug. et die 2. 4. 10. Septembris - - -	43

		dies
130 et 120	die 6. 24. 25. 28 — 31. Maii;	
	die 1. 4 — 11. 13. 14. 16 — 19.	
	24 — 30. Iunii; die 1. 5. 6. 12.	
	18. 19. Iulii; die 18—20. 25—29	
	Aug.; die 1. 3. 5 — 9. 11 — 21.	
	23 — 30. Septembris et die 1. 2.	
	5. 7 — 9. Octobris - - -	75

Frigus medium vero hoc anno ſtatui poteſt 147 graduum et calor medius 139 graduum. Id eſt per dimidium anni vel per $182\frac{1}{2}$ dies, altitudo Thermometri minor fuit 147 grad. et iterum per idem temporis interuallum maior gradu 139. Ac ſi menſes aeſtiuos, Maium — Octobrem, ab hiemalibus, Ian. — April. Nou. — Decembr. ſeparamus, inuenimus in illis calorem medium fuiſſe 124 grad. at frigus medium in his 160 graduum.

III. Ventus

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia dies	Vent. lenis dies	Vent. fortis dies	Procelloſus dies	Nord dies	N O dies	Oſt dies	S-O dies	Sud dies	S-W dies	Weſt dies	N-W dies	Variabilis dies
Ian.	0	12	10	9	10	1	0	4	1	2	6	7	0
Febr.	1	9	13	5	4	9	0	0	2	6	4	3	0
Mart.	4	16	5	6	5	1	1	0	1	6	6	8	3
Apr.	3	19	6	2	10	1	0	0	0	3	6	10	0
Maii	8	11	9	3	4	2	0	0	1	6	8	10	0
Iunii	5	11	10	4	2	4	2	0	3	6	6	3	4
Iul.	10	13	5	3	0	0	7	1	0	3	14	5	1
Aug.	6	17	7	1	0	0	9	2	4	5	11	0	0
Sept.	7	12	10	1	1	1	3	2	4	8	6	3	2
Oct.	5	11	8	7	0	0	6	3	5	9	5	3	0
Nou.	5	16	8	1	1	0	4	6	3	6	9	1	0
Dec.	2	16	7	6	8	1	1	4	1	3	5	8	0
Anno 1775.	56	163	98	48	45	20	33	22	25	63	86	61	10

Vnde patet hoc anno maxime regnaſſe ventum ex occidente vel Zephirum, tum vero venti e regionibus S – W et N – W; minime autem venti N – O, S – O et Auſter.

Porro perſpicitur hunc annum minus ventoſum fuiſſe anno praeterlapſo 1774; malaciae obſeruatae fuerunt frequentius menſibus Iulii, Maii et Septembris: procellae et venti vehementiores frequentius occurrunt menſibus Ianuarii, Februari, Octobris et Iunii.

In

In ſpecie autem hoc anno procellae flabant e regione.

		dies
Nord	die 4. Ian. 22. Febr. 18. Apr. - -	3
N—O	die 24. Febr. 23. Mart. 2. Iun. - -	3
Oſt	die 9. Mart. 3. Iul. 15. 27. Octobr. 9. Nouembr. 14. Decembr. - - -	6
S—O	die 6. 7. Ian. 12. Septembr. 24. 25. 26. Decembr. - - - - -	6
Sud	die 8. Ian. 13. Mart. 23. Aug. - -	3
S—W	die 9. 31. Ian. 3. 8. Febr. 12. Mart. 11. Apr. 7. Maii. 24. 25. Iun. 17. Iul. 14. 20. 21. 22. 24. Octobr. 13 Decembr. - - - - -	16
Weſt	die 18. 31. Mart. 11. Maii. 26. Iun. 18. Iul. 3. Decembr. - - -	6
N—W	die 11. 20. 21. Ian. 7. Mart. 4. Maii - - - - -	5

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies
Ianuar.	5	18	6	1	12
Februar.	4	17	1	2	13
Mart.	6	14	4	3	15
April.	11	3	0	4	8
Maii	15	3	1	16	1
Iunii	9	4	0	13	1
Iulii	14	3	2	12	—
Auguſt.	18	3	10	8	—
Septembr.	8	8	5	14	—
Octobr.	1	14	9	16	—
Nouembr.	3	16	8	8	8
Decembr.	1	17	3	3	19
Anno 1775	95	120	49	100	77

Numerus dierum ſerenorum multo minor fuit hoc anno quam praeterito 1774, vbi eorum 127 numerabantur. Ac frequentius pluit et ninxit; praeſertim pluuia valde abundanter menſe Maii, Octobris, Septembris et Iunii, et nix copioſa menſe Decembris et Martii cecidit.

V.

V. Reliqua phoenomena.

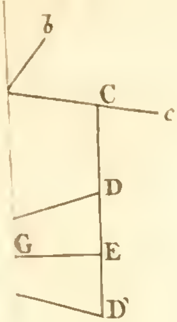
Grando decidit diebus 2 : die ſcilicet 17. et 21. Maii.

Tonuit tantum 7^{es} et quidem longinque die 14. 21. Iunii, d. 27. Iulii, d. 6. Auguſti, d. 28. Septembris, d. 15. Octobris et denique d. 27. Nouembris.

Aurorae boreales obſeruatae ſuerunt 21 : et quidem 5. perlucidae d. 26. Ian. d. 19. 20. Febr. d. 22. Martii, d. 27. Auguſti. Reliquae 16 aurore boreales debiliores annotabantur d. 1. 21. 22. 23. 25. 27. 29. Ian. d. 21. 23. Febr. d. 24. 30. Martii; d. 1. 2. 23. Aprilis; d. 24. Aug et denique d. 13. Octobris.

Parhelion die 4. Ianuarii.

Flumen Neva a glacie liberabatur die 22. Aprilis, et die 12. Nouembris vbique glacie obducebatur.



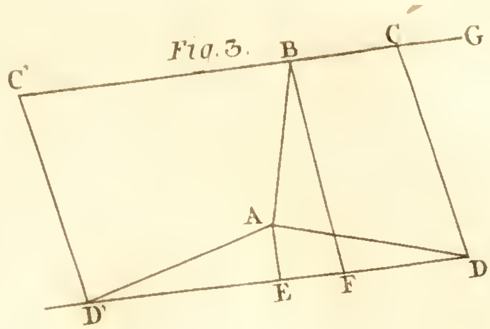


Fig. 3.

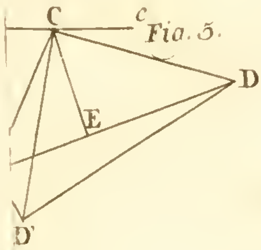


Fig. 5.

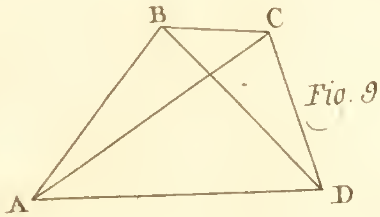


Fig. 9.

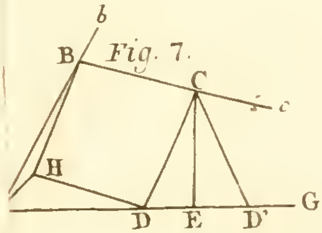


Fig. 7.

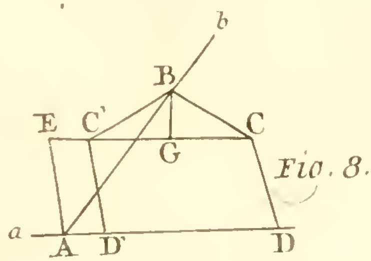
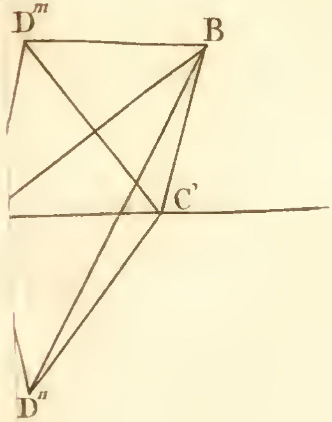


Fig. 8.



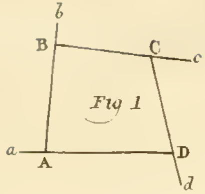


Fig 1

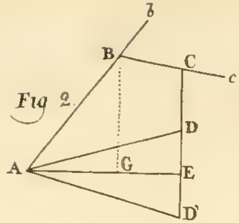


Fig 2.

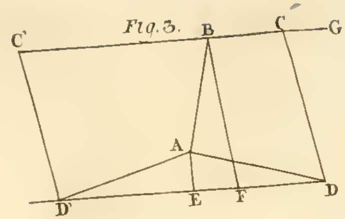


Fig. 3.

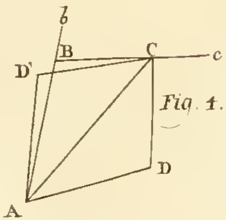


Fig. 4.

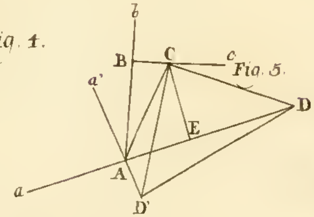


Fig. 5.

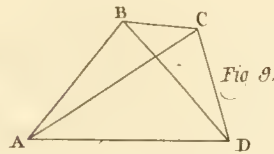


Fig. 9.

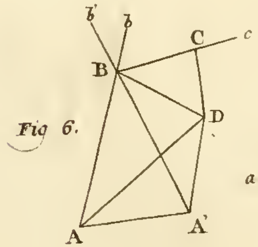


Fig 6.

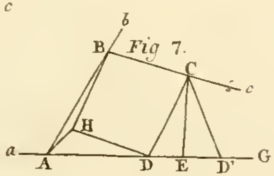


Fig 7.

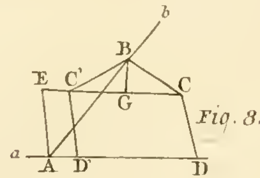


Fig. 8.

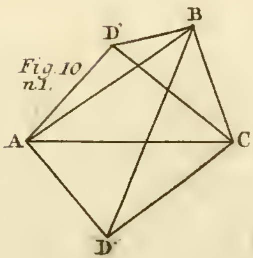


Fig. 10 n.1.

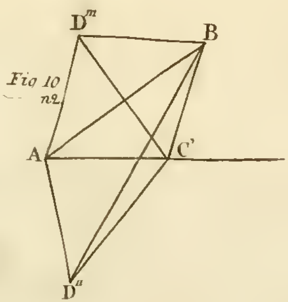
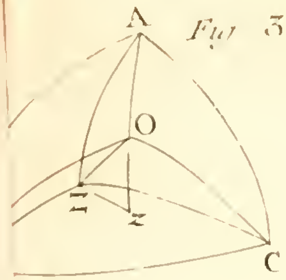


Fig 10 n2.

Fig 3



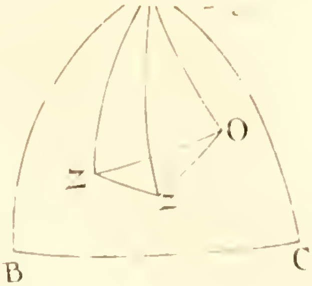
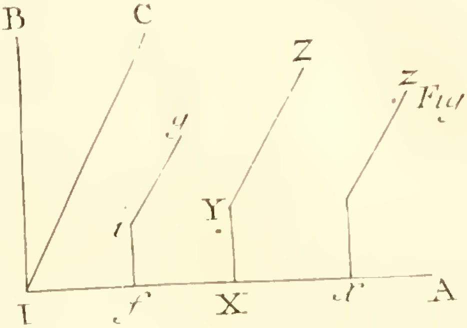


Fig 5



Fig 6



8

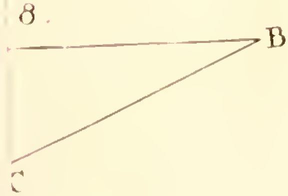




Fig 9

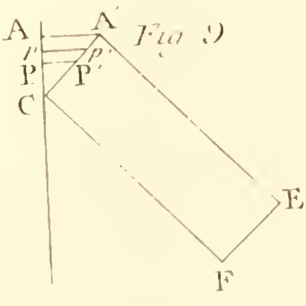


Fig 1

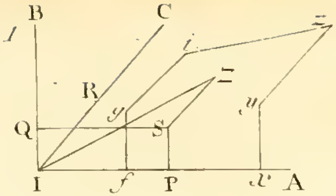


Fig 3

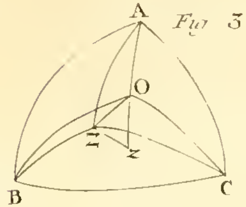


Fig 4

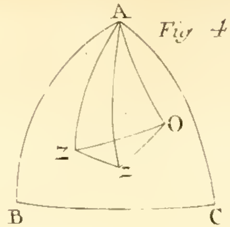


Fig 2

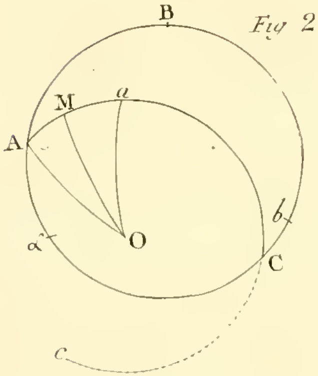


Fig 5

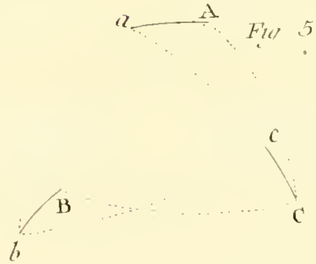


Fig 6

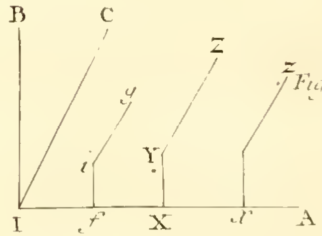


Fig 7.

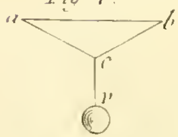


Fig 8

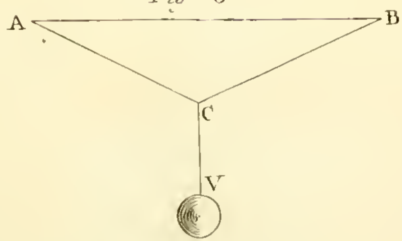
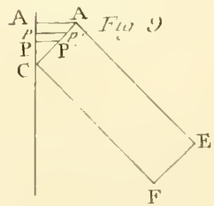


Fig 9



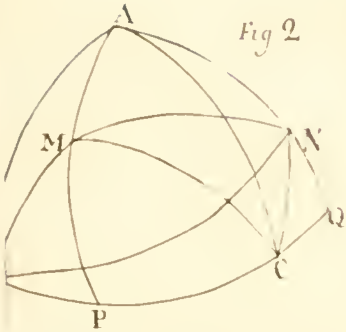


Fig 2

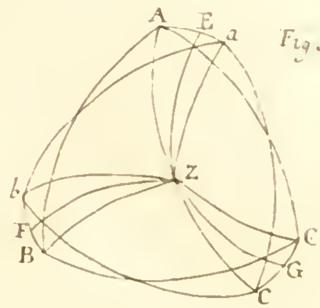
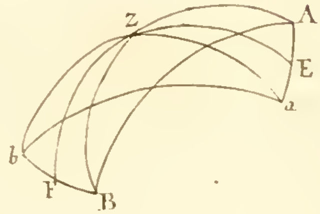


Fig 3

Fig. 4



Fig. 7



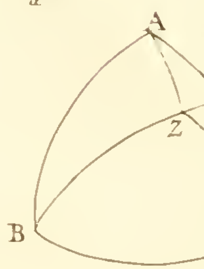


Fig 8.

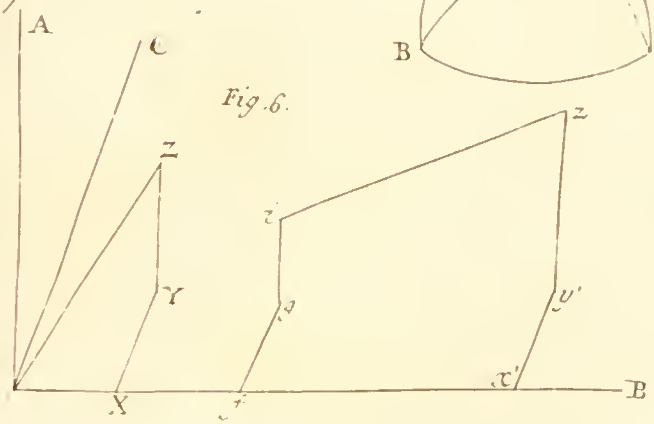


Fig. 6.

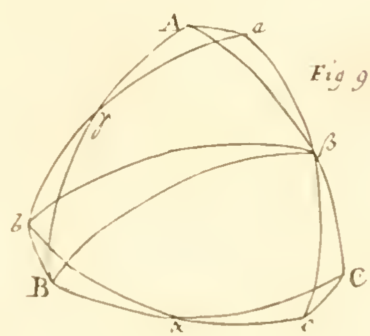


Fig 9.

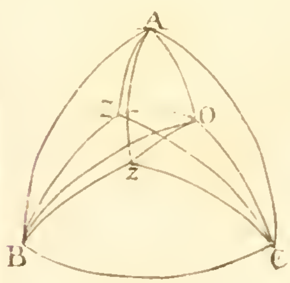


Fig. 11.

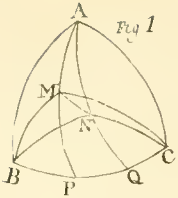


Fig 1.

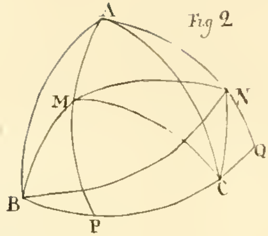


Fig 2.

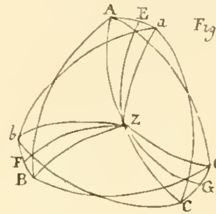


Fig 3.

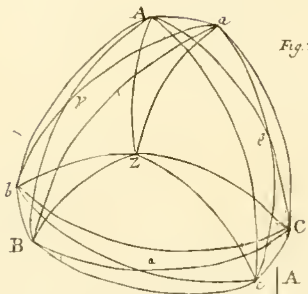


Fig. 4.

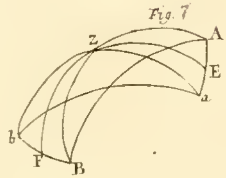


Fig. 7.

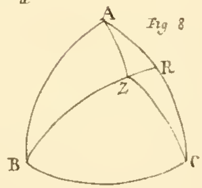


Fig 8.

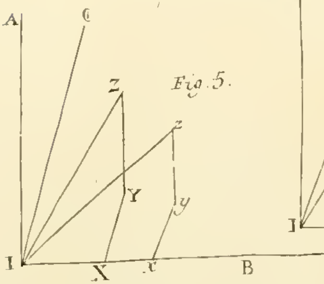


Fig. 5.

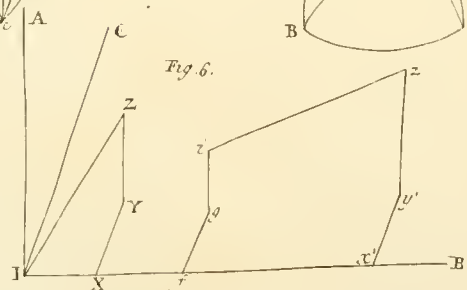


Fig. 6.

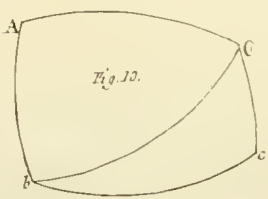


Fig. 10.

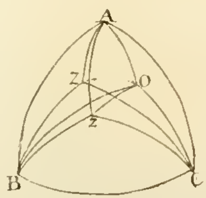


Fig. 11.

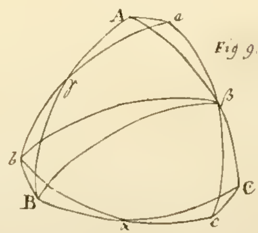


Fig 9.

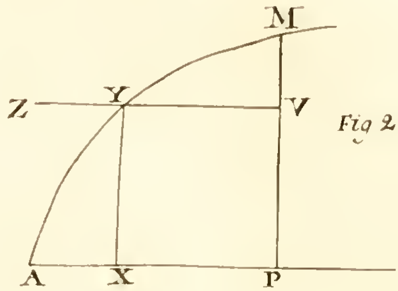
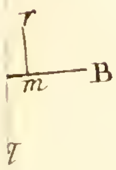


Fig 2



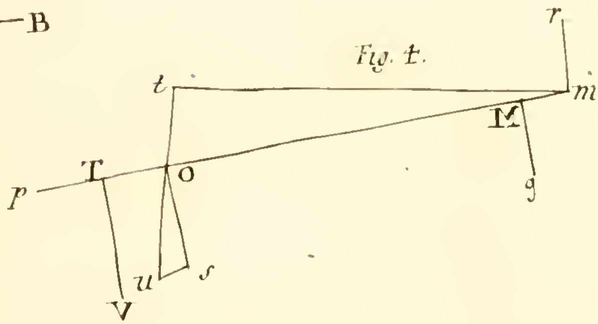


Fig. 4.

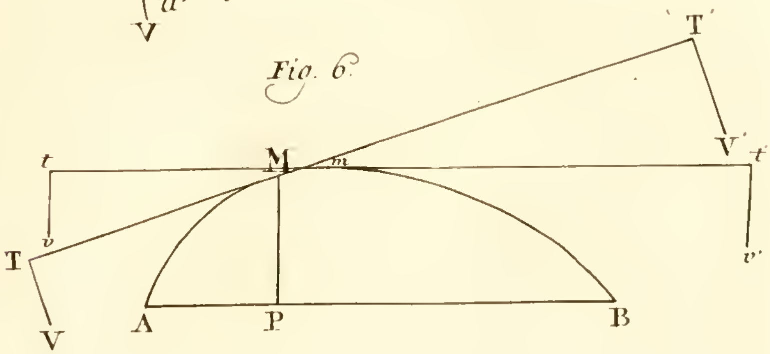


Fig. 6.

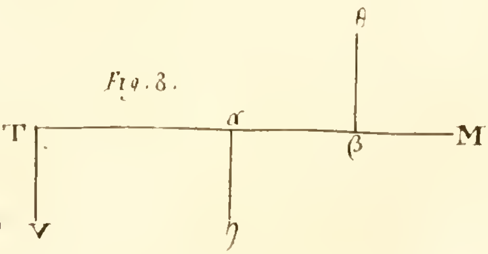


Fig. 8.

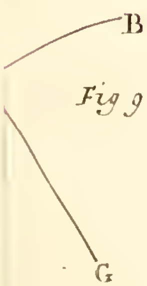


Fig 9

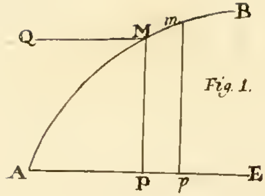


Fig. 1.

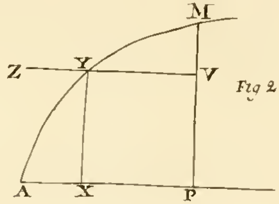


Fig. 2

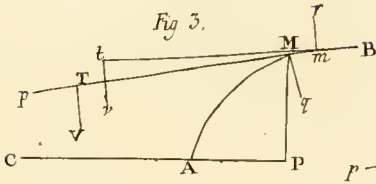


Fig. 3.

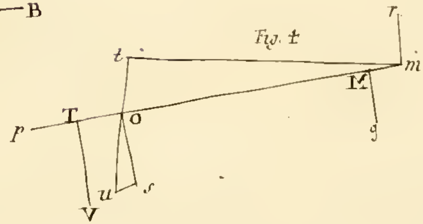


Fig. 4

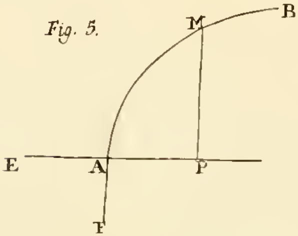


Fig. 5.

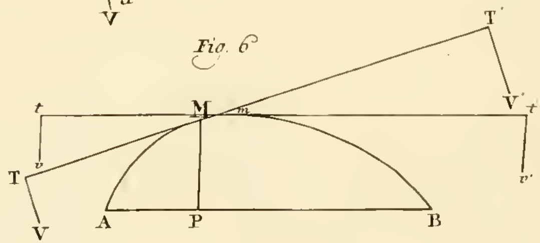


Fig. 6

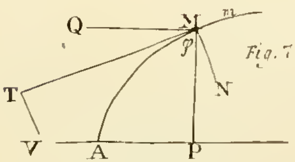


Fig. 7

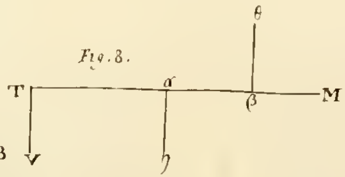


Fig. 8.

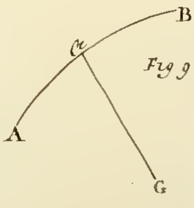
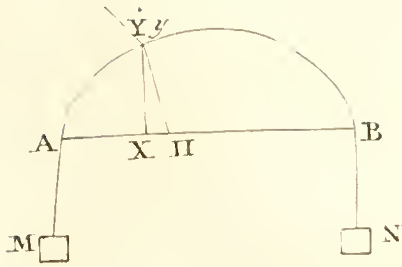


Fig. 9



Fig. 2.



ig. 3.

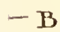
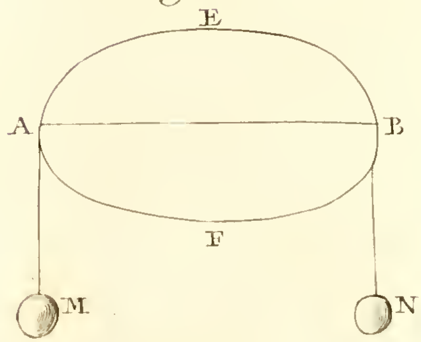


Fig. 4.



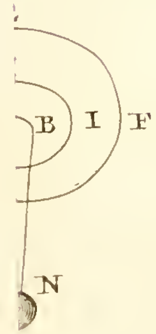


Fig. 5.

Fig. 1.

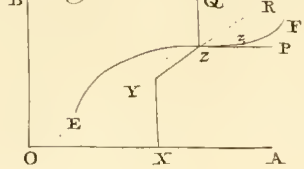


Fig. 2.

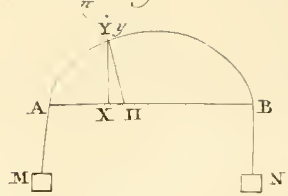


Fig. 3.

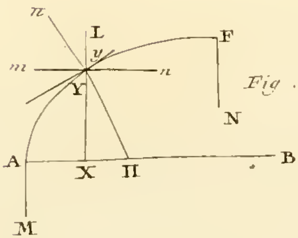


Fig. 4.

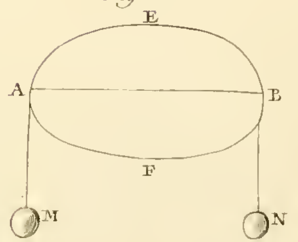
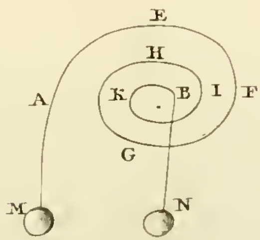


Fig. 5.



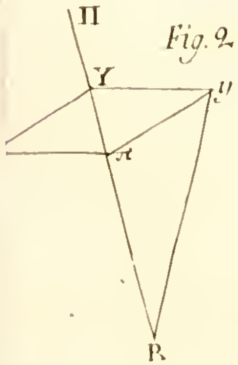


Fig. 2.

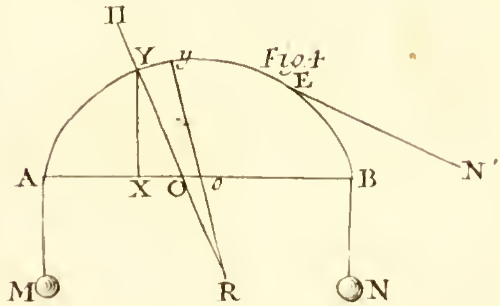


Fig. 4.

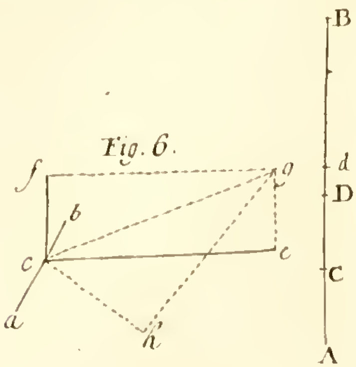


Fig. 6.

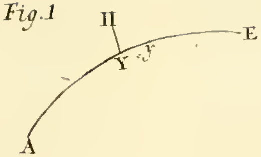


Fig. 1

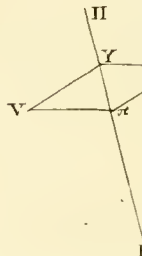


Fig. 2

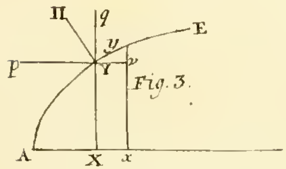


Fig. 3.

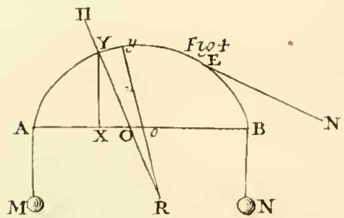


Fig. 4

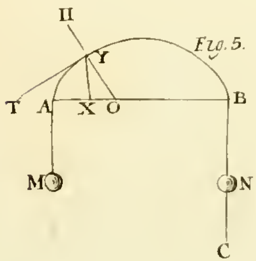


Fig. 5.

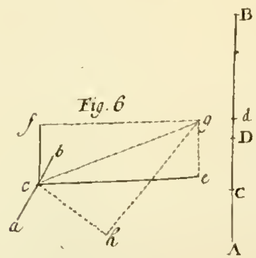


Fig. 6

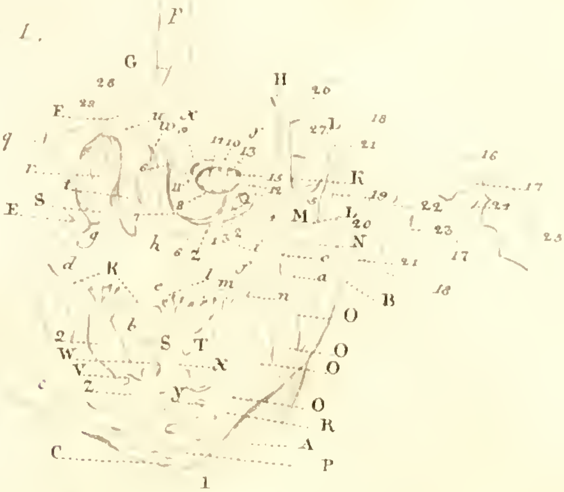


Fig. 1.



Fig. 2.

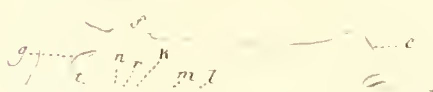
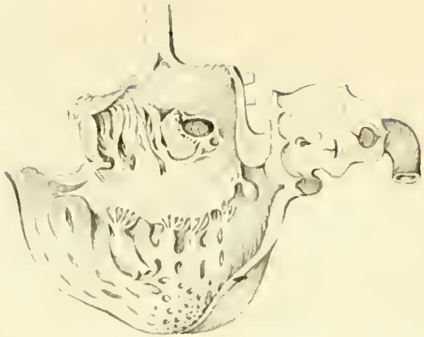


Fig. 3.



Fig. 1.



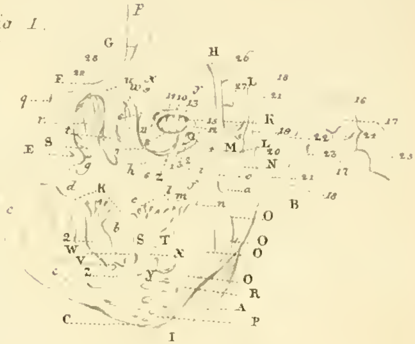
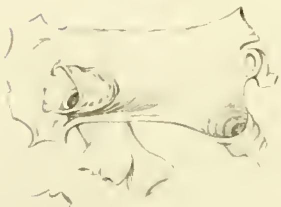


Fig. 2.





Fig. 3.



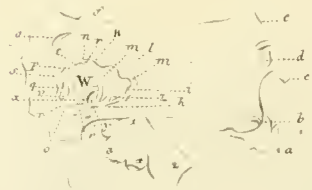


Fig. 4.





Fig. 5.

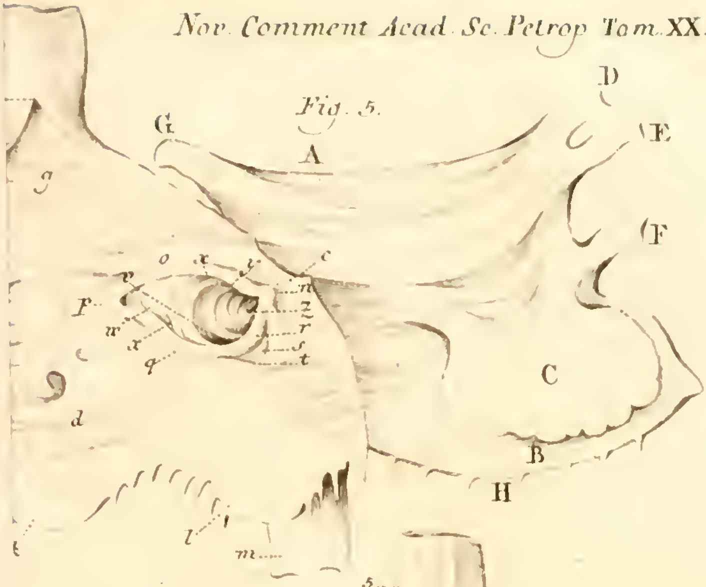
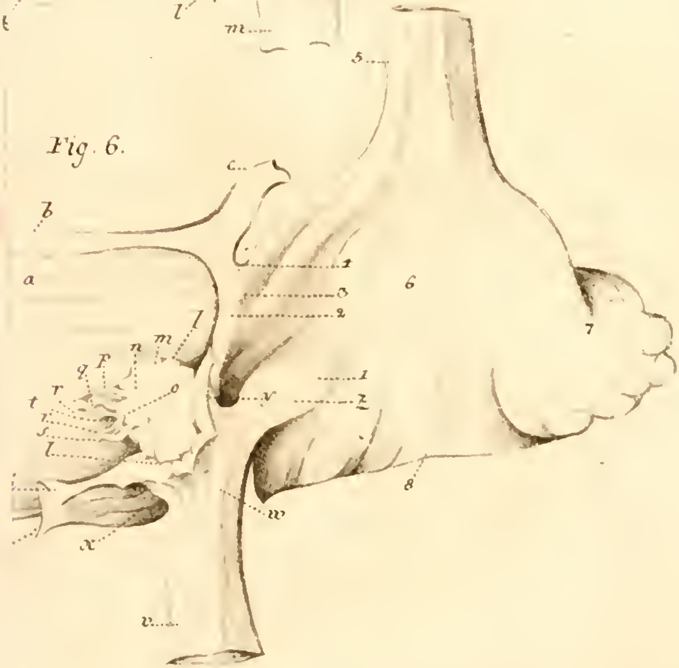


Fig. 6.



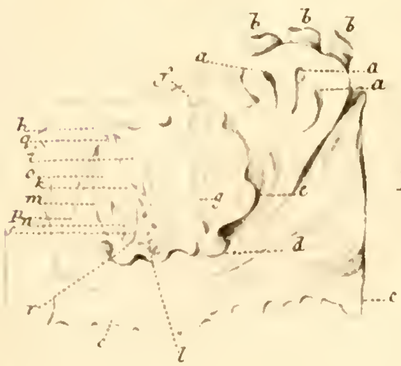


Fig. 7.

Fig 5.

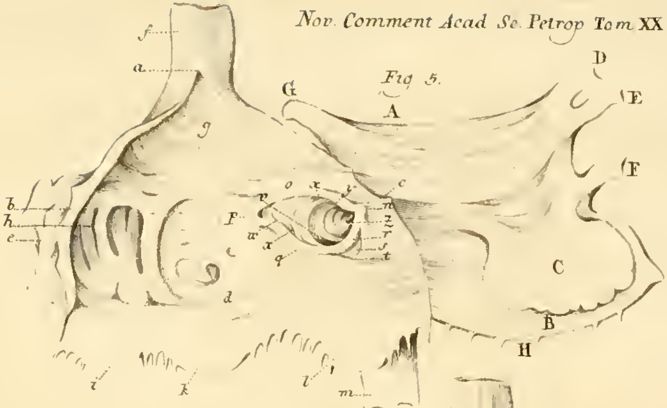


Fig. 6.

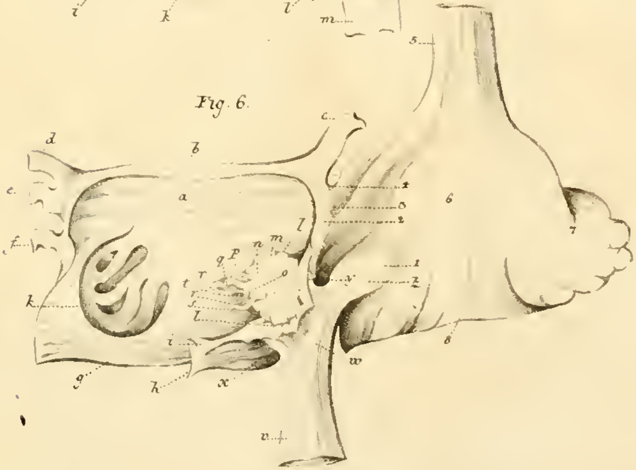


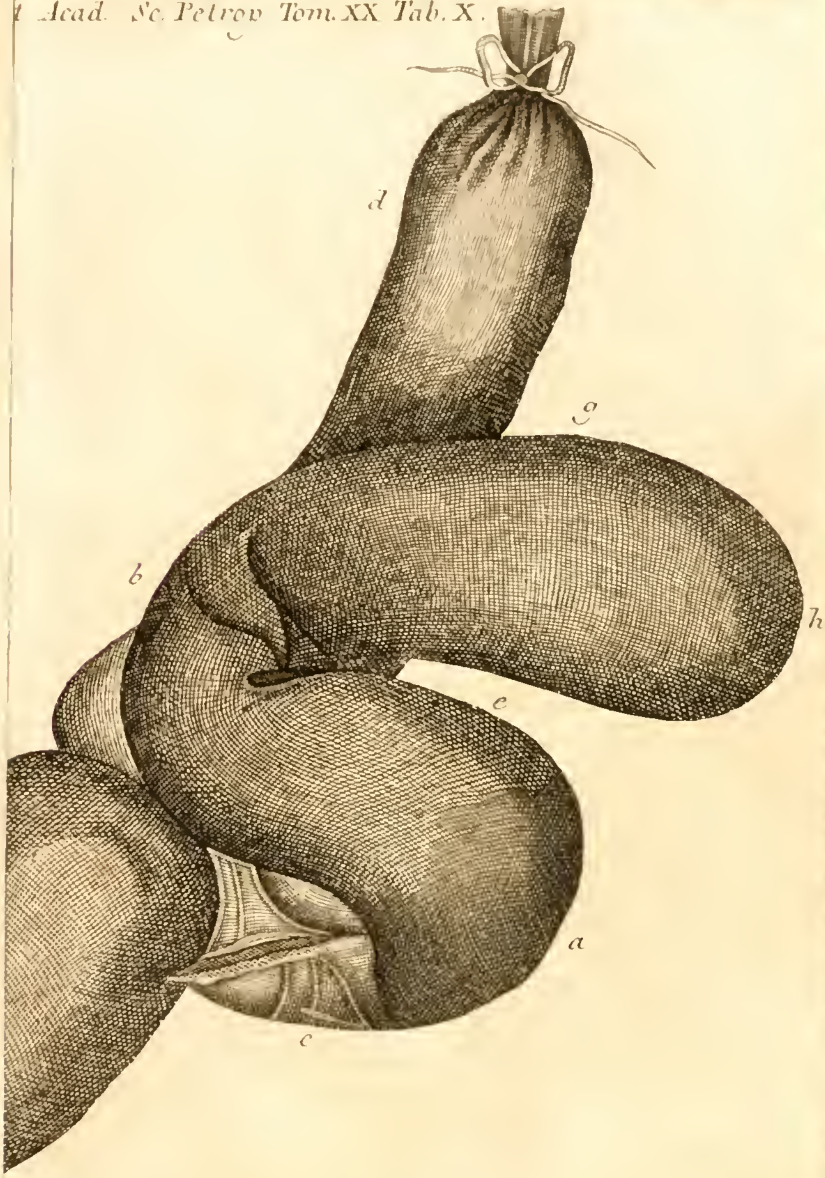
Fig. 7.



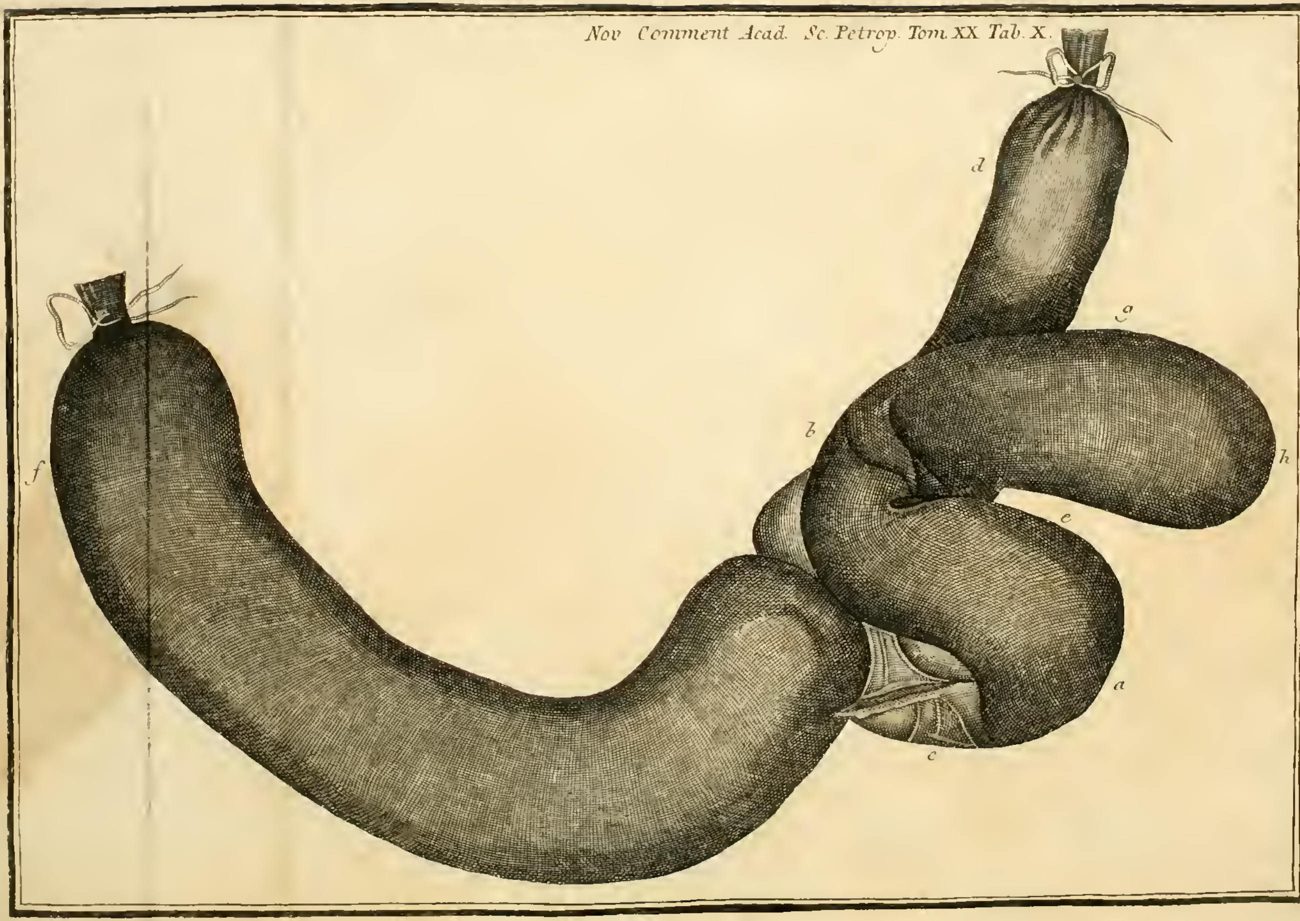

c
d
e
f
e
d
g
c
h
d
i
e
d
k
l

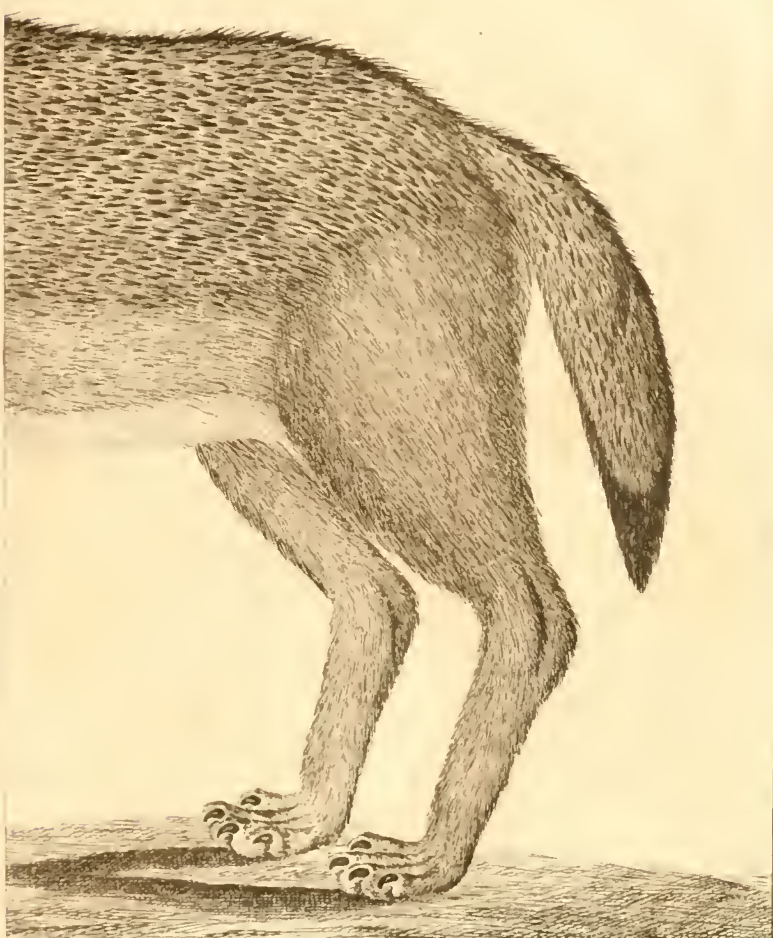

I.
II.
III.
IV.

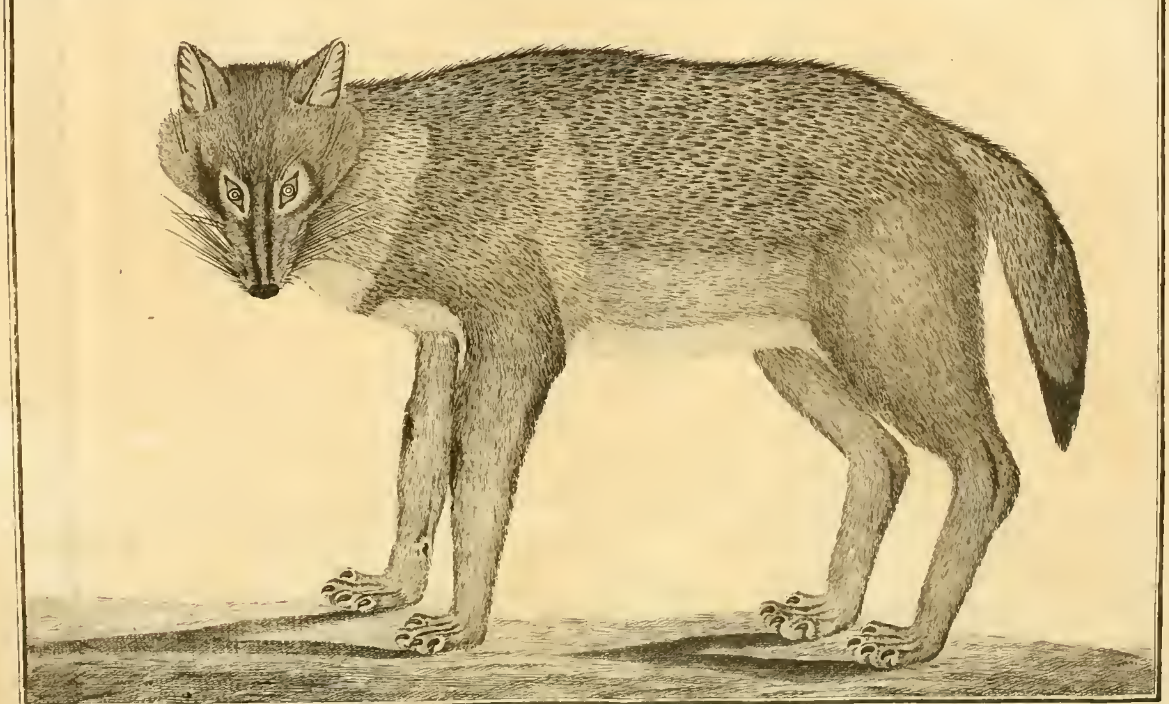
t Acad. Sc. Petrop. Tom. XX Tab. X.



Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. XX. Tab. X.







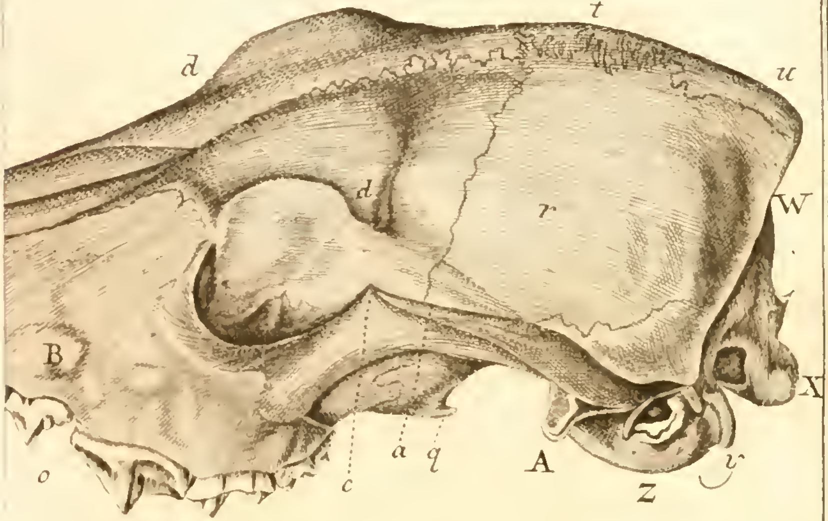


Fig. 2.





Fig. 3.

Fig. 1.

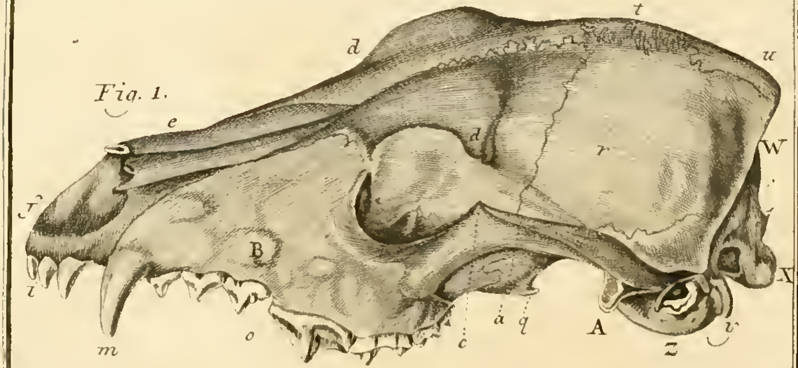
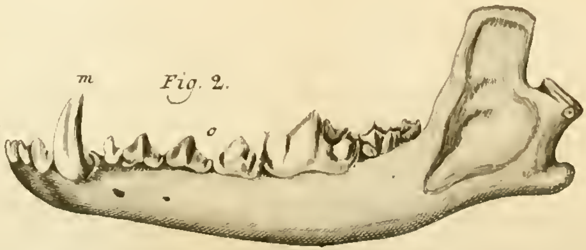


Fig. 2.



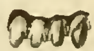


Fig. 3.

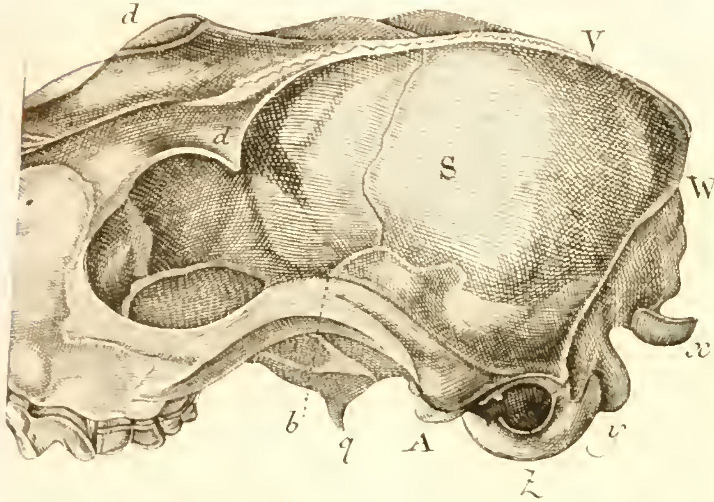


Fig. 5.

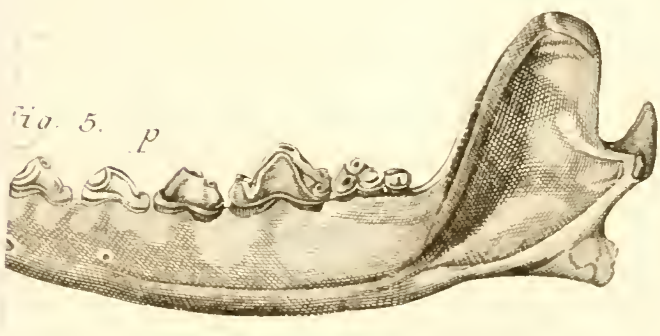


Fig. 6.

Nov Comment Acad Sc Petrop Tom XX Tab XIII

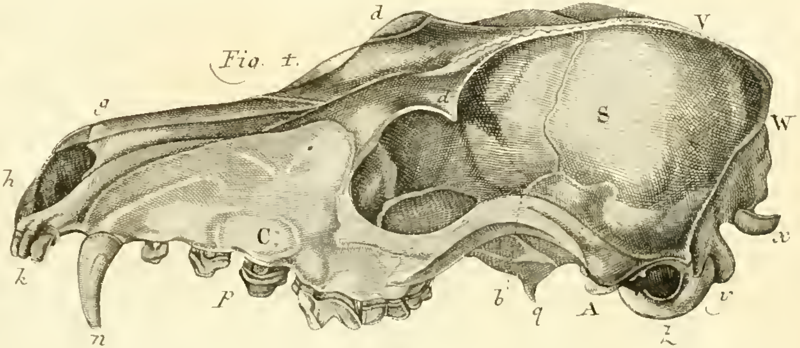


Fig. 4.

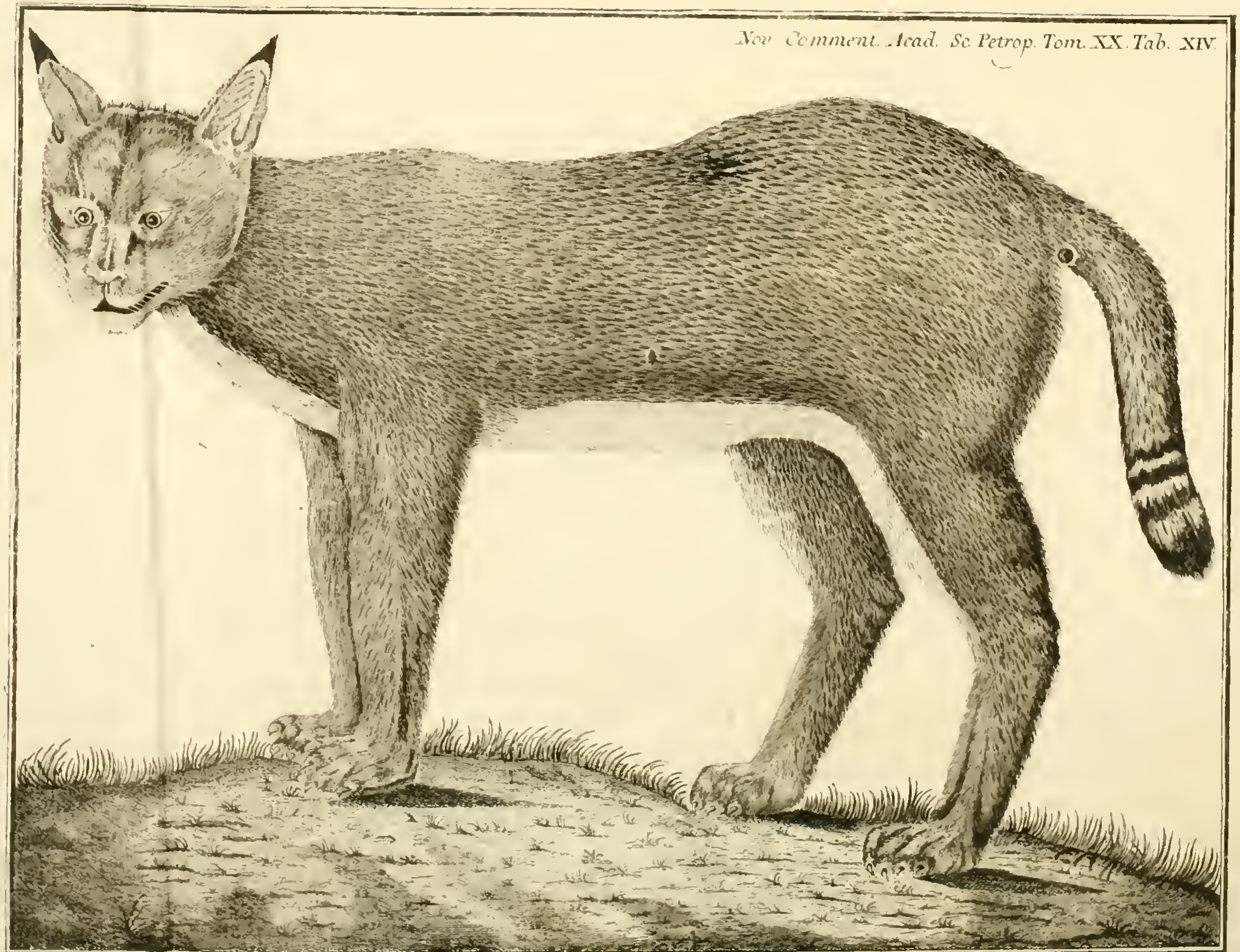


Fig. 5


Fig. 6.

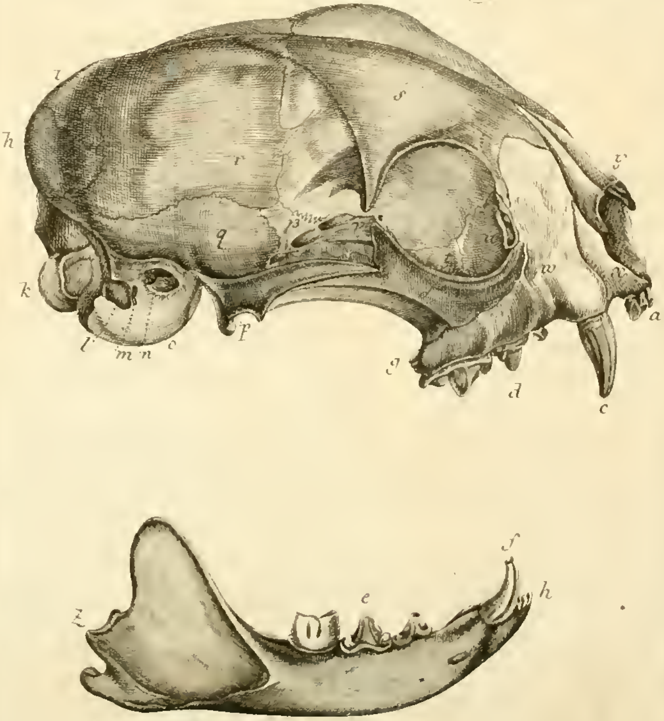
Nov Comment. Acad. Sc Petrop. Tom. XX. Tab. XIV.




Nov Comment. Acad. Sc Petrop. Tom. XX. Tab. XIV.


s
r
y
q
t
w
x
a
p
g
d
c
f
e
h

Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. XX. Tab. XV.



…io 2.

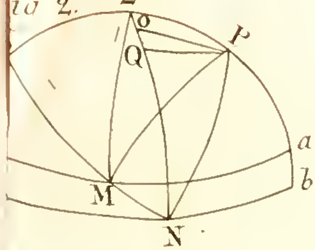


Fig. 3.

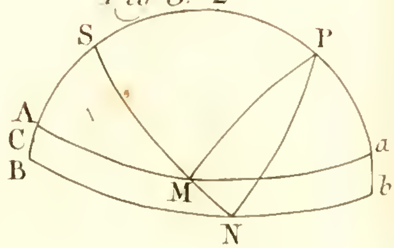
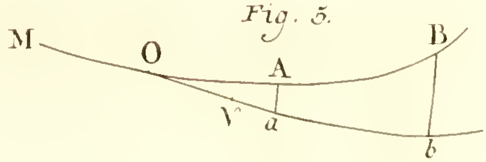


Fig. 5.



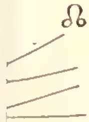
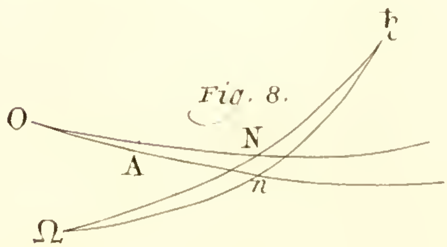


Fig. 8.





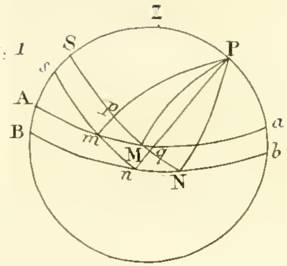


Fig. 1

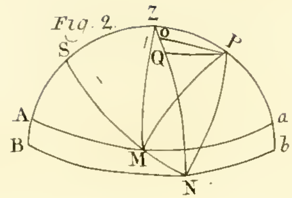


Fig. 2.

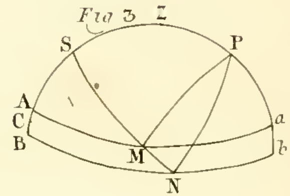


Fig. 3

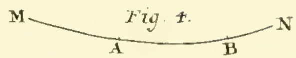


Fig. 4.

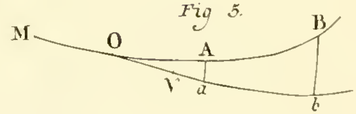


Fig. 5.

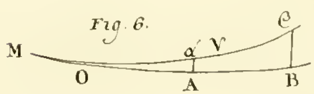


Fig. 6.

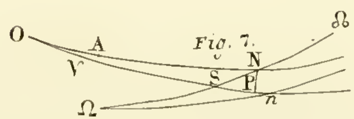


Fig. 7.

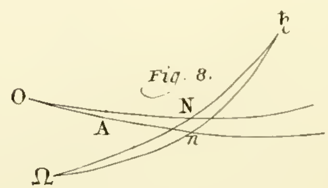


Fig. 8.

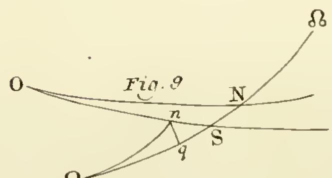


Fig. 9

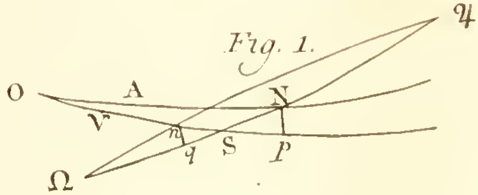


Fig. 1.

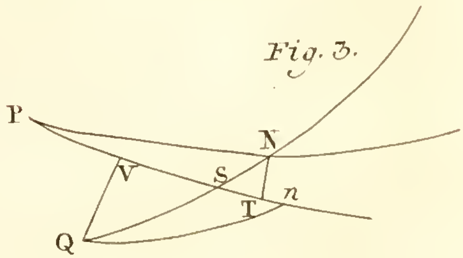


Fig. 3.

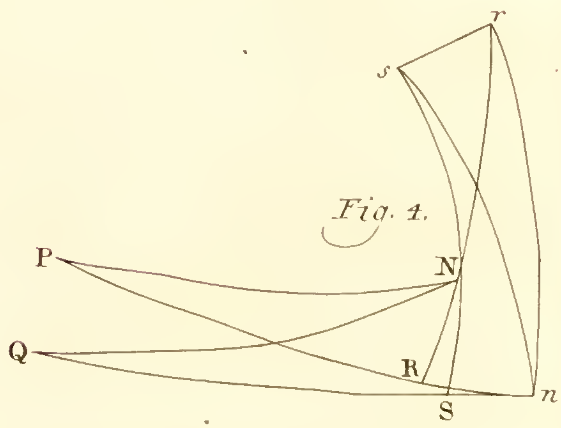


Fig. 4.

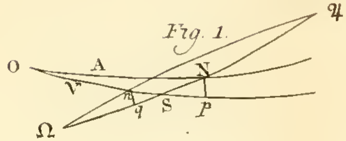


Fig. 1.

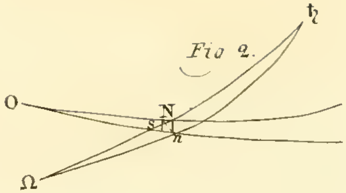


Fig. 2.

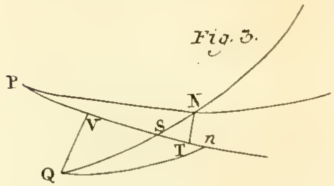


Fig. 3.

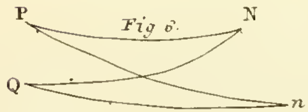


Fig. 6.

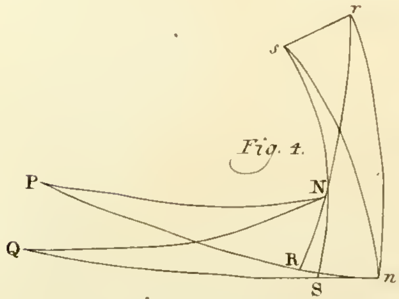


Fig. 4.

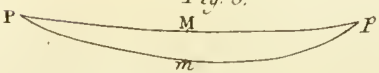


Fig. 5.

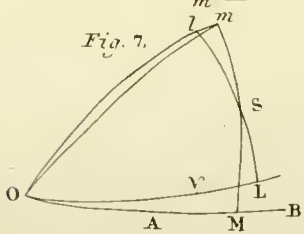
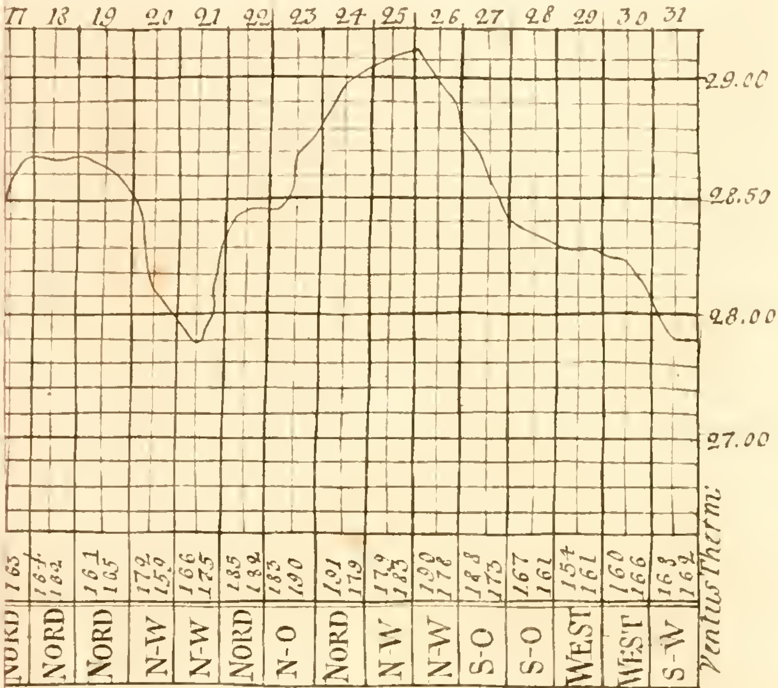


Fig. 7.

rometri Petropoli per mensem Ianuarii a. 1775 observatarum



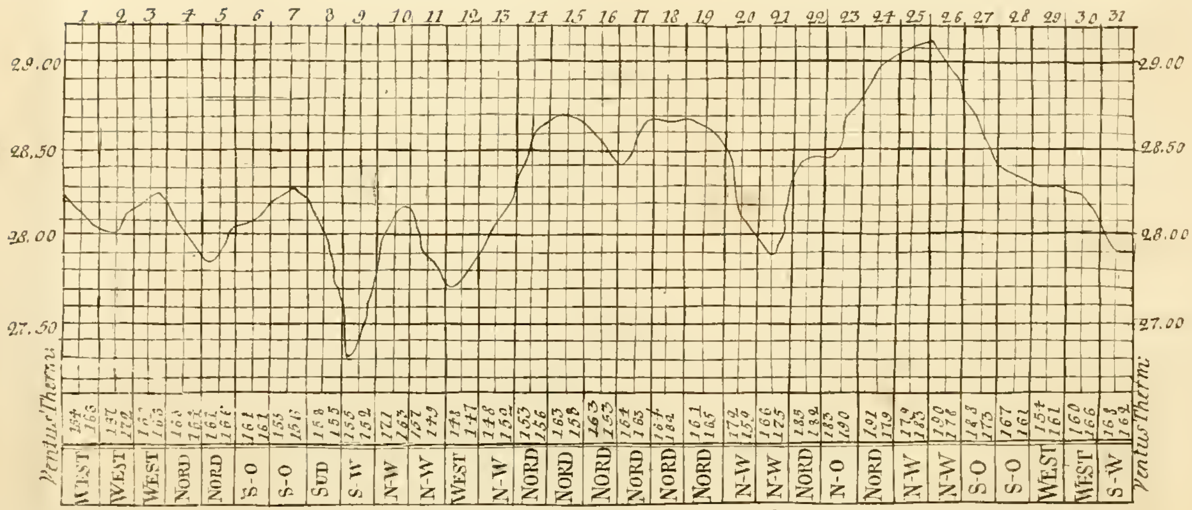
0.

plane obductum die 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 28. 29. 30. 31

9: Pluit die 12.

27. 29.

Tabula Variationum Barometri Petropoli per mensem Ianuarii a. 1775 obſervatarum



Ventuſ leniſ die 12 . 13. 14 . 15 . 19 . 22. 24. 26 . 27. 28. 29. 30.

Ventuſ fortiſ die 1. 2. 3 . 5. 10. 16 . 17. 18. 23. 25.

Procelloſuſ die 4. 6 . 7. 8. 9. 11. 20. 21. 31.

Coelum plane ſerenum die 22. 23. 24. 25. 26. et plane obductum die 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 28. 29. 30. 31

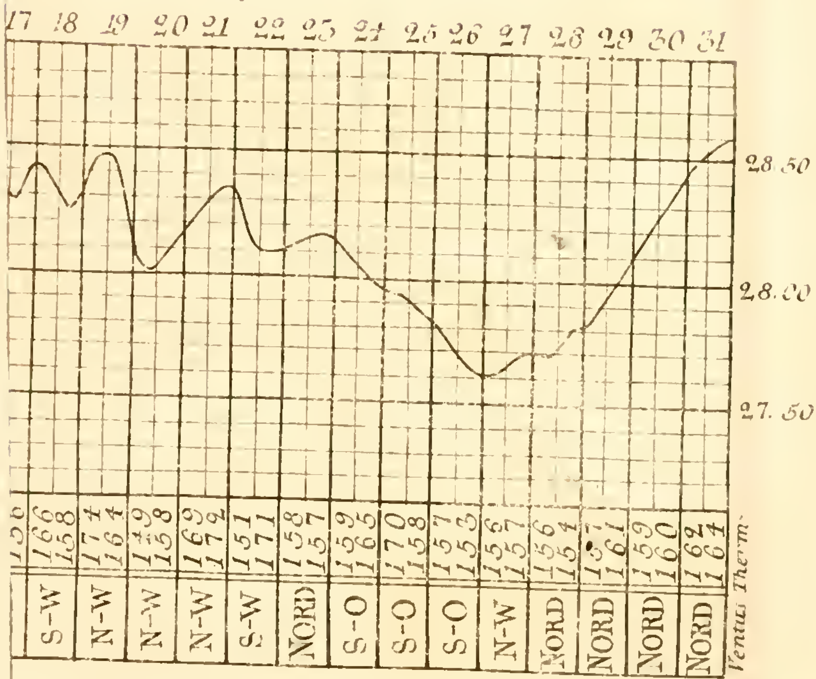
Nebuloſum die 10. 15. 17. 18. 19. 26.

Nix die 5. 12. 13. 15. 16. 20. 27. 28. 30. 31. Nix copioſa die 8. 9. Pluil die 12.

Parhelion die 4.

Auroræ boreales die 1. 21. 22. 23. 25. 26. 27. 29.

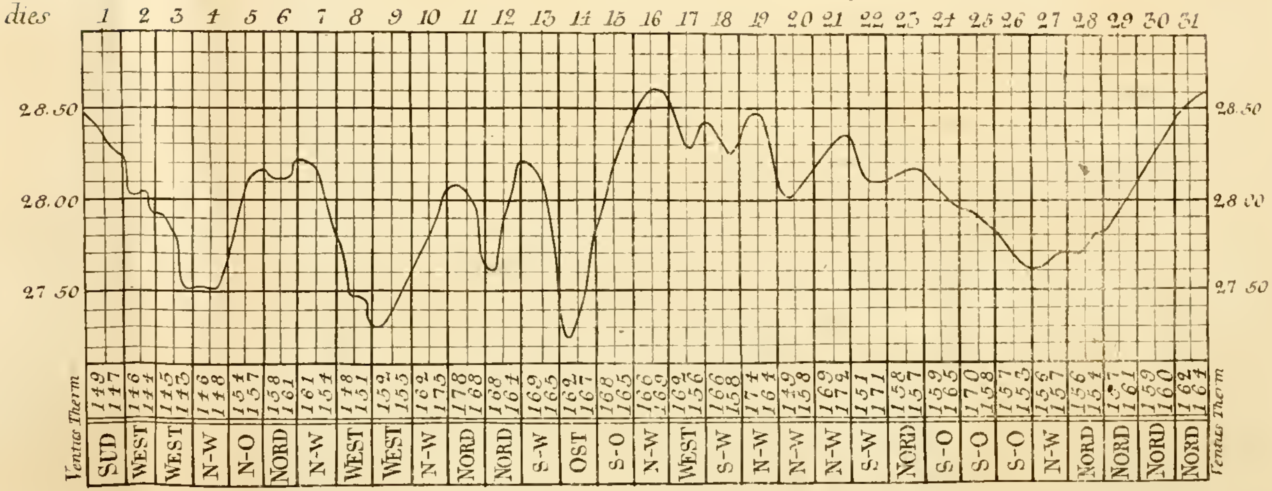
...nsem Decembris A. 1775 observatorum



... 9.13.14.16 17.22.26.27.28.29.30.31.

...a die 9.18.29.31.

Tabula Variationum Barometri, Petropoli per Mensem Decembris A. 1775 observatarum



Malacia die 18. 19.

Ventus lenis die 1. 5. 6. 9. 12. 15. 16. 17. 20. 21. 22. 23. 28. 29. 30. 31.

Ventus fortis die 2. 4. 7. 8. 10. 11. 27.

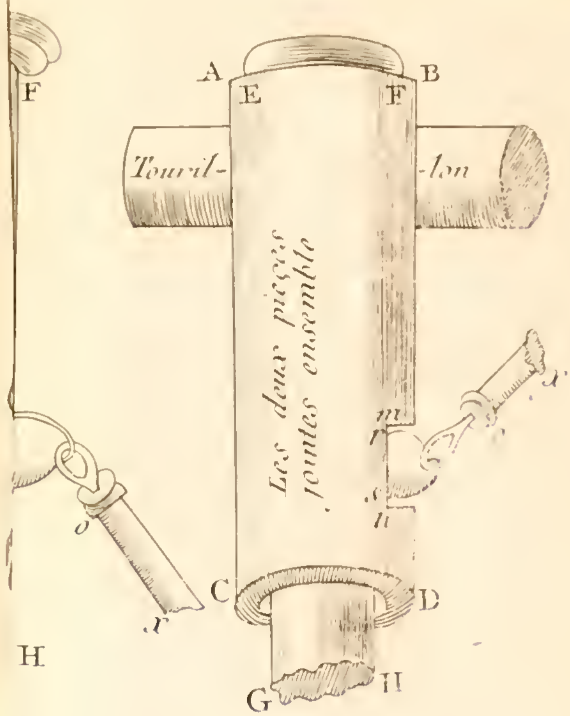
Procellosus die 3. 13. 14. 24. 25. 26.

Coelum plane serenum die 21. *et plane obductum die* 1. 2. 3. 4. 5. 8. 13. 14. 16. 17. 22. 26. 27. 28. 29. 30. 31.

Nebulosum die 18. 19. 27

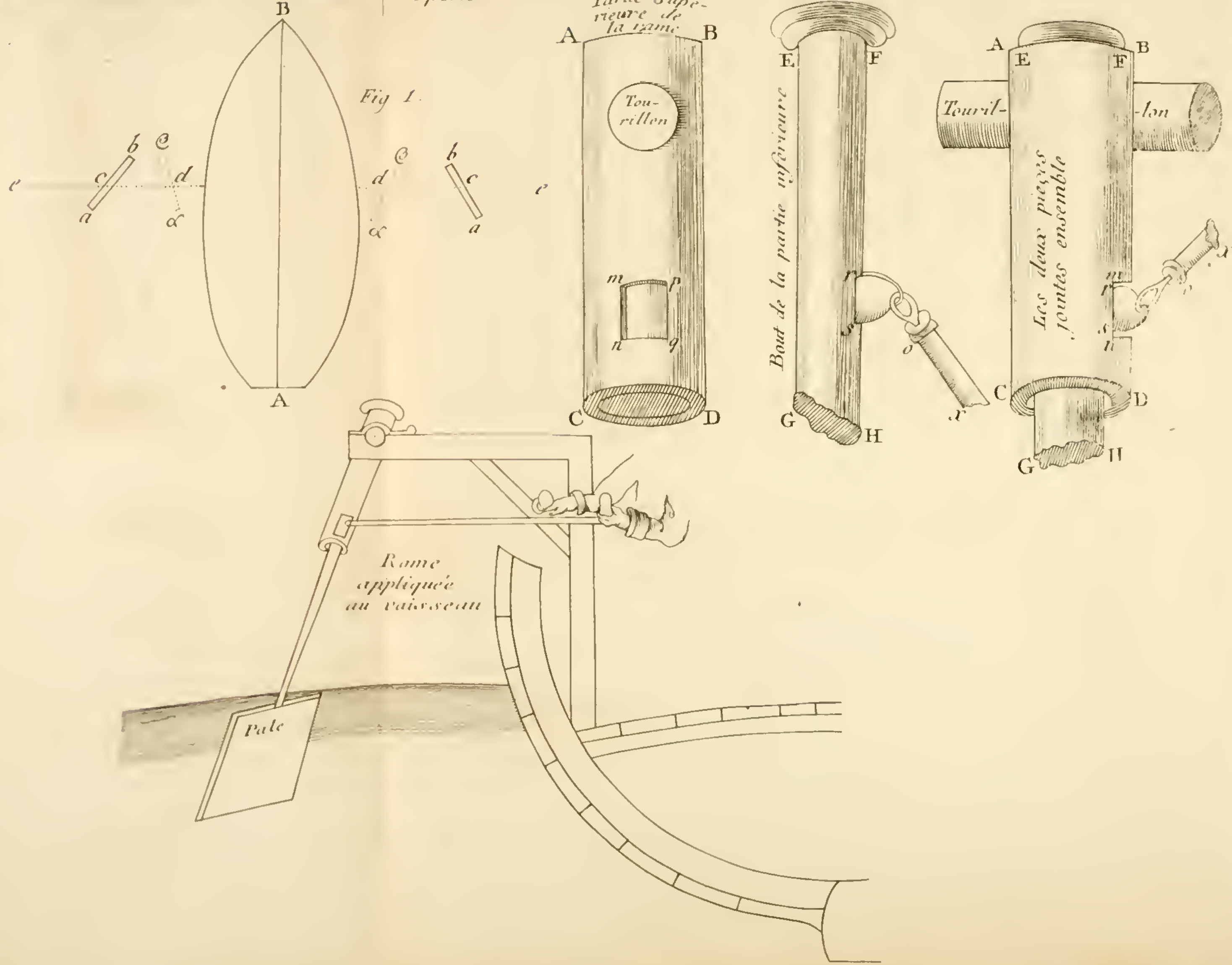
Nix die 1. 4. 5. 7. 8. 11. 12. 13. 15. 17. 20. 26. 27. 28. 30. *Nix copiosa die* 9. 18. 29. 31.

Pluvia die 1. 2. 3.



A
B
E
F
Touril-
-lon
Les deux pièces jointes ensemble
m
r
s
n
x
o
C
D
G
H

Ad diſſert. de nova remorum ſpecie



16-70285
d. sci, Imp. Petropolitan.20 1775

AMNH LIBRARY
100125019